

Тема: Тригонометричні функції числового аргументу. Основні співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу

Посилання на підручник:
<https://lib.imzo.gov.ua/wa-data/public/site/books2/pidruchnyky-10-klas-2018/14-matematyka-10-klas/merzlyak-ag-matematyka-alg-i-poch-analizu-ta-geom-riven-sta-ndartu-10-kl.pdf>

Матеріали до теми:

Сприймання і усвідомлення понять **синуса, косинуса, тангенса і котангенса числа**

Розглянемо на координатній площині коло радіуса 1 з центром у початку координат, яке називається одиничним (рис. 43). Позначимо точку P_0 — правий кінець горизонтального діаметра. Поставимо у відповідність кожному дійсному числу α точку кола за такими правилом:

1) Якщо $\alpha > 0$, то, рухаючись по колу із точки P_0 в напрямі проти годинникової стрілки (додатний напрям обходу кола), опишемо по колу шлях довжиною α , кінцева точка цього шляху і буде шуканою точкою P_α .

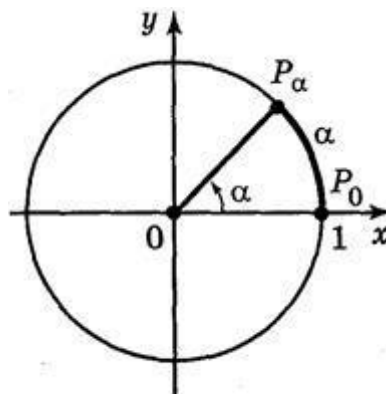


Рис. 43

2) Якщо $\alpha < 0$, то, рухаючись із точки P_0 (рис. 44) в напрямі за годинниковою стрілкою, опишемо по колу шлях довжиною $|\alpha|$; кінець цього шляху і буде шукана точка P_α .

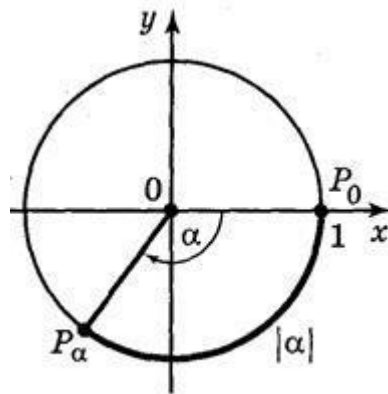


Рис. 44

3) Якщо $\alpha = 0$, то поставимо у відповідність точку P_0 .

Таким чином, кожному дійсному числу можна поставити у відповідність точку P_0 одиничного кола.

Якщо $\alpha = \alpha_0 + 2\pi k$, де k — ціле число, то при повороті на кут α одержуємо одну і ту саму точку, що й при повороті на кут α_0 .

Якщо точка P відповідає числу α , то вона відповідає і всім числам виду $\alpha + 2\pi k$, де 2π — довжина кола (бо радіус дорівнює 1), а k — ціле число, що показує кількість повних обходів кола в ту чи іншу сторону.

Синусом числа α називається ордината точки P_α , утвореної поворотом точки $P_0(1; 0)$ навколо початку координат на кут в α радіан (позначається $\sin \alpha$) (рис. 49).

Синус визначений для будь-якого числа α .

Косинусом числа α називається абсциса точки P_α , утвореної поворотом точки $P_0(1; 0)$ навколо початку координат на кут в α радіан (позначається $\cos \alpha$) (рис. 49).

Косинус визначений для будь-якого числа α .

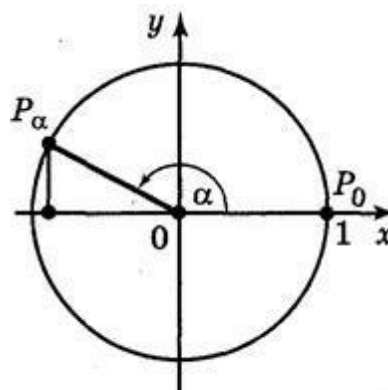


Рис. 49

Тангенсом числа α називається відношення синуса числа α до

$$\text{його косинуса: } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

Тангенс визначений для всіх α , крім тих значень, для яких $\cos \alpha = 0$,
тобто, $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Для розв'язування деяких задач корисно мати уявлення про лінію тангенсів (рис. 50). Проведемо дотичну t до одиничного кола в точці P_0 . Нехай α — довільне число, для якого $\cos \alpha \neq 0$, тоді точка P_α ($\cos \alpha; \sin \alpha$) не лежить на осі ординат і пряма OP_α перетинає t в деякій точці T_α з абсцисою 1. Знайдемо ординату точки T_α із трикутника OP_0T_α .

$$\frac{y}{1} = \operatorname{tg} \alpha ; y = \operatorname{tg} \alpha.$$

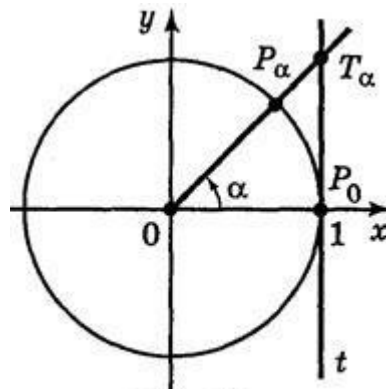


Рис. 50

Таким чином, ордината точки перетину прямих OP_α і t дорівнює тангенсу числа α . Тому пряму t називають віссю тангенсів.

Котангенсом числа α називається відношення косинуса числа α до

$$ctg \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

його синуса:

Котангенс визначений для всіх α , крім таких значень, для яких $\sin \alpha \neq 0$, тобто, $\alpha = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Введемо поняття лінії котангенсів (рис. 51). Проведемо дотичну q до

одичного кола в точці $P_{\frac{\pi}{2}}$. Для довільного числа α , якщо $\sin \alpha \neq 0$ і відповідно точка $P_\alpha (\cos \alpha, \sin \alpha)$ не лежить на осі OX і тому пряма OP_α перетинає пряму q у деякій точці Q_α з ординатою, що дорівнює 1. Із

$$\frac{x}{1} = ctg \alpha$$

трикутника $O P_{\frac{\pi}{2}} Q_\alpha$ маємо: 1 , звідси $x = ctg \alpha$. Таким чином, абсциса точки перетину прямої OP_α і q дорівнює котангенсу числа α , тому пряму q називають віссю котангенсів.

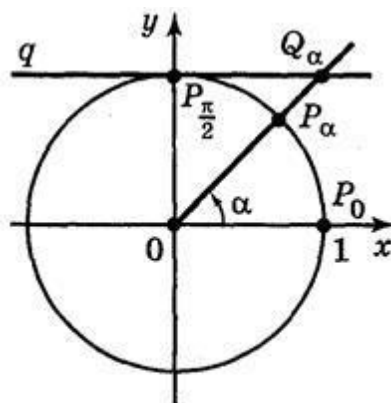


Рис. 51

Визначення значень тригонометричних функцій деяких чисел

Через те що поворот на кут в α радіан співпадає з поворотом 180 на $\frac{180}{\alpha}$

кут $-\frac{\pi}{\alpha}$ градусів, аргумент синуса і косинуса можна виразити як в градусах, так і в радіанах. Наприклад, при повороті точки $(1; 0)$ на кут $\frac{\pi}{2}$,

тобто на кут 90° , тому $\sin \frac{\pi}{2} = \sin 90^\circ = 1$, $\cos \frac{\pi}{2} = \cos 90^\circ = 0$.

Заповнимо таблицю значень синуса, косинуса, тангенса і котангенса деяких чисел (таблиця 1).

Таблиця 1

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	не існ.	0	не існ.	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	не існ.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	не існ.	0	не існ.

Вивчення зміни знаків тригонометричних функцій

Число $\sin \alpha$ — це ордината відповідної точки P_α , тому $\sin \alpha > 0$, якщо точка розташована вище осі абсцис, тобто в I і II чвертях (рис. 52). Якщо ця точка лежить нижче осі абсцис, то її ордината від'ємна в третій і четвертій чвертях.

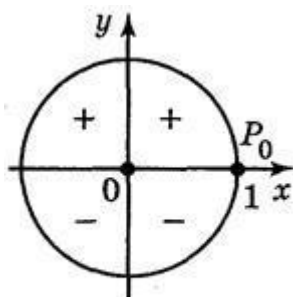


Рис. 52

Число $\cos \alpha$ — це абсциса точки P_α , тому $\cos \alpha > 0$ в I та IV чвертях, $\cos \alpha < 0$ в II та III чвертях (рис. 53).

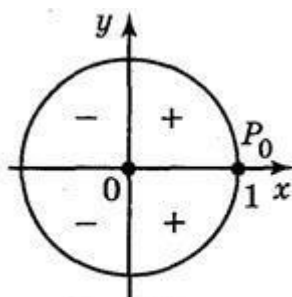


Рис. 53

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

Так як $\operatorname{tg} \alpha > 0$ і $\operatorname{ctg} \alpha > 0$, якщо $\sin \alpha$ і $\cos \alpha$ мають однакові знаки, тобто в I і III чвертях, і $\operatorname{tg} \alpha < 0$ і $\operatorname{ctg} \alpha < 0$ в II і IV чвертях (рис. 54).

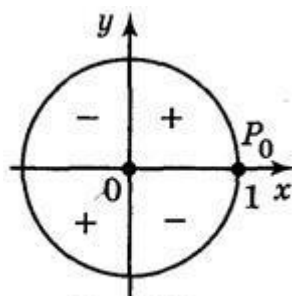


Рис. 54

Співвідношення між тангенсом і косинусом, котангенсом і синусом.

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ для всіх значень α . Ця рівність називається основною тригонометричною тотожністю.

З основної тригонометричної тотожності можна виразити $\sin \alpha$ через $\cos \alpha$ і навпаки.

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}, \quad \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \text{ де } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \text{ де } \alpha \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Завдання:

1. Опрацювати теоретичний матеріал п. 9, 12.
2. Законспектувати означення, формули.
3. Виконати письмово вправи: 9.1-9.4, 12.1-12.4.
4. Переглянути відеоматеріали за посиланням:

<https://naurok.com.ua/prezentaciya-do-uroku-trigonometrichni-funkci-chislo-vogo-argumentu-spivvidnoshennya-mizh-trigonometrichnimi-funkciyami-odnogo-i-togo-zh-argumentu-26599.html>

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!!! Роботу виконувати у робочому або окремому зошиті (якщо робочий залишився у гуртожитку), фотографувати і надсилати на електронну адресу valentinatalavera@ukr.net, у темі листа вказувати – ПІБ, предмет, номер групи.

Можна підготувати мультимедійну презентацію з теми і надіслати на електронну адресу valentinatalavera@ukr.net.

