MAT.9.1.4. GERÇEK SAYILARIN İŞLEM ÖZELLİKLERİNİ CEBİRSEL OLARAK İFADE ETME

ÖĞRENME REHBERİ (9. SINIF MATEMATİK)

Sevgili Öğrenciler,

Matematik dersinde sayılarla yaptığımız işlemlerin arkasındaki evrensel kuralları cebirsel sembollerle ifade edeceğimiz heyecan verici bir aşamaya geldik! Günlük hayatta yaptığımız hesaplamalardan mühendislikteki alan tasarımlarına kadar pek çok alanda kullandığımız toplama ve çarpma işlemlerinin temel özelliklerini cebirsel ifadelere genelliyoruz.

Bu öğrenme rehberi, Türkiye Yüzyılı Maarif Modeli çerçevesinde, Gerçek Sayıların İşlem Özelliklerini Cebirsel Olarak İfade Etme konusunu adım adım keşfetmeniz, mantığını kavramanız, sembolik dille matematiksel önermeler kurmanız ve cebirsel özdeşlikleri geometrik alan modelleriyle doğrulamanız için özel olarak hazırlanmıştır.

1. BÖLÜM: KAVRAMSAL ÇERÇEVE VE PEDAGOJİK ADIMLAMA

Konuyu en küçük anlamlı parçalarına ayırarak gözlemden analize, çıkarımdan değerlendirmeye uzanan bir akışla adım adım inceliyoruz.

1. Adım: Gözlem - Sayısal İşlemlerden Sembolik Dile Geçiş
Günlük hayatta alışveriş yaparken veya nesneleri sayarken sayısal işlemler gerçekleştiririz. Örneğin bir dikdörtgenin çevresini hesaplarken kenar uzunluklarını ikişer kez toplayabilir ya da önce iki farklı kenarı toplayıp sonucu iki ile çarpabiliriz. Sayısal örneklerde gördüğümüz bu kuralı genel bir biçimde ifade etmek için harflerden (değişkenlerden) ve sembollerden yararlanırız. Böylece belirli sayılara bağlı kalmadan, tüm gerçek sayılar için geçerli olan evrensel kurallara ulaşırız.

2. Adım: Analiz - Sembolik Dil, Önermeler ve Bağlaçlar
Matematiksel düşüncelerimizi net ve doğru bir şekilde aktarabilmek için sembolik mantık dilini kullanırız. Doğru ya da yanlış kesin bir hüküm bildiren ifadelere önerme adı verilir. Önermeleri birbirine bağlamak için 've' ($\wedge$), 'veya' ($\vee$), 'ya da' ($\veebar$), 'ise' ($\Rightarrow$) ve 'ancak ve ancak' ($\Leftrightarrow$) bağlaçlarından yararlanırız. Ayrıca 'her' ($\forall$) evrensel niceleyicisi belirtilen kümedeki tüm elemanlar için kuralın sağlandığını, 'bazı' ($\exists$) varlıksal niceleyicisi ise en az bir elemanın bu kuralı sağladığını gösterir.

3. Adım: Çıkarım - Gerçek Sayıların İşlem Özelliklerinin Genellenmesi
Toplama ve çarpma işlemlerinin sayısal dünyadaki özellikleri cebirsel ifadelere analojik akıl yürütme yöntemiyle aktarılır. Sayıların yer değiştirmesi sonucu değiştirmez (değişme özelliği: $a + b = b + a$ ve $a \cdot b = b \cdot a$). Elemanların gruplanma sırası işlem sonucunu etkilemez (birleşme özelliği: $(a + b) + c = a + (b + c)$). Çarpma işleminin toplama ve çıkarma üzerine dağılma özelliği vardır ($a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$). Toplamanın birim elemanı 0, çarpmanın birim elemanı 1'dir. Bir elemanın toplamaya göre tersi zıt

işaretlisidir (-a), sıfırdan farklı bir elemanın çarpmaya göre tersi ise çarpmaya göre tersidir (1/a). Sıfır sayısı çarpma işleminde yutan elemandır.

4. Adım: Gözlem - Cebirsel Özdeşlikler ve Alan Modelleri
İçerdiği değişkenlere verilecek tüm gerçek sayı değerleri için sağlanan eşitliklere özdeşlik denir. Özdeşlikleri ezberlemek yerine kare ve dikdörtgenlerin alanlarından oluşan geometrik modellerle doğrulayabiliriz. Kenar uzunluğu (a + b) olan bir karenin alanı $(a + b)^2$ eşittir. Bu kareyi parçalara ayırdığımızda alanı a^2, iki adet ab dikdörtgeni ve b^2 karesinin toplamına eşit olur. Böylece iki terimin toplamının karesi özdeşliği cebirsel olarak ifade edilir.

5. Adım: Analiz - Farkın Karesi ve Kareler Farkı Özdeşlikleri
Benzer şekilde kenar uzunluğu (a - b) olan karesel bölgenin alanı incelendiğinde iki terimin farkının karesi özdeşliği $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ olarak bulunur. İki terimin karelerinin farkı özdeşliğinde ise $a^2 - b^2$ ifadesinin bir kenarı (a - b) ve diğer kenarı (a + b) olan bir dikdörtgenin alanına eşit olduğu görülür: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Bu özdeşlik cebirsel ifadeleri çarpanlarına ayırmada en temel araçlarımızdan biridir.

6. Adım: Çıkarım - Çarpanlara Ayırma Yöntemleri
Cebirsel ifadeleri daha sade hale getirmek veya denklemleri çözebilmek için çarpanlarına ayırırız. İlk olarak ifadedeki her terimde bulunan ortak çarpanlar parantez dışına alınır (ortak çarpan parantezine alma). Ardından iki terimin kareleri farkı veya tam kare özdeşliklerinden yararlanılarak ifade çarpım biçimine dönüştürülür.

7. Adım: Değerlendirme - Gerçek Yaşam Problemleri ve Bütçe Tasarrufu
Cebirsel özdeşlikler günlük yaşamda, mimarlıkta ve peyzaj düzenlemelerinde pratik hesaplama ve bütçe tasarrufu sağlar. Örneğin kenar uzunluğu 15,75 metre olan karesel bir bahçenin merkezindeki karesel bölgeye çim, geriye kalan bölgeye ise seramik kaplatacak olan Deniz Hanım, alanı hesaplarken iki kare farkı özdeşliğini kullandığında küsüratlı karesel işlemler yerine pratik bir şekilde çarpma yaparak ihtiyaç duyulan seramik miktarını tam olarak hesaplar. Bu durum bütçe ve zaman tasarrufu sağlar.

2. BÖLÜM: BİLGİ TASARIMI VE GÖRSELLEŞTİRME

Bu bölümde konunun temel cebirsel kurallarını, sembolik mantık gösterimlerini ve özdeşlik ilkelerini özet halinde inceleyebilirsiniz.

Sembolik Dil ve Mantık Sembolleri
Her (Evrensel Niceleyici): $\forall$ sembolü ile gösterilir ve belirtilen kümedeki tüm elemanlar için geçerliliği ifade eder.
Bazı (Varlıksal Niceleyici): $\exists$ sembolü ile gösterilir ve kümede en az bir elemanın sağlandığını gösterir.
Mantık Bağlaçları: Ve ($\wedge$), Veya ($\vee$), Ya da ($\veebar$), İse ($\Rightarrow$), Ancak ve Ancak ($\Leftrightarrow$) bağlaçları önermeleri bağlar.

Gerçek Sayıların İşlem Özellikleri Sembolik Gösterimleri
Değişme Özelliği: $\forall\ a, b \in \mathbb{R}$ için $a + b = b + a$ ve $a \cdot b = b \cdot a$
Birleşme Özelliği: $\forall\ a, b, c \in \mathbb{R}$ için $(a + b) + c = a + (b + c)$ ve $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Dağılma Özelliği: $\forall\ a, b, c \in \mathbb{R}$ için $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
Birim (Etkisiz) Eleman Özelliği: $\forall\ a \in \mathbb{R}$ için $a + 0 = a$ (Toplama birimi 0), $a \cdot 1 = a$ (Çarpma birimi 1)

Ters Eleman Özelliği: $\forall$ a $\in \mathbb{R}$ için a + (-a) = 0 ve $\forall$ a $\in \mathbb{R}$ - {0} için a · (1/a) = 1
Yutan Eleman Özelliği: $\forall$ a $\in \mathbb{R}$ için a · 0 = 0

Temel Cebirsel Özdeşlikler
İki Terimin Toplamının Karesi: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
İki Terimin Farkının Karesi: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
İki Terimin Karelerinin Farkı: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

3. BÖLÜM: MİNİ SINAV (ÖZ DEĞERLENDİRME)

Öğrendiklerinizi test etmek için aşağıdaki soruları yanıtlayınız.

A) Boşluk Doldurma Soruları

1. İçerdiği değişkenlere verilecek tüm gerçek sayı değerleri için sağlanan eşitliklere ..... denir.

2. Belirtilen kümedeki 'tüm' elemanların sağlandığını ifade eden 'her' sözcüğünün sembolik karşılığı ..... niceleyicisidir.

3. İki terimin karelerinin farkı olan $a^2 - b^2$ ifadesinin çarpanlarına ayrılmış biçimi ..... şeklindedir.

4. Gerçek sayılarda çarpma işleminin toplama işlemi üzerine ..... özelliği bulunmaktadır.

5. Sıfırdan farklı bir a gerçek sayısının çarpma işlemine göre tersi ..... ifadesine eşittir.

B) Doğru / Yanlış Soruları

1. ( ) Gerçek sayılarda toplama işleminin birim (etkisiz) elemanı 1 sayısıdır.

2. ( ) $(a - b)^2$ ifadesinin açılımı $a^2 - 2ab + b^2$ şeklindedir.

3. ( ) Çarpma işleminde 0 sayısı yutan elemandır ve her a gerçek sayısı için a · 0 = 0 olur.

4. ( ) 'Bazı' sözcüğü en az bir elemanın kuralı sağladığını gösterir ve $\forall$ sembolü ile temsil edilir.

5. ( ) Cebirsel ifadeleri çarpanlarına ayırırken yapılan ilk adım varsa ortak çarpan parantezine almaktır.

C) Kısa Cevaplı Sorular

1. Bir kenar uzunluğu (a + b) birim olan karesel bölgenin alanını cebirsel olarak ifade edip özdeşliğini yazınız.

2. 2a + 2b ifadesini ortak çarpan parantezine alarak çarpma işleminin dağılma özelliğini gösteriniz.

3. Deniz Hanım kenar uzunluğu 15,75 metre olan karesel bahçenin ortasındaki karesel bölgeyi çıkarırken neden iki kare farkı özdeşliğini kullanmıştır?

4. Sembolik mantıkta 'her' ve 'bazı' niceleyicileri arasındaki farkı kısaca açıklayınız.

5. a · b = 0 ise a = 0 veya b = 0 çıkarımını sağlayan gerçek sayıların işlem özelliğini belirtiniz.

🔑 CEVAP ANAHTARI

A) Boşluk Doldurma Cevapları:
1. Özdeşlik
2. $\forall$ (evrensel)
3. (a - b)(a + b)

4. dağılma
5. 1/a

B) Doğru / Yanlış Cevapları:
1. Yanlış (Toplama işleminin etkisiz elemanı 0'dır, 1 çarpmanın etkisiz elemanıdır).
2. Doğru ($(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ şeklindedir).
3. Doğru (Sıfır ile çarpılan her gerçek sayı sıfıra eşit olur).
4. Yanlış ('Bazı' sözcüğü varlıksal niceleyicidir ve $\exists$ sembolü ile gösterilir).
5. Doğru (Çarpanlara ayırmada öncelikle ortak çarpan olup olmadığı kontrol edilir).

C) Kısa Cevaplı Soruların Cevapları:
1. Kenarı (a + b) olan karenin alanı $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ birimkaredir.
2. $2a + 2b = 2(a + b)$ şeklinde yazılır. Bu durum 2 katsayısının toplama üzerine dağılma özelliğinin tersine uygulanmasıdır.
3. Küsüratlı sayıların karesini almak yerine $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ özdeşliğini kullanarak pratik toplama ve çıkarma ile çarpma işlemi yapmış, bütçe ve zaman tasarrufu sağlamıştır.
4. 'Her' ($\forall$) niceleyicisi kümedeki istisnasız tüm elemanların koşulu sağladığını, 'bazı' ($\exists$) niceleyicisi ise en az bir elemanın sağladığını ifade eder.
5. Çarpma işleminde yutan eleman (0) özelliğidir. İki sayının çarpımı 0 ise çarpanlardan en az biri 0 olmak zorundadır.

4. BÖLÜM: DERİNLEŞME VE ARAŞTIRMA SORULARI

Aşağıdaki sorular elinizdeki kaynakları detaylıca inceleyerek kendi cümlelerinizle yanıtlamanız için hazırlanmıştır. Cevaplar sunulmamıştır; araştırmacı kimliğinizi ortaya çıkarınız!

1. Günlük hayattaki sayısal işlem özelliklerinden hareketle cebirsel genellemelere ulaşmada analojik akıl yürütmenin rolünü ve önemini açıklayınız.

2. Matematiksel ifadelerin sembolik dille (niceleyiciler ve mantık bağlaçları) ifade edilmesinin, bilimin evrenselliği ve kesinliği üzerindeki etkilerini tartışınız.

3. Cebirsel özdeşliklerin geometrik alan modelleriyle gösterilmesinin, kavramsal anlama ve zihinde görselleştirme süreçlerine katkısını değerlendiriniz.

4. Deniz Hanım'ın karesel bahçe düzenleme örneğinde olduğu gibi, cebirsel özdeşlikleri ve çarpanlara ayırma yöntemlerini bilmenin finansal okuryazarlık, bütçe tasarrufu ve kaynak yönetimi açısından sağladığı avantajları inceleyiniz.

5. Esin Öğretmen'in tahtaya çizdiği iki farklı dikdörtgenin çevre bağıntılarından hareketle, ortak çarpan parantezine alma ve dağılma özelliğinin mühendislik tasarımlarındaki uygulamalarını araştırınız.

5. BÖLÜM: FARKLILAŞTIRMA - EK ÖĞRENME

Destekleme Adımı (Temel Seviyeyi Güçlendirme):
Cebirsel özdeşlikleri kavramakta zorlanan öğrenciler için renkli kartonlardan kesilmiş cebir karoları (kare ve dikdörtgen parçalar) kullanılır. Öğrenciler $(a + b)^2$ ve $a^2 - b^2$ modellerini somut karoları birleştirip

çıkararak elleriyle inşa ederler. Sembolik dil dönüşümlerinde ise sözel ifadeler ile sembolik kartlar eşleştirme oyunu ile pekiştirilir.

Zenginleştirme Adımı (İleri Düzey Araştırma ve Sosyal Bilimler / Mühendislik Bağlantısı):
İleri düzey öğrenciler için şehirlerdeki nüfus yoğunluğu hesaplamaları ve mimarlıkta alan verimliliği konuları incelenir. Öğrenciler aydınlatma ürünlerinin enerji verimliliği katsayıları (η) veya inşaat sektöründeki seramik/parke firesini en aza indiren iki kare farkı özdeşliği hesaplamalarını içeren kısa bir teknik proje raporu hazırlar.

6. BÖLÜM: TERİMLER SÖZLÜĞÜ

Önerme: Doğru ya da yanlış kesin bir hüküm bildiren ifadelere denir.

Evrensel Niceleyici (∀): Belirtilen kümedeki tüm elemanların sağlandığını gösteren 'her' sembolüdür.

Varlıksal Niceleyici (∃): Belirtilen kümede en az bir elemanın sağlandığını gösteren 'bazı' sembolüdür.

Değişme Özelliği: İşleme giren elemanların yerleri değiştiğinde sonucun değişmemesidir ($a + b = b + a$).

Birleşme Özelliği: Üç veya daha fazla eleman işleme girdiğinde gruplama sırasının sonucu etkilememesidir.

Dağılma Özelliği: Çarpma işleminin toplama veya çıkarma işlemi üzerine dağıtılabilmesidir ($a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$).

Birim (Etkisiz) Eleman: İşleme girdiğinde sonucu değiştirmeyen elemandır (Toplama için 0, çarpma için 1).

Ters Eleman: İşleme girdiğinde birim elemanı veren elemandır (a'nın toplamaya göre tersi -a, çarpmaya göre tersi 1/a'dır).

Yutan Eleman: Çarpma işleminde sonucu sıfır yapan 0 elemanıdır.

Özdeşlik: İçerdiği değişkenlere verilecek tüm gerçek sayı değerleri için sağlanan eşitliklerdir.

Çarpanlara Ayırma: Bir cebirsel ifadeyi iki veya daha fazla cebirsel ifadenin çarpımı biçiminde yazma işlemidir.

Analojik Akıl Yürütme: Özel durumlardaki veya sayısal örneklerdeki benzerliklerden hareketle genel cebirsel kurallara ulaşma sürecidir.

Öğretmen İmecesi Matematik Zümresi tarafından Hazırlanmıştır. ogretmenimecesi.com