

LVIII Белорусская математическая олимпиада школьников

II этап

8 декабря 2007 года

8 класс

1. Если к данному двузначному числу один раз приписать цифру 3 спереди, а другой раз - цифру 8 сзади, то первый результат будет вдвое меньше второго. Найдите это число.
2. Маша задумала натуральное число и нашла его остатки при делении на 3, 6 и 9. Сумма этих остатков оказалась равна 15. Найдите остаток от деления задуманного числа на 18.
3. Пьер Ферма (1601 – 1665) полностью решил задачу о том, какие натуральные числа представимы в виде суммы двух квадратов натуральных чисел. Для этого ему, в частности, понадобилось следующее утверждение: если числа m и n представимы в виде суммы двух квадратов, то и $m \cdot n$ тоже представимо в виде суммы двух квадратов. Докажите это утверждение.
4. Самолет взлетел из города А в полдень и приземлился в городе В в 14 часов местного времени. В полночь он вылетел назад и приземлился в А, когда там было 6 часов утра. Сколько времени длился полет?
5. Докажите, что при любых значениях переменных истинно неравенство:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \geq \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}.$$