

Використання властивостей до розв'язання деяких задач.

Інваріант. Напівінваріант.

Глушик Олександр Якович, учитель
Катеринопільської ЗОШ І- ІІІ ступенів №2
Катеринопільської районної ради Черкаської області

Інваріант (*рос.* инвариант, *англ.* invariant, *нім.* Invariante) — термін, що використовується в математиці та фізиці, а також в програмуванні. *Ін* - внутрішнє, *варіант* - взятий за ознаками (критеріями, значеннями, властивостями чи сумою властивостей) параметризований, маркований параметр, чи сукупність параметрів, що означає щось незмінне в полі (діапазоні, просторі, масиві, множині, послідовності) значень. За звичай це статистичний максимум чи константа в полі значень. Наприклад нуль за Цельсієм чи Фаренгейтом, одна атмосфера в умовах планети Земля. Це міра природніх калібрів чи статистичних оцінок взятих за маркери описання чи обрахунків у фізиці чи математиці. Складає основу метрології, як методологія каліброваних та відносних мір. Характерна особливість - позначення в шкалах каліброваних значень для екстраполяції на інші діапазони. Тому інваріант є саме визначення стабільна характеристика, показник, значення в послідовності чи на шкалі визнаний константою, тобто оптимум в варіабельності значень (станів, характеристик, сукупності властивостей, тощо). Саме тому при моделюванні і математичних обрахунках інваріанти є базовими константами (мірою, маркерами) розрахунків та перетворень.

Інваріант – число, вираз тощо, які пов'язані з деяким математичним об'єктом і не змінюються при певних перетвореннях. Наприклад, віддаль між двома точками площини є інваріантом при перенесенні або повертанні системи координат; площа будь-якої фігури, кут між двома прямими —

інваріанти руху. Похідний термін — інваріантність — властивість системи не змінювати своїх характеристик при перетвореннях. Існує ще один термін напівінваріант.

Напівінваріант — величина, що змінюється тільки в один бік (тобто яка може тільки збільшуватися або тільки зменшуватися). Поняття напівінваріанта часто використовується при доведеннях зупинки процесів.

Інваріант - число, вираз тощо, які пов'язані з деяким математичним об'єктом і не змінюються при певних перетвореннях. Наприклад, віддаль між двома точками площини є інваріантом при перенесенні або повертанні системи координат; площа будь-якої фігури, кут між двома прямими - інваріанти руху. Похідний термін - інваріантність - властивість системи не змінювати своїх характеристик при перетвореннях.

КЛАСИФІКАЦІЯ ЗАДАЧ НА ІНВАРІАНТИ

Серед розмаїття математичних задач є такі, які можна об'єднати під рубрикою «Задачі на відображення». Їх загальна постановка формулюється так: «Є множина A елементів $a, b, c, \dots$ довільної природи і множина X споріднених елементів $x, y, z, \dots$ а також відображення, яке перетворює елементи множини A у подібні їм елементи. Чи можна, вдаючись до неодноразового перетворення елементів множини A за допомогою відображення, одержати той чи інший елемент з множини X ? Відповідь у цих задачах коротка — «так» або «ні». Звісно, задача вважається розв'язаною, якщо відповідь обґрунтована. Для обґрунтування заперечення часто використовують інваріанти: величини, співвідношення, відповідності тощо - все те, що не змінюється у процесі виконання заданих у задачі перетворень.

Текстові задачі на інваріанти. Якщо заданий елемент або елементи з множини X не відповідають цим величинам, не володіють співвідношеннями, не справджують відповідності, то ці елементи не можна дістати в результаті перетворення заданих елементів множини A . Збереження інваріантності є

лише необхідною умовою досягнення позитивного результату. Інваріанти дають підставу тільки для негативної відповіді. Визначивши інваріант деякого процесу в багатьох випадках можна з'ясувати питання про можливість певного результату цього процесу. При цьому рівність інваріанта на початку та наприкінці процесу ще не забезпечує цієї можливості. Тому, як правило, в таких задачах відповідь на це запитання негативна. У ролі інваріанта може застосовуватись парність, залишок від ділення на деяке число та інше. Поняття інваріантів, їх вибір та застосування розглянемо під час розв'язування задач.

1. Є квадратна таблиця 10×10 , в клітини якої в послідовному порядку вписані натуральні числа від 1 до 100: у перший рядок - числа від 1 до 10, в другу - від 11 до 20 і т. д. Доведіть, що сума S будь-яких 10 чисел таблиці, з яких ніякі два не стоять в одному рядку і ніякі два не стоять в одному стовпці, постійна. Знайдіть цю суму.

Розв'язок. Позначимо доданок вихідної суми S з першого рядка через a_1 , з другої - через $10 + a_2$, з третьої - через $20 + a_3$ і т. д., нарешті, з десятої - через $90 + a_{10}$. Тут кожне з натуральних чисел $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ укладено в межах від 1 до 10, причому ці числа попарно різні, оскільки, якщо б, наприклад, $a_1 = a_2$, то числа a_1 і $10 + a_2$ стояли б в одному стовпці таблиці. Отримуємо: $S = a_1 + (10 + a_2) + (20 + a_3) + \dots + (90 + a_{10}) = (10 + 20 + \dots + 90) + (a_1 + a_2 + \dots + a_{10}) = 450 + (a_1 + a_2 + \dots + a_{10})$. Оскільки числа $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ попарно різні і приймають всі цілі значення від 1 до 10, то кожне з натуральних чисел від 1 до 10 входить в суму $a_1 + a_2 + \dots + a_{10}$ як доданка рівно один раз. Отже, $a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = 1 + 2 + 3 + \dots + 10 = 55$, $S = 450 + 55 = 505$. Сума S і є інваріантом: якщо в ній одні складові замінити іншими, але так, щоб всі складові нової суми стояли в таблиці в різних рядках і в різних стовпцях, сума візьме, теж саме значення. Відповідь: 505.

2. Аркуш паперу розірвали на 5 шматків, деякі з цих шматків розірвали на 5 частин, а деякі з цих нових частин розірвали ще на 5 частин і т. д. Чи можна таким шляхом отримати 1994 шматка паперу? А 1997?

Розв'язок. При кожному розриванні листа або одного шматка паперу на 5 частин загальне число шматків збільшується на 4. Тому число шматків паперу на кожному кроці може мати тільки вид $4k + 1$ (k -натуральне число). Цей вислів і є інваріантом.

3. Кожне натуральне число від 1 до 50000 замінюють числом рівним сумі його цифр. З отриманими цифрами проробляють ту ж операцію, і так надходять до тих пір, поки всі числа не стануть однозначними. Скільки разів серед цих однозначних чисел зустрінеться кожне з цілих чисел від 0 до 8?

Розв'язок. Зазначені однозначні числа в послідовному порядку такі: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 0, Ця закономірність зберігається і далі. Справді, при заміні натурального числа сумою його цифр залишок від ділення числа на 9 залишається незмінним, тому при переході від кожного натурального числа до наступного залишок від ділення числа на 9 збільшується на 1 або перескакує від 8 до 0. Для того щоб дізнатися, скільки таких груп цифр по 9 цифр у кожній, розділимо 50000 на 9 із залишком: $50000 = \text{вересня } 5555 + 5$. Отже, таких груп 5555. Ще одну, неповну групу утворюють останні 5 цифр: 1, 2, 3, 4, 5. Відповідь: 1, 2, 3, 4, 5 - по 5556 раз, 6, 7, 8, 0 - 5555 разів.

4. Круг розбитий на 6 рівних секторів, в яких розставлені цифри 0, 1, 2, 0, 2, 1 (у зазначеному порядку). Дозволяється за один хід одночасно додавати одне і те ж число до двох що стоять поруч числам. Чи можна за кілька таких ходів домогтися того, щоб всі 6 чисел, що стоять в секторах були рівні?

Розв'язок. Нехай на деякому кроку в секторах опинилися в послідовному порядку числа $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$. Складемо таку суму: $S = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6$. Після кожного ходу вона не змінюється, оскільки кожна з різновидів $a_1 - a_2, a_3 - a_4, a_5 - a_6$ при збільшенні зменшуваного і від'ємника на одне і те ж число зберігає своє значення, отже, вона є інваріантом. Але в початковому положенні $S = 0 - 1 + 2 - 0 + 2 - 1 = 2$, а в кінцевому, коли кожне з шести чисел дорівнює одному й тому числу, $S = 0$. Тому зробити рівними всі шість чисел не можна.

Відповідь: не можна.

5. На диво-яблуні ростуть банани та ананаси. За один раз дозволяється зірвати з неї два плоди. Якщо зірвати два банани або два ананаса, то виросте ще один ананас, а якщо зірвати один банан і один ананас, то виросте один банан. У результаті залишився один плід. Який це плід, якщо відомо, скільки бананів і ананасів росло спочатку?

Розв'язок. Парність числа бананів не змінюється, якщо число бананів було парним, то залишився плід ананас, якщо число бананів було непарним, то - банан.

6. Доведіть, що у грі «15» не можна поміняти місцями фішки «15» і «14», залишивши інші на місці.

Розв'язок. Розглянемо «порожнє поле» як окрему фішку. Ми можемо тільки міняти «порожню фішку» з сусідніми. Оскільки порожня фішка повинна потрапити на вихідне поле, число наших операцій має бути парним. Тому ми можемо отримати конфігурації, що відрізняються від початкової тільки парним числом перестановок.

7. На 44 деревах, розташованих по колу, сиділи по веселому Чижу. Час від часу якісь два чижа перелітають на сусіднє дерево - один за годинниковою стрілкою, а інший - проти. Чи можуть все чижі зібратися на одному дереві?

Розв'язок. Пронумеруємо дерева по колу з 1-го по 44-е. Сума номерів дерев, на яких сидять чижі або не змінюється, або зменшується на 44, або збільшується на 44. Тим самим, залишок від ділення цієї суми номерів на 44 не змінюється. Спочатку цей залишок дорівнює 22, а якщо все чижі сядуть на одне дерево, то він буде дорівнює нулю. Тому чижі не зможуть зібратися на одному дереві.

8. В одній вершині куба написали число 1, в інших нулі. Можна додавати по 1 до чисел, які записані на кінцях довільного ребра. Чи можна добитися того, щоб всі числа ділились на 3 ?

Розв'язання. Пофарбуємо вершини в шаховому порядку. Після цього сума чисел в білих вершинах завжди буде відрізнятись на 1 від суми цифр в чорних вершинах, бо до тих і других кожен раз додається 1.

Відповідь: не можна.

Задачі на напівінваріанти.

1. По колу розставлені m чисел. Якщо підряд стоять числа a, b, c, d і при цьому $(a-d)(b-c) > 0$, то числа a і c дозволяється міняти місцями. Доведіть, що після кількох таких дій ми не зможемо зробити жодної перестановки.

Розв'язання

Нерівність $(a-d)(b-c) > 0$ еквівалентна нерівності $ab+bc+cd > ac+cb+bd$.

Розглянемо суму всіх попарних добутків сусідніх чисел. Вона, як ми бачимо з останньої нерівності, підчас виконання нашої дії щоразу зменшується. Ця сума може набувати лише скінченної кількості значень, оскільки існує лише скінченна кількість розстановок даних чисел по колу. Ми зможемо виконати нашу операцію не більше разів, ніж існує розстановок з сумою, меншою, ніж у початкової розстановки.

2. У парламенті в кожного його члена не більше ніж три вороги. Доведіть, що парламент можна розбити на дві палати так, щоб у кожного депутата в одній з них палаті був не більше ніж один ворог.

Розв'язання

Розіб'ємо парламент на дві палати довільним чином. Якщо є депутат, який має у своїй палаті не менше ніж два вороги, переведемо його в іншу палату. Якщо ще є такий депутат, і його переведемо, і так далі. Доведемо, що цей процес скінченний. Позначимо умовно депутатів точками на площині і з'єднаємо відрізками всі пари ворогів, які належать одній палаті. За такого переведення не менше ніж два відрізки витираються і не більше ніж один з'являється. А тому кількість їх зменшується. А з самого початку кількість відрізків була скінченною.

3. На площині дано n точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій, і n прямих, жодні дві з яких не паралельні. Доведіть, що з цих точок можна опустити перпендикуляри, які попарно не перетинаються, на ці прямі так, щоб на кожну пряму був опущений рівно один

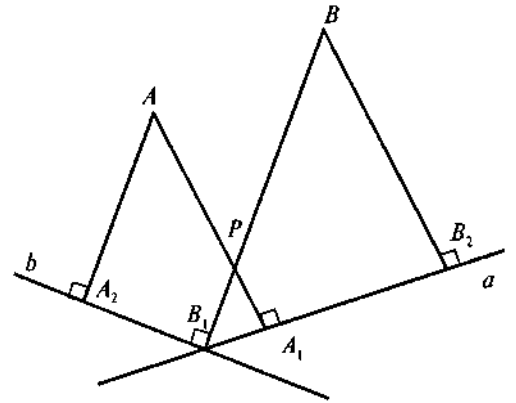
перпендикуляр.

Розв'язання

Опустимо перпендикуляри з даних точок на дані прямі довільно (по одному на кожну пряму). Якщо жодні два з них не перетинаються, то вимогу задачі виконано.

В іншому випадку розглянемо два перпендикуляри, що перетинаються, AA_1 і BB_1 , опущені з точок A і B на прямі a і b відповідно. Нехай P — точка їх перетину. Замінімо тепер

перпендикуляри AA_1 і BB_1 , перпендикулярами AA_2 і BB_2 , опущеними на прямі b і a — відповідно. Доведемо, що при цьому сума довжин перпендикулярів зменшиться. Справді, $AA_2 < AP + PB$, $BB_2 < BP + PA_1$.



Додамо ці нерівності і дістанемо $AA_2 + BB_2 < AA_1 + BB_1$. Якщо тепер знову є два перпендикуляри, що перетинаються, то зробимо так само, як і на попередньому кроці і т. д. Тоді або на якомусь кроці в нас усі перпендикуляри попарно не будуть перетинатися, або сума довжин перпендикулярів буде мінімально можливою (оскільки ця сума може набувати лише скінченної кількості значень). Ця ситуація і є шуканою, бо якби ми застосували нашу операцію ще раз, то сума довжин усіх перпендикулярів ще зменшилася б.

Задача ¹

На вішалці висять 20 хусток. 17 дівчаток по черзі підходять до вішалки і або знімають, або вішають хустку. Чи може після відходу дівчаток залишитися рівно 10 хусток?

Розв'язання. Після підходу першої дівчинки кількість хусток, що залишилася, або 19, або 21 (непарна кількість); після підходу другої дівчинки - або 18, або 20, або 22 (парна кількість); після підходу третьої дівчинки - або 17, або 21, або 23, або 19 (непарна кількість). Після підходу 17 дівчинки залишається непарна кількість хусток. Виходить протиріччя. Значить, 10 хусток залишитися не може.

Задача ²

Додайте цифри 0,1,2,3, ..., 9 по колу так, щоб сума всіх різниць (по модулю) між сусідніми числами виявилася дорівнює 25.

Розв'язання. Нехай задані числа якимось чином проставлені по колу і a, b, c, d - чотири сусідніх числа. Поміняємо місцями числа a і c . Досліджуємо, як змінилася сума розглянутих в задачі різниць. Для розстановки a, b, c, d вона дорівнює, а для розстановки a, c, b, d - де - сума різниць для залишилися чисел. Зміна загальної суми Якщо b і c мають однакову парність, то буде являти собою суму двох парних чисел, а якщо вони різної парності, то є сумою двох непарних чисел, але в кожному разі парне. Отже, ми отримали інваріант - при перестановці двох сусідніх чисел парність суми різниць не зміниться. Будь-яку розстановку заданих чисел по колу можна отримати, переставляючи кілька разів сусідні числа, тим самим ми довели, що для будь розстановки заданих чисел сума різниць має одну і ту ж парність. Розглянувши довільну розстановку чисел (від одного до дев'яти), ми отримаємо, що сума різниць парна, і, значить, необхідна в завданні розстановка неможлива.

Задача ³

У трьох клітинках квадратної таблиці 4×4 стоять знаки «-», а в інших — знаки «+»:

+	+	+	+
+	+	-	+
+	-	+	+
+	+	-	+

Дозволяється одночасно міняти знаки на протилежні в усіх клітинках, розташованих в одному рядку або в одному стовпці. Довести, що, скільки б ми не проводили таких змін знаків, нам не вдасться одержати таблицю з одних знаків «+».

Розв'язання. Замінімо знак «+» на число 1, знак «-» на число -1 і покажемо, що, скільки б ми не проводили змін знаків чисел рядків або стовпців, нам не вдасться одержати таблицю з одних одиниць.

1	1	1	1
1	1	-1	1
1	-1	1	1
1	1	-1	1

Якщо у рядку (стовпці) стоять числа a, b, c, d , то при зміні знаків добуток чисел рядка (стовпця) не змінюється, бо

$(-a)(-b)(-c)(-d) = abcd$. Тому при зміні знаків чисел одного рядка або стовпця не змінюється й добуток усіх чисел таблиці.

Спочатку маємо таблицю, в якій добуток усіх чисел дорівнює -1.

У таблиці з одних одиниць такий добуток дорівнює 1. Тому перехід до таблиці з одних одиниць неможливий.

Отже, перехід від заданої таблиці до таблиці з одних знаків «+» також неможливий.

Задача ⁴

Числова послідовність $a_1, a_2, a_3, \dots$, в якій $a_1=2$, $a_2=500$ та $a_3=2000$, при всіх натуральних $n \geq 2$ задовольняє умову

$$a_n + 2 + a_n + 1a_n + 1 + a_n - 1 = a_n + 1a_n - 1.$$

Довести, що всі члени цієї послідовності є натуральними числами, причому a_{2001} ділиться без остачі на 2^{2001} .

Розв'язання. Елементарними перетвореннями отримаємо, що при всіх натуральних $n \geq 2$ виконується рівність

$$a_n + 2a_n + 1 = a_n + 1a_n - 1, \text{ або } a_n + 2a_n + 1a_n = a_n + 1a_n - 1.$$

Отже, значення виразу $a_n + 1a_n - 1$ не залежить від n (є інваріантом), а тому

$$a_n + 2a_n + 1a_n = a_n + 1a_n a_n - 1 = \dots = a_3 a_2 a_1 = 2.$$

Отже, дана послідовність задовольняє рекурентне

співвідношення: $a_1 = 2$, $a_2 = 500$, $a_{n+1} = 2a_n a_n - 1$ при $n \geq 2$. Тому всі

члени послідовності є натуральними числами, причому для

будь-якого $n \geq 1$ число $a_n + 1a_n$ є парним. Враховуючи рівність

$$a_{2001} = a_{2001} a_{2000} \cdot a_{2000} a_{1999} \cdot \dots \cdot a_2 a_1 \cdot a_1,$$

отримуємо, що a_{2001} ділиться без остачі на 2^{2001} . ■

Література:

1. Вейль Г., Классические группы, их инварианты и представления, пер. с англ., М., 1947
2. Вороний О.М. Готуємось до олімпіади з математики. – Х.: Видавнича група «Основа», 2008. – Книга 1.
3. Болтянский В. Г., Виленкин Н. Я. Симметрия в алгебре, 2-е изд. М.: Наука, 2002.
4. Лейфура В.М., Мітельман І.М., Радченко В.М., Ясінський В.А. Математичні олімпіади школярів України: 1991–2000 рр. – Київ: Техніка, 2003. – 541 с.
5. Лейфура В. М., Мітельман І. М. Розв'язуємо разом. – Харків: Основа, 2003. – 144 с.
6. Мітельман І.М. Розфарбуємо клітчасту дошку. – Львів: Каменяр, 2001. – 48 с.

1. <http://school16.org/tvorcha-laboratoriya-vchitelya-sivachovoyi-nm>.

2. <http://matholymp.org.ua>