

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΕΤΑΡΤΗ 10 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2025
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι, αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 6

A2. Τι ονομάζουμε κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης f , ορισμένης σε ένα διάστημα Δ ;

Μονάδες 4

A3. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής (Θ.Μ.Τ.) διαφορικού λογισμού και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

Μονάδες 5

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Έστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$.

Αν

- η f είναι συνεχής στο $[a, b]$
- $f(a) \cdot f(b) < 0$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

β) Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ που διχοτομεί τις γωνίες $\hat{xOy}$ και $\hat{x'Oy'}$.

γ) Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$, $x \in [0, +\infty)$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

δ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$ τότε η σύνθεσή τους, $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 .

ε) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της f ως προς τον άξονα $y'y$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln x$, $x > 0$ και $g(x)=e^x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

B1. Να αποδείξετε ότι η σύνθεση της συνάρτησης g με τη συνάρτηση f είναι η συνάρτηση $(f \circ g)(x) = \ln(e^x + 1)$, $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 5

B2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f \circ g$ είναι αντιστρέψιμη (μονάδες 2) και (να βρείτε τη συνάρτηση $h = (f \circ g)^{-1}$ (μονάδες 4).

Μονάδες 6

Αν $h(x)=\ln(e^x - 1)$, $x > 0$ τότε:

B3. i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση h ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα (μονάδες 4).

ii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση h ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής (μονάδες 4)

Μονάδες 8

B4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφική παράστασης της συνάρτησης h .

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x^4}{4} + x^3 + \frac{x^2}{2} + x$, $x \in \mathbb{R}$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

Γ1. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 0$.

Μονάδες 4

Γ2. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του α ώστε η f να είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 7

Στα επόμενα ερωτήματα να θεωρήσετε ότι $\alpha = 3$.

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(f(x))}{\ln(f(x)-x)}$

Μονάδες 6

Γ4. Έστω E το εμβαδόν του τριγώνου $OA^{\Delta}B$ που ορίζουν τα σημεία $O(0,0)$, $A(x,0)$ και $B(x, f(x))$, με $x > 0$. Αν το x μεταβάλλεται με ρυθμό 2cm/sec , να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E , όταν $x = 2\text{cm}$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + \alpha x$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$. Για τη συνάρτηση f ισχύει ότι:

$$e^{f(x)-1} + x \geq \sqrt{x^2 + 1}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι:

- i) $f'(0) = -1$ (μονάδες 4) και
- ii) $\alpha = -1$ (μονάδες 2)

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ (μονάδες 3) και ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ (μονάδες 3).

Μονάδες 6

Δ3. Έστω F μια αρχική συνάρτηση της συνάρτησης f στο $\mathbb{R}$. Να λύσετε στο διάστημα $[0, \pi]$ την εξίσωση:

$$F(\eta\mu^2 x) + F(3\eta\mu^2 x) = 2F(2\eta\mu^2 x)$$

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^1 x \eta\mu(1 - f(x)) dx < \frac{7-4\sqrt{2}}{6}$$

Μονάδες 7