MODELOS DE 2010 RESUELTOS **Profesor: Rafael Núñez Nogales**

1.- De dos sucesos aleatorios A y B del mismo espacio de sucesos se sabe que $p(A) = \frac{2}{3}$ $p(B) = \frac{3}{4}$ y $p(A \cap B) = \frac{5}{8}$. Calcule:

a) La probabilidad de que se verifique alguno de los dos sucesos.

Resolución Se pide $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{5}{8} = \frac{19}{24}$

b) La probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos sucesos.

Resolución Por una de las leyes de Morgan, $p(A^c \cap B^c) = p[(A \cup B)^c] = 1 - p(A \cup B) = 1 - \frac{19}{24} = \frac{5}{24}$

c) La probabilidad de que ocurra A si se ha verificado B. **Resolución** Se pide $p\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{5/8}{3/4} = \frac{5}{6}$

2.- El 60% de los camareros de una localidad tienen 35 años o más, y de ellos el 70% son dueños del local donde trabajan. Por otra parte, de los camareros con menos de 35 años sólo el 40% son dueños del local donde trabajan.

a) Seleccionado un camarero al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no sea dueño del local?

Resolución

Sean los sucesos A = "El camarero tiene 35 años o más" B = "El camarero es dueño del local"

Construimos la siguiente tabla de porcentajes:

	A	A^c	Total
B	70% del 60% = 42%	40% del 40% = 16%	58%
B^c	60% – 42% = 18%	40% – 16% = 24%	42%
Total	60%	100% – 60% = 40%	100 %

Se pide $p(B^c) = 42\%$

b) Elegido al azar un camarero dueño de su local, ¿cuál es la probabilidad de que tenga menos de 35 años?

Resolución Se pide $p\left(\frac{A^c}{B}\right) = \frac{p(A^c \cap B)}{p(B)} = \frac{16\%}{58\%} = \frac{16}{58} \cong 0,2759 = 27,59\%$

3.- Una empresa utiliza dos servidores para conectarse a Internet. El primero, S1, lo utiliza el 45% de las veces y el segundo, S2, el resto. Cuando se conecta a Internet con S1, los ordenadores se bloquean el 5% de las veces, y cuando lo hace con S2 el 8%. Si un día, al azar, la empresa está conectada a Internet,

a) ¿cuál es la probabilidad de que los ordenadores se queden bloqueados?

Resolución

Sean los sucesos S1 = "La empresa utiliza el servidor S1" S2 = "La empresa utiliza el servidor S2"

B = "los ordenadores quedan bloqueados"

Construimos la siguiente tabla de porcentajes:

	S1	S2	Total
B	5% del 45% = 2,25%	8% del 55% = 4,4%	6,65%
B^c	45% – 2,25% = 42,75%	55% – 4,4% = 50,6%	93,35 %
Total	45%	100% – 45% = 55%	100%

Se pide $p(B) = 6,65\%$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la empresa esté utilizando el servidor S1, sabiendo que los ordenadores se han quedado bloqueados?

Resolución Se pide $p\left(\frac{S1}{B}\right) = \frac{p(S1 \cap B)}{p(B)} = \frac{2{,}25\%}{6{,}65\%} = \frac{2{,}25}{6{,}65} \cong 0,3383 = 33,83\%$

4.- En un centro de enseñanza secundaria se sabe que el 45% de los alumnos juegan al fútbol, que el 60% practican atletismo, y que de los que practican atletismo el 50% juegan al fútbol.
a) ¿Qué porcentaje de alumnos practican ambos deportes?

Resolución

Sean los sucesos F = "El alumno juega al fútbol" A = "El alumno practica atletismo"

Construimos la siguiente tabla de porcentajes:

	F	F^c	Total
A	50% del 60% = 30%	60% – 30% = 30%	60%
A^c	45% – 30% = 15%	55% – 30% = 25%	100% – 60% = 40%
Total	45%	100% – 45% = 55%	100%

Como p(F ∩ A) = 30%, el porcentaje que se pide es el 30%

b) Si se elige al azar un alumno de ese centro, ¿cuál es la probabilidad de que no practique ninguno de estos deportes?

Resolución Se pide $p(F^c \cap A^c) = 25\%$

c) Si un alumno de ese centro no juega al fútbol, ¿cuál es la probabilidad de que practique atletismo?

Resolución Se pide $p\left(\frac{A}{F^c}\right) = \frac{p(A \cap F^c)}{p(F^c)} = \frac{30\%}{55\%} = \frac{30}{55} \cong 0,5455 = 54,55\%$

5.- (prueba extraordinaria) En una capital se editan dos periódicos, CIUDAD y LA MAÑANA. Se sabe que el 85% de la población lee alguno de ellos, que el 18% lee los dos y que el 70% lee CIUDAD. Si elegimos al azar un habitante de esa capital, halle la probabilidad de que:
a) No lea ninguno de los dos.

Resolución

Sean los sucesos C = "El habitante lee el periódico CIUDAD" M = "El habitante lee el periódico MAÑANA"

Según el enunciado, p(C ∪ M) = 0,85 ; p(C ∩ M) = 0,18 y p(C) = 0,7.

Por una de las leyes de Morgan, $p(C^c \cap M^c) = p[(C \cup M)^c] = 1 - p(C \cup M) = 1 - 0{,}85 = 0{,}15 = 15\%$

b) Lea sólo LA MAÑANA.

Resolución

$p(C \cup M) = p(C) + p(M) - p(C \cap M) \Rightarrow p(M) = p(C \cup M) + p(C \cap M) - p(C) = 0{,}85 + 0{,}18 - 0{,}7 = 0{,}33$

Se pide $p(M \cap C^c) = p(M) - p(M \cap C) = 0{,}33 - 0{,}18 = 0{,}15 = 15\%$

c) Lea CIUDAD, sabiendo que no lee LA MAÑANA.

Resolución Se pide $p\left(\frac{C}{M^c}\right) = \frac{p(C \cap M^c)}{p(M^c)} = \frac{p(C) - p(C \cap M)}{1 - p(M)} = \frac{0{,}7 - 0{,}18}{1 - 0{,}33} \cong 0{,}7761 = 77{,}61\%$

6.- (prueba extraordinaria) Un dado tiene seis caras, tres de ellas marcadas con un 1, dos marcadas con una X y la otra marcada con un 2. Se lanza tres veces ese dado.

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener tres veces el 1?

Resolución

Sean los sucesos ① = "sacar un 1" □ = "sacar una x" ② = "sacar un 2"

Según el enunciado, $p() = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ $p() = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ $p() = \frac{1}{6}$

Hay que tener en cuenta que el resultado en un lanzamiento no depende del resultado en el lanzamiento anterior. Luego, los resultados del experimento de lanzar el dado 3 veces son independientes e incompatibles.

Se pide p(①①①) = p(①) . p(①) . p(①) = [p(①)]^3 = $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos X y un 2 en cualquier orden?

Resolución Se pide p(□□② ∪ ②□□ ∪ □②□) = $\left[\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^2\right] .3 = \frac{1}{2}\frac{1}{9} = \frac{1}{18}$

c) ¿Cuál es la probabilidad de obtener tres resultados diferentes?

Resolución Se pide p(①□② ∪ ①②□ ∪ □①② ∪ □②① ∪ ②①□ ∪ ②□①) =
$\left[\frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{6}\right] .6 = \frac{1}{36}6 = \frac{1}{6}$

7.- El 41% de quienes se presentan a un examen son varones. Aprueban dicho examen el 70% de los varones presentados y el 60% de las mujeres presentadas.

a) Calcule la probabilidad de que, si una persona escogida al azar ha aprobado, sea mujer.

Resolución

Sean los sucesos V = "El alumno es varón" M = "El alumno es mujer" A = "El alumno aprueba"

Construimos la siguiente tabla de porcentajes:

	V	M	Total
A	70% del 41% = 28,7%	60% del 59% = 35,4%	64,1 %
A^c	41% – 28,7% = 12,3%	59% – 35,4% = 23,6%	35,9 %
Total	41%	100% – 41% = 59%	100%

Se pide $p\left(\frac{M}{A}\right) = \frac{p(M \cap A)}{p(A)} = \frac{35{,}4\%}{64{,}1\%} = \frac{35{,}4}{64{,}1} \cong 0{,}5523 = 55{,}23\%$

b) Calcule la probabilidad de que, si una persona escogida al azar ha suspendido, sea mujer.

Resolución Se pide $p\left(\frac{M}{A^c}\right) = \frac{p(M \cap A^c)}{p(A^c)} = \frac{23{,}6\%}{35{,}9\%} = \frac{23{,}6}{35{,}9} \cong 0{,}6574 = 65{,}74\%$

c) Ana dice que, si alguien ha aprobado, es más probable que sea mujer que varón; Benito dice que si alguien ha suspendido es más probable que sea mujer que varón. ¿Quién tiene razón?

Resolución

Comparemos p(V/A) con p(M/A), y también p(V/A^c) con p(M/A^c)

$$p\left(\frac{V}{A}\right) = \frac{p(V \cap A)}{p(A)} = \frac{28{,}7\%}{64{,}1\%} \cong 0,4477 = 44,77\% \;\; ; \;\; p\left(\frac{M}{A}\right) = \frac{p(M \cap A)}{p(A)} = \frac{35{,}4\%}{64{,}1\%} \cong 0,5523 = 55,23\%$$

$$p\left(\frac{V}{A^c}\right) = \frac{p(V \cap A^c)}{p(A^c)} = \frac{12{,}3\%}{35{,}9\%} \cong 0,3426 = 34,26\% \;\; ; \;\; p\left(\frac{M}{A^c}\right) = \frac{p(M \cap A^c)}{p(A^c)} = \frac{23{,}6\%}{35{,}9\%} \cong 0,6574 = 65,74\%$$

Los dos tienen razón

8.- Una persona lanza dos veces consecutivas un dado equilibrado, con las caras numeradas del 1 al 6.
a) Determine el número de resultados del espacio muestral de este experimento aleatorio.

Resolución Por el principio de multiplicación, el número de resultados es 6.6 = 36

b) Sea A el suceso "la mayor de las puntuaciones obtenidas es menor que 4" y B el suceso "la primera puntuación es impar". Halle la probabilidad de A y la de B.

Resolución

A = {1-3, 3-1, 2-3, 3-2, 3-3, 1-2, 2-1, 2-2, 1-1}, $p(A) = \frac{n^{\text{o}}\ de\ casos\ favorables}{n^{\text{o}}\ de\ casos\ posibles} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

B = {1-1, 1-2, ..., 1-6, 3-1, 3-2, ..., 3-6, 5-1, 5-2, ..., 5-6}, $p(B) = \frac{n^{\text{o}}\ de\ casos\ favorables}{n^{\text{o}}\ de\ casos\ posibles} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

c) ¿Son independientes A y B?

Resolución

A ∩ B = {1-3, 3-1, 3-2, 3-3, 1-2, 1-1}, $p(A \cap B) = \frac{n^{\text{o}}\ de\ casos\ favorables}{n^{\text{o}}\ de\ casos\ posibles} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$$p(A).\,p(B) = \frac{1}{4}\,.\,\frac{1}{2} = \frac{1}{8} \neq p(A \cap B) = \frac{1}{6} \Rightarrow \text{A y B son dependientes.}$$

9.- (prueba ordinaria) Un alumno va a la Facultad en autobús el 80% de los días y el resto en su coche. Cuando va en autobús llega tarde el 20% de las veces y cuando va en coche llega a tiempo sólo el 10% de las veces. Elegido un día cualquiera al azar, determine:
a) La probabilidad de que llegue a tiempo a clase y haya ido en autobús.

Resolución

Sean los sucesos A = "El alumno va en autobús" C = "El alumno va en coche" T = "El alumno llega tarde"

Construimos la siguiente tabla de porcentajes:

	A	C	Total
T	20% del 80% = 16%	20% – 2% = 18%	34%
T^c	80% – 16% = 64%	10% del 20% = 2%	66%

Total	80%	100% – 80% = 20%	100 %

Se pide $p(T^c \cap A) = 64\%$

b) La probabilidad de que llegue tarde a clase.

Resolución Se pide $p(T) = 34\%$

c) Si ha llegado a tiempo a clase, ¿cuál es la probabilidad de que no haya ido en autobús?

Resolución Se pide $p\left(\frac{C}{T^c}\right) = \frac{p(C \cap T^c)}{p(T^c)} = \frac{2\%}{66\%} \cong 0,0303 = 3,03\%$

10.- (prueba ordinaria) De las 180 personas que asisten a un congreso médico, 100 son mujeres. Observando las especialidades de los congresistas, vemos que de las 60 personas que son pediatras 20 son mujeres. Se elige al azar una persona asistente al congreso.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer y pediatra?

Resolución

Sean los sucesos M = "Ser mujer" P = "Ser pediatra" . Construimos la siguiente tabla de contingencia:

	M	M^c	Total
P	20	60 – 20 = 40	60
P^c	100 – 20 = 80	80 – 40 = 40	180 – 60 = 120
Total	100	180 – 100 = 80	180

Se pide $p(M \cap P) = \frac{20}{180} = \frac{1}{9} \cong 0,1111 = 11,11\%$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea hombre ni sea pediatra?

Resolución Se pide $p(M \cap P^c) = \frac{80}{180} = \frac{4}{9} \cong 0,4444 = 44,44\%$

c) ¿Cuál es la probabilidad de que sea pediatra?

Resolución Se pide $p(P) = \frac{60}{180} = \frac{1}{3} \cong 0,3333 = 33,33\%$

11.- En el experimento aleatorio consistente en lanzar un dado equilibrado con las caras numeradas del 1 al 6 y observar el resultado se consideran los siguientes sucesos:

A: "obtener un número mayor que 4", B: "obtener un número par".

a) Escriba los elementos de cada uno de los siguientes sucesos: A ; B ; $A^c \cup B$; $A \cap B^c$; $(A \cap B)^c$.

Resolución $A = \{5, 6\}$ $B = \{2, 4, 6\}$ $A^c \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ $A \cap B^c = \{5\}$ $(A \cap B)^c = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

b) Calcule las probabilidades $p(A^c \cap B^c)$ y $p(A^c \cup B^c)$.

Resolución

Observemos que en el experimento aleatorio hay 6 casos posibles.

$A^c \cap B^c = \{1, 2, 3, 4\} \cap \{1, 3, 5\} = \{1, 3\}$, $p(A^c \cap B^c) = \frac{nº\ de\ casos\ favorables}{nº\ de\ casos\ posibles} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$A^c \cup B^c = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{1, 3, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $p(A^c \cup B^c) = \frac{nº\ de\ casos\ favorables}{nº\ de\ casos\ posibles} = \frac{5}{6}$

12.- Una fábrica posee un sistema de alarma contra robos. Por estudios previos a la instalación del

----

sistema se sabe que la probabilidad de que un día se produzca un robo en la fábrica es 0,08.
Las indicaciones técnicas del fabricante de la alarma dicen que la probabilidad de que suene si se ha producido un robo es 0,98, y de que suene si no ha habido robo es 0,03.
a) En un día cualquiera calcule la probabilidad de que no suene la alarma.

Resolución

Sean los sucesos R = "Se produce robo" A = "Suena la alarma"

Construimos la siguiente tabla de porcentajes (corresponden a las respectivas probabilidades):

	R	R^c	Total
A	98% del 8% = 7,84%	3% del 92% = 2,76%	10,6 %
A^c	8% – 7,84% = 0,16%	92% – 2,76% = 89,24%	89,4 %
Total	8%	100% – 8% = 92%	100%

Se pide $p(A^c) = 89,4\% = 0,894$

b) Si suena la alarma, ¿cuál es la probabilidad de que no sea debido a un robo?

Resolución Se pide $p\left(\frac{R^c}{A}\right) = \frac{p(R^c \cap A)}{p(A)} = \frac{2,76\%}{10,6\%} \cong 0,2604$