

CORRIGE MINES-PONTS PC II 2018

ELECTRONS ET ATOMES PAR L'EXPERIENCE

Corrigé rédigé par Marc STRUBEL (marc.strubel@wanadoo.fr), relu par Nicole ADLOFF (nicole.adloff0212@orange.fr).

Merci de me faire part de vos remarques et commentaires !
Ce corrigé peut être diffusé à vos élèves dès 2018.

I. Modèle classique de Thomson de l'atome :

Q1. Par symétrie et invariances : $\vec{E} = E(r) \cdot \vec{e}_r$

La surface de Gauss est une sphère de rayon r et de centre O $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} \cdot \vec{e}_r = E(r) \cdot 4\pi r^2$.

La charge intérieure à la sphère est $q_{\text{int}} = e \cdot r^3 / a^3$.

L'application du théorème de Gauss fournit :

$$\vec{E} = \frac{e \cdot r}{4\pi\epsilon_0 a^3} \cdot \vec{e}_r$$

La force exercée sur l'électron est $\vec{F} = -e\vec{E}$; on en déduit :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m a^3}}$$

Q2. La solution générale s'écrit :

$$r(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} m \cdot r_0^2 \cdot \omega_0^2 \cdot \sin^2(\omega_0 t)$$

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega_0^2 \cdot r^2 = \frac{1}{2} m \cdot r_0^2 \cdot \omega_0^2 \cdot \cos^2(\omega_0 t), \text{ d'où } E = \frac{1}{2} m \cdot r_0^2 \cdot \omega_0^2.$$

Q3. $E(t+dt) = E(t) - \langle P \rangle \cdot dt$ avec

$$\langle P \rangle = \frac{e^2 \omega_0^4 r_0^2}{12\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{e^2 \omega_0^2}{6\pi m \epsilon_0 c^3} E(t)$$

On en déduit $E(t) = E_0 \cdot \exp(-\Gamma t)$ avec :

$$\frac{1}{\Gamma} = \frac{6\pi m \epsilon_0 c^3}{e^2 \omega_0^2} = \frac{3\lambda^2 m \epsilon_0 c}{2\pi e^2} = 1,1 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

$$\text{On a donc : } \frac{1}{\Gamma} \gg T_o = \frac{\lambda}{c} = 2 \cdot 10^{-15} \text{ s}$$

L'énergie peut donc être considérée comme constante sur une période.

II. Emission et absorption de rayonnement :

Q4. L'équation du mouvement en projection sur $\vec{e}_r$ fournit :

$$\ddot{r} + \alpha \omega_0^2 \dot{r} + \omega_0^2 r = 0$$

Les racines de l'équation caractéristique sont :

$$x_{12} = -\frac{\alpha\omega_0^2}{2} \pm j\omega$$

avec

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\alpha^2 \omega_0^2}{4}}$$

La solution générale s'écrit :

$$r(t) = A \cdot e^{-\frac{\alpha\omega_0^2 t}{2}} \cos(\omega t + \varphi).$$

Les conditions initiales fournissent :

$$\tan \varphi = -\frac{\alpha\omega_0^2}{2\omega} ; A = \frac{r_0}{\cos \varphi}$$

Au premier ordre en $\alpha\omega_0$ on calcule :

$$\omega = \omega_0 ; A = r_0 ; \varphi = -\frac{\alpha\omega_0}{2}$$

Q5. On a donc :

$$\frac{2}{\Gamma} = \frac{2}{\alpha\omega_0^2}$$

Remarque : on calcule $\frac{1}{\Gamma} = 1,1 \cdot 10^{-8} \text{ s}$ cohérent avec Q3.

Au second ordre :

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\alpha^2 \omega_0^2}{4}} = \omega_0 \left(1 - \frac{\alpha^2 \omega_0^2}{8}\right)$$

d'où :

$$\delta\omega = \frac{\alpha^2 \omega_0^3}{8} = 0,28 \text{ s}^{-1}$$

Q6. $L_{\text{nat}} = \frac{c}{\Gamma} = 3,3 \text{ m}$. La lumière émise n'est pas monochromatique.

Q7. La longueur de cohérence est très grande ; on peut considérer la source comme quasi-monochromatique. Il sera donc très aisé d'observer des interférences à l'interféromètre de Michelson, par contre il sera impossible de mettre en évidence la longueur de cohérence.

Q8. La résonance se produit pour :

$$\omega = \omega_0 - \delta\omega \approx \omega_0$$

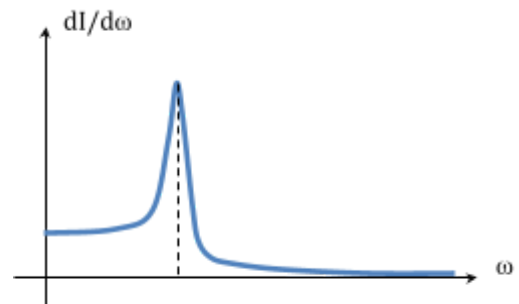
La largeur à mi-hauteur s'obtient facilement et vaut :

$$\Delta\omega = \Gamma$$

Elle est très aigüe car $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \ll 1$.

On calcule :

$$\Delta\lambda = \Delta\left(\frac{2\pi c}{\omega}\right) = \frac{2\pi c \Gamma}{\omega_0^2} = 1,2 \cdot 10^{-14} \text{ m}$$



Q9. Lorsque qu'une source émet une onde de fréquence f , un récepteur fixe par rapport à cette source perçoit également une onde de fréquence f , alors qu'un récepteur mobile par rapport à cette source perçoit une onde de fréquence différente ; c'est l'**effet Doppler**.

La vitesse est donnée par :

$$u = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = 570 \text{ m.s}^{-1}$$

On calcule alors :

$$\frac{\Delta\omega}{(\Delta\omega)_D} = \frac{\alpha\omega_0 c}{2u} = 6,4 \cdot 10^{-3}$$

La largeur Doppler masque la largeur naturelle.

La durée de cohérence due à la largeur Doppler est :

$$\tau_D \approx \frac{1}{(\Delta\omega)_D}$$

La longueur de cohérence Doppler est donc :

$$L = c \cdot \tau_D \approx \frac{c}{(\Delta\omega)_D} = 2,0 \text{ cm.}$$

III. Expérience de Faget et Fert :

Q10. Les électrons ont un comportement ondulatoire ; on observe des franges d'interférences sur l'écran.

Q11. Dans le vide entourant le fil, le champ électrique obéit à :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} \cdot \vec{e}_r = cste$$

$$\Rightarrow E(r) \cdot r = E(r_0) \cdot r_0$$

On a en coordonnées cylindriques (le gradient devrait être fourni) :

$$\vec{E} = - \frac{\partial V}{\partial r} \cdot \vec{e}_r$$

On en déduit :

$$V(r) = - E_0 \cdot r_0 \cdot \ln \ln (r) + cte$$

$$\text{Q12. } U = V(r_0) - V(f) = E_0 \cdot r_0 \cdot \ln \ln \left(\frac{f}{r_0} \right) = \frac{\beta m v^2}{\pi e} \cdot \ln \ln \left(\frac{f}{r_0} \right) = 29,3 \text{ V}$$

Remarque : les valeurs de E_0 et de β

 π près ; on ne peut donc donner qu'un OG de U, de l'ordre de 10 V.

Q13. La figure est formée par l'ensemble des impacts, semblant aléatoire au début, mais formant la figure d'interférences petit à petit. **Qu'est ce qu'ils veulent exactement ?**

Q14. Les électrons ont une longueur d'onde

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

Par analogue avec les fentes d'Young, l'interfrange est :

$$\delta x = \frac{\lambda Z}{s} = h \frac{Z}{2f\beta m v} = \frac{5h}{\beta \sqrt{m} \sqrt{m v^2}} = 0,27 \mu m$$

Lorsqu'on augmente U , β augmente, donc l'interfrange diminue.

Q15. Lorsqu'on augmente le potentiel U , β augmente : les électrons sont plus déviés.

Le recouvrement des taches dues aux électrons émis en $x>0$ et en $x<0$ est plus important : le champ d'interférences augmente.

Q16. A partir de la donnée de mv^2 , on calcule $v = 1,3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$; l'approche relativiste est nécessaire.

IV. Déviation du césium par un faisceau lumineux :

Q17. $\vec{p}_{phot} = \frac{E}{c} \vec{e}_x = h \frac{v}{c} \vec{e}_x$.

Q18. En notant $\vec{p}_1$ et $\vec{p}_2$ les quantités de mouvement d'un atome de césium avant et après interaction, la conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_{phot} = \vec{p}_2$$

$$\Leftrightarrow \{ 0 + h \frac{v}{c} = mv_2 \sin \theta \quad mv_1 = mv_2 \cos \theta$$

On en déduit :

$$\tan \theta = \frac{hv}{mv_1 c} = \frac{h}{mv_1 \lambda}$$

La déviation due à l'absorption d'un photon est donc :

$$\delta x = d \cdot \tan \theta = \frac{d \cdot h}{mv_1 \lambda}$$

La déviation présente un maximum pour $\delta x' = 20 \mu\text{m}$, soit :

$$N = \frac{\delta x}{\delta x'} = 2,5$$

Q20. La largeur $\Delta x_1 = 40 \mu\text{m}$ du pic non irradié peut être due à plusieurs facteurs :

- Une indétermination quantique sur la position si le problème est quantique ; on calcule pour un atome de césium une longueur d'onde de de Broglie :

$$\lambda = \frac{h}{mv} = 1,0 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

qu'on peut comparer à la taille de la fente $e = 10 \mu\text{m}$: le problème n'est pas quantique.

- Les fentes étant de largeur finie, les trajectoires ne sont pas toutes parallèles à Oz ; l'angle de sortie maximale est $\alpha = e/l$, qui occasionne une déviation maximale sur l'écran :

$$\Delta x_1/2 = (d+a/2) \alpha.$$

La valeur de l donnant la valeur Δx_1 mesurée est $l = (2d+a) e / \Delta x_1 = 72 \text{ cm}$, ordre de grandeur correct.

La largeur du jet irradié provient d'une part des cause évoquées ci-dessus, d'autre part du fait que l'irradiation a lieu sur une zone de largeur a : un atome interagissant en début de chambre sera détecté plus loin qu'un atome interagissant en fin de chambre (ci-dessous les trajectoires limites).

Dans ces conditions, tout se passe comme si les électrons, co-étaient émis suivant des trajectoires rectilignes en provenance que $S_1 S_2 = s = 2f\beta$, avec $f = 1 \text{ cm}$ et

$$\beta = \frac{\pi e E_0 r_0}{m v^2}$$

Dans cette relation E_0 représente l'intensité du champ électro d'un électron et e la charge élémentaire.

10 — Décrire qualitativement ce qu'on observe sur l'écr

V. Mesures expérimentales de la durée de vie de certains états excités de l'hélium.

Q21. Les atomes ne doivent interagir qu'avec les faisceaux d'électrons, pas avec d'autres atomes éventuels, ils pourraient se désexciter.

Q22. Les atomes doivent être ionisés pour être accélérés et former le jet atomique.

Q23. $E_2 - E_1 = h.c/\lambda$ donne $\lambda = 460$ nm qui correspond bien à la raie bleue de He.

Q24. Le théorème de l'énergie cinétique donne :

$$\frac{1}{2}.mv^2 = eU$$

d'où :

$$v = 2,0.10^5 \text{ m.s}^{-1}$$

Q25. Soit dp' la probabilité pour qu'un atome se désexcite entre t et $t+dt$.

La probabilité pour qu'un atome excité à l'instant t ($p(t) = e^{-t/\tau}$) soit encore excité à $t+dt$ ($p(t+dt) = e^{-(t+dt)/\tau}$) est telle que :

$$p(t + dt) = p(t) * (1 - dp')$$

On en déduit :

$$dp' = \frac{dt}{\tau} = \frac{dz}{v.\tau}$$

Autre raisonnement :

$N^*(t) = N_0 P(t) = nb$ d'atomes excités à t

$N^*(t+dt) = N_0 P(t+dt) = nb$ d'atomes excités à $t+dt$

$dN = N^*(t) - N^*(t+dt) = -N_0 \frac{dP}{dt} dt = nb$ d'atomes qui se sont désexcités entre t et $t+dt$

d'où la proba de désexcitation entre t et $t+dt$ $dp' = \frac{dN}{N^*(t)} = \frac{1}{\tau}.dt$

et entre z et $z+dz$ $dp' = \frac{1}{\tau v}.dz$ avec $t=z/v$ et $dt = dz/v$

Q26. En admettant que l'intensité du faisceau détecté est proportionnelle au nombre d'atomes qui se désexcitent entre z et $z+dz$:

$$dI(z) = \alpha dN(z) = \alpha N_0. \frac{1}{\tau v}. e^{-z/v\tau}. dz$$

avec αN_0 proportionnel à Kn^*S

Q27. On a :

$$i(z) = i_0. e^{-z/v\tau}$$

La tangente à l'origine a donc une pente $-i_0/v.\tau$, donc :

$$l = v.\tau$$

On calcule :

$$\tau = l/v = 2,1.10^{-7} \text{ s}$$

VI. Irradiation d'une vapeur atomique :

Q28. L'énergie fournie par les photons permet d'arracher les électrons, l'excédent d'énergie est converti sous forme d'énergie cinétique de l'électron.

Les électrons au niveau E_2 étant plus faciles à arracher que les électrons du niveau fondamental, ils possèdent une énergie cinétique plus grande.

On observe donc deux pics.

Lorsque la température s'élève, elle traduit l'agitation thermique des atomes et des électrons, dont l'énergie s'ajoute à l'énergie cinétique due au processus d'ionisation.

Q29. $E_n = E_1/n^2$, soit $E_2 = -E_i/4$.

La conservation de l'énergie s'écrit :

$$h \cdot \nu = E_i + \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$h \cdot \nu = \frac{E_i}{4} + \frac{1}{2}mv_2^2$$

Q30. $N(E_2)/N(E_1) = \exp((-E_2+E_1)/kT) = \exp(-3E_i/4kT) = 10^{-5}$.

On en déduit :

$$\mathbf{T = 10125 \text{ K}}$$

Cette température est trop élevée, la température réelle étant environ deux fois plus faible.

Q31. On considère les deux seuls niveaux E_1 et E_2 .

On a alors :

$$\mathbf{C \cdot \exp(-E_1/kT) + C \cdot \exp(-E_2/kT) = N}$$

Q32. Le nombre maximal g_n d'électrons pouvant occuper le niveau de nombre quantique principal n est $2 \cdot n^2$.

On a alors :

$$C \cdot \sum_0^{\infty} g_n \cdot e^{-\frac{E_1}{n^2 kT}} = N$$

La série tendant vers l'infini, C tend vers zéro ?

Q33. **Nous ne voyons pas trop ce qui est attendu...**