

Fiche technique

Professeur : Mouad ZILLOU

Matière : Mathématiques

Polynômes

Niveau : TCSF

euclidienne par $x - \alpha$ et

Capacités attendues

reconnaitre la divisibilité par $x - \alpha$.

Contenu du programme

- Notion de polynôme, égalité de deux polynômes.
- Somme et produit de deux polynômes.
- Racine d'un polynôme, division par $x - \alpha$.
- Factorisation d'un polynôme.

Recommandations pédagogiques

- Il faudra écarter toute construction théorique de la notion de polynôme. On se basera pour son introduction sur des exemples simples en indiquant les éléments caractéristiques d'un polynôme (degré, termes, coefficient).
- La technique de la division euclidienne par $x - \alpha$ joue un rôle dans la factorisation d'un polynôme dont une racine est α , toutefois une importance devra être accordée aux autres techniques de factorisation.

Fichiers utilisés dans la préparation du cours

- Les orientations pédagogiques.
- Livre d'élève.
- Des sites électroniques.
- Distribution périodique du programme de mathématiques.

Rôle de l'enseignant

- Ecrire l'activité au tableau
- Marquer les difficultés
- Répartir les tâches
- Donner une durée suffisante pour la recherche individuelle
- Diagonaliser les prérequis des apprenants
- Noter les observations

Rôle de l'apprenant

- Ecrire les activités
- Répondre aux questions de l'activité avec la justification de ses solutions.
- Formuler les résultats de l'activité sous forme d'un théorème, une

Outils didactiques : Tableau, livre ,craie, marqueurs

Etapes

Contenu du cours

Durée

Activité d'initiation	<u>Définition d'un polynôme –égalité de deux polynômes –opérations sur les polynômes</u> Soit un parallélépipède dont les dimensions sont $x, x+3$ et $x+5$ avec x est un réel positif. Calculer $V(x)$ le volume du parallélépipède.	60 minutes
Résumer du cours	<u>Définition d'un polynôme</u> On appelle polynôme (ou fonction polynôme) ,se note souvent P ,une expression (ou fonction) de la forme : $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 x^0 = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ Où $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ sont des nombres réels et s'appellent les coefficients du polynôme P . Si $a_n \neq 0$ alors n s'appelle le degré du polynôme P et se note $d^\circ P$ tel que $d^\circ P = n$ Si tous les coefficients sont nuls alors le polynôme P s'appelle le polynôme nul (sans degré) . <u>Exemple :</u> On considère l'expression suivante $P(x) = -5x^4 + 3x^2 + 4x - 7$ $P(x)$ est un polynôme de degré 4 ; on écrit $d^\circ P = 4$ Les nombres réels $-5, 0, 3, 4, -7$ sont les coefficients de $P(x)$ car on peut écrire $P(x)$ sous forme $P(x) = -5x^4 + 0x^3 + 3x^2 + 4x - 7$. <u>Remarque :</u> Soit a un nombre réel non nul. " $P(x) = ax + b$ "est le polynôme de degré 1 s'appelle binôme. " $P(x) = ax^2 + bx + c$ "est un polynôme de degré 2 s'appelle trinôme. <u>Exemple :</u> $P(x) = 2x - 3$ est un binôme. // $P(x) = -3x^2 + 2x + 4$ est un trinôme.	
Évaluation	1) Donner l'expression d'un polynôme $P(x)$ dont le degré est 6 et ses coefficients sont -1, 0, 0,-3,1 et 2. 2) Parmi les expressions suivantes, préciser celles qui représentent un polynôme en précisant son degré. $P(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - 3 \quad ; \quad Q(x) = 2x^2 - x - \sqrt{x} \quad ;$ $R(x) = 5 x ^2 + 4 x - 5 \quad ; \quad S(x) = (a-1)x^4 + x + 1; (a \in \mathbb{R})$	
Résumer du cours	<u>2. Égalité de deux polynômes</u> <u>Propriété :</u> Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes.	60 minutes

	On dit que $P(x)$ et $Q(x)$ Sont égaux si et seulement si : • Ils ont même degré • Les coefficients des termes en même degré sont deux à deux égaux . Signifier que : si $\begin{cases} P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \\ \text{et} \\ Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0 \end{cases}$ Alors $\begin{cases} d^\circ P = d^\circ Q \Leftrightarrow n = m \\ a_n = b_m ; a_{n-1} = b_{m-1} ; \dots ; a_0 = b_0 \end{cases}$ Exemple Etudions l'égalité de $P(x)$ et $Q(x)$ tels que : $P(x) = 4x^3 + 3x^2 - 4x + 1 \quad \text{Et} \quad Q(x) = 3x^2 + x^3 - 4x + 1 + 3x^3$ $\begin{cases} d^\circ P = d^\circ Q = 3 \\ \text{les termes de même degré ont mêmes coefficients} \end{cases}$ Alors $P(x) = Q(x)$	
Évaluation	1) Etudier l'égalité de $P(x)$ et $Q(x)$ dans les cas suivants : a) $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$; $Q(x) = (x+1)^3$ b) $P(x) = x^3 + (x-1)^2$; $Q(x) = x^2 - 3x + 4$ c) $P(x) = x^3 + 2x^2(x-1) + x$; $Q(x) = x^2(3x-2) + x$ 2) Déterminer le nombre réel a pour que $P(x) = Q(x)$ $P(x) = (a-1)x^3 + 2ax^2 + 5x + 6$; $Q(x) = x^3 + 4x^2 + (3+a)x + 3a$ 3) Déterminer a et b et c et d pour que $P(x) = Q(x)$ $P(x) = ax^3 + (b-2)x^2 + (4-c)x + d$; $Q(x) = -3x^3 + x^2 + 7$	

Résumé du cours	<u>3. Opérations sur les polynômes</u> <u>a. Somme de deux polynômes</u> Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes La somme de $P(x)$ et $Q(x)$ est le polynôme qu'on note $P+Q$ tel que : $(P+Q)(x) = P(x) + Q(x)$ <u>Exemples :</u> - On a : $P(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - 1$ et $Q(x) = 3x^3 - 2x^2 + 2x - 4$ Donc $P(x) + Q(x) = x^4 + 2x^3 + 2x - 5$ - On a $P(x) = 2x^2 + 3x + 4$ et $Q(x) = -2x^2 + x - 1$ Donc $P(x) + Q(x) = 4x + 3$ <u>Remarque :</u> Si $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes non nuls et $P+Q$ un polynôme non nul alors on a $d^\circ(P+Q) \leq d^\circ P \quad \text{OU} \quad d^\circ(P+Q) \leq d^\circ Q$ <u>b. Produit de deux polynômes</u> Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes. Le produit de $P(x)$ et $Q(x)$ est le polynôme qu'on note $P \times Q$ tel que $(P \times Q)(x) = P(x) \times Q(x)$ <u>Exemple :</u> On a $P(x) = x^2 + 1$ et $Q(x) = x - 1$ Donc $P(x) \times Q(x) = (x^2 + 1)(x - 1) = x^3 - x^2 + x - 1$ <u>Remarque :</u> Si $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes non nuls, alors on a $d^\circ(P \times Q) = d^\circ P + d^\circ Q$	30 minutes
	Évaluation	

II. La divisions par $x - \alpha$

1. La division euclidienne d'un polynôme par $x - \alpha$

a. Définition et propriété

Soit $P(x)$ un polynôme de degré n ($n \in \mathbb{N}^*$) et soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

S'il existe un polynôme $Q(x)$ qui vérifié : $P(x) = (x - \alpha)Q(x) + P(\alpha)$; alors :

- $Q(x)$: S'appelle **quotient** de la division euclidienne de $P(x)$ par $x - \alpha$.
- $P(\alpha)$: S'appelle reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $x - \alpha$.

Exemple $P(x) = x^2 - 8$, $x - \alpha = x - 3$

On a $P(x) = (x - 3)(x + 3) + 1$

Donc : $x + 3$ est le quotient de la division euclidienne de $P(x)$ par $x - 3$

1: est le reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $x - 3$.

b. Racine d'un polynôme

Définition

Soit $P(x)$ un polynôme et $\alpha \in \mathbb{R}$

On dit que α est une racine de $P(x)$ si et seulement si $P(\alpha) = 0$

Exemple

Parmi les nombres suivants déterminons qui sont les racines de $P(x)$

$$P(x) = x^2 - 2x + 1 \quad / \quad 1, -2 \text{ et } 3$$

c. La division euclidienne de $P(x)$ sur $x - \alpha$

Pour effectuer la division euclidienne de $P(x)$ par $x - \alpha$, on suit même étapes que celle des nombres entiers naturels.

Exemple

Effectuons la division euclidienne de $P(x) = 2x^3 + x^2 - x + 1$ par $x + 1$

2. La divisibilité par $x - \alpha$

Soit $P(x)$ un polynôme et $\alpha \in \mathbb{R}$ avec $d^\circ P = n$

- On dit que $P(x)$ est divisible par $x - \alpha$, s'il existe un polynôme $Q(x)$ de degré $n - 1$ tel que $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$
- $P(x)$ est divisible par $x - \alpha$ si et seulement si α est un zéro ou racine de $P(x)$

Exemple

On considère le polynôme suivant : $P(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$

Résum
er du
cours

90
min
ute
s

	Etudier la divisibilité de $P(x)$ par $x-1$. On a $P(1) = 1^3 - 3 \times 1^2 - 6 \times 1 + 8 = 1 - 3 - 6 + 8 = 0$ Donc $P(x)$ est divisible par $x-1$.	
Exercice de synthèse	Soit $P(x)$ un polynôme définie par $P(x) = 2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2$ 1) Montrer que si α est une racine de $P(x)$ alors $\frac{1}{\alpha}$ est aussi est une racine de $P(x)$ 2) a- Montrer que 2 est une racine de $P(x)$ b- En effectuant la division euclidienne de $P(x)$ par $x-2$, déterminer le polynôme $Q(x)$ tel que $P(x) = (x-2)Q(x)$ puis déduire que $Q(1/2) = 0$ 3) Déterminer a, b et c tels que $Q(x) = (x-1/2)(ax^2 + bx + c)$ 4) Factoriser $P(x)$ en produit des binômes puis résoudre l'équation $P(x) = 0$	