Site web : http://www.matheleve.net/ *Email1 :contact@matheleve.net* *Email2 :matheleve@gmail.com*	**Devoir de Synthèse°01**		
Lycée Ali Bourguiba Bembla	$4^{ème}$ *Sc 1*	*Mercredi 06-12-2011*	*Chortani Atef*

Exercice 1(3 Points)

Répondre par "vrai" ou "faux" à chaque question. (Sans justification)

1) $Soient\ les\ fonctions\ f\ et\ g\ définies\ par\ f(x) = x\sin sin\left(\frac{1}{x}\right) - 2\ et\ g(x) = \frac{\sqrt{x+5}-2}{x+1};\ Alors$

$on\ a:\ gof\ (x) = \frac{1}{4}$ 2) $Si\ u_n = -v_n = \frac{1}{n}, nIN^*;\ alors\ les\ suites\ (u_n)\ et\ (v_n)\ sont\ adjacentes.$

3) Si f est une fonction décroissante sur un intervalle I et si g est une fonction

décroissante sur un intervalle J tel que g (J) ⊂ I, alors gof est décroissante sur J.

4) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé on considère les points A, B et C d'affixes respectives z_A, z_B et z_C tel que $(z_A - z_B) = i\,(z_B - z_C)$.Alors le triangle ABC est rectangle et isocèle.

Exercice 2(6 Points)

$Soit\ f\ la\ fonction\ définie\ sur\ \ par: f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$ 1) $Montrer\ que\ f(x)\ =$

Interpréter graphiquement les deux résultats

2)$a)\ Montrer\ que\ f\ est\ dérivable\ sur\ R\ \ et\ que\ pour\ tout\ réel\ x,\ f'(x) = \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)^3}$

b) Dresser le tableau de variation de f.

c)Montrer que f réalise une bijection de sur un intervalle I que l'on précisera.

3)$a)Montrer\ que\ pour\ tout\ réel\ x \in [0;1]\ f'(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$

b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $[0; 1]$ une unique solution α

4)$Soit\ la\ suite\ u\ définie\ sur\ N\ par: \{u_0 = \frac{1}{2}\qquad u_{n+1} = f(u_n), n\in N$

a)Montrer que pour tout $n\in N\ on\ a,\ u_n \in [0;1]$

b) Montrer que $pour\ tout\ n\in N$

$\left|u_{n+1} - \alpha\right| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}\left|u_n - \alpha\right|\ puis\ déduire\ que\ \left|u_n - \alpha\right| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{3n}\left|\frac{1}{2} - \alpha\right|.$

c)Déduire que u est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 3(6 Points)

1)a)Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (1+i)z + i = 0$

2) *Soit* θ *un réel de l'intervalle* $]0;\frac{\pi}{2}[$ *on considère l'équation d'inconnue z complexe*

$(E): z^2 - 2e^{i\theta}\cos\theta\, z + e^{2i\theta} = 0$

a)Vérifier que 1 est une solution de E

b) En déduire l'autre solution de E

3) Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$,on considère les points A et *B et C d'affixes respectives* : 1 , $e^{i\theta}$ *et* $1 + e^{i\theta}$

a)Déterminer l'ensemble des points B quand θ *varie dans* $]0;\frac{\pi}{2}[$

b) Montrer que le quadrilatère OACB soit un losange.

c)Déterminer le réel θ *pour que la mesure de l'aire de losange OBAC soit égale* à $\frac{1}{2}$

Exercice 4(5 Points)

Soit α un nombre réel appartenant à l'intervalle] 0,1[. On considère la suite (u_n) définie *sur IN par* $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{(1+\alpha)u_n - \alpha}{u_n} \end{cases}$

1) a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geq 1$

b) Montrer que (u_n) est une suite décroissante.

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et trouver sa limite.

2) *Soit* (v_n) *la suite définie sur IN par*: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n - \alpha}$

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison α

b) Exprimer v_n en fonction de n et α. En déduire l'expression de u_n en fonction de n et α.

c) Retrouver alors la limite de la suite (u_n) quand n tends vers $+\infty$