

**Державний навчальний заклад
«Полонський агропромисловий центр професійної освіти»**

**МЕТОДИЧНА РОЗРОБКА
УРОКУ З АЛГЕБРИ НА ТЕМУ**

«Застосування визначеного інтеграла»

Виконала:

викладач математики

ДНЗ «Полонський агропромисловий
центр професійної освіти»

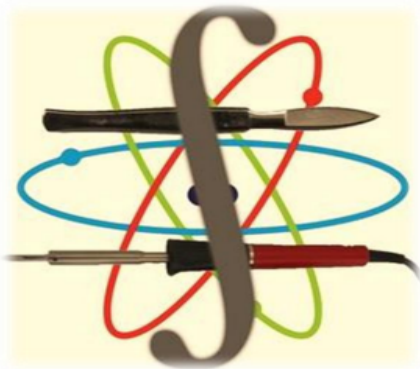
Сосуля Л.В.

Полонне – 2024

ЗМІСТ

1. Вступ	3
2. Розробка уроку з алгебри «Застосування визначеного інтегралу»	4
3. Висновки	11
4. Список використаних джерел	12
5. Додатки	13

Вступ



Математика як частина освіти повинна виконати три функції: дати певну суму знань, навчити самостійно здобувати знання, вміти застосовувати отриманні знання в практичній діяльності.

Пропонована методична розробка містить комбінований урок з елементами методу проектів та практичної роботи на тему “Застосування визначеного інтеграла”.

Тема «Інтеграл та його застосування» є продовженням теми “Похідна та її застосування”. На її вивчення у курсі предмету «Алгебра та початки аналізу» відводиться 10 годин. Під час вивчення учні знайомляться з поняттями первісної та інтеграла, формулою Ньютона-Лейбніца. Велика увага приділяється змістовній стороні питань, моделюванню реальних процесів, що призводять до практичного застосування визначеного інтеграла.

Головною метою урока є сприяння формуванню стійких умінь та навичок учнів в процесі вивчення матеріалу, формування розуміння значущості теми в інших галузях знань, наближення навчальної ситуації до професійної.

У роботі дотримано основну вимогу особистісно-орієнтованого навчання – системний підхід до організації самостійної діяльності учнів на уроці. Учні виконують різноманітні види самостійної діяльності:

- самостійно здобувають нові знання;
- формують уміння і навички переносити знання на практичну діяльність;
- запам'ятовують теоретичний матеріал, формули; здійснюють дослідження;
- творче моделювання та пошук;
- узагальнюють;
- роблять висновки;
- вчаться працювати з довідниковими матеріалами та в колективі.

На уроці застосовуються індивідуально-групові методи у навчанні, використовуються новітні педагогічні технології, що сприяють продуктивній роботі учнів на уроці. Використовуються елементи методу проектів, що дає учням не тільки отримувати готові знання, а й самим ставати активними учасниками процесу пізнання, вирішувати проблемні питання, застосовувати набуті знання. Також на уроці використовується практична робота, яка підвищує пізнавальний інтерес до навчання, розвиває пам'ять, мислення, увагу, уяву, розвиває самостійність, активізує навіть пасивних учнів, а тому досягається певна результативність. Оцінювання учнів відбувається згідно критеріїв навчальних досягнень учнів з математики.

Тема уроку: Застосування визначеного інтеграла.

Мета уроку: сформувати вміння застосовувати інтеграл; сформувати вміння розв'язувати вправи на застосування інтеграла; формувати вміння використання таблиці інтегралів; активізувати пізнавальну діяльність учнів; виховувати позитивне ставлення до навчання, інтерес до вивчення математики, старанність, дисциплінованість.

Формування компетентностей:

- **предметна компетентність:** вміння учнів застосовувати знання про інтеграл при розв'язуванні практичних задач; засвоєння учнями правила визначення типу обчислення інтегралу через використання таблиці інтегралів шляхом вироблення навичок розв'язування вправ, сприяти формуванню умінь складати математичні моделі реальних ситуацій.
- **ключові компетентності:**
 - *спілкування державною мовою* – вдосконалити вміння чітко, лаконічно та зрозуміло формулювати думку, аргументувати, доводити правильність власних міркувань;
 - *міжпредметна компетентність* – розвивати здатність учня застосовувати щодо міжпредметного кола проблем знання, уміння, навички, способи діяльності та ставлення, які належать до певного кола математики та способів вимірювання площ земельних ділянок на практиці;
 - *соціальна компетентність* – вдосконалювати вміння особистості продуктивно співпрацювати з партнерами у групі та команді, виконувати різні ролі та функції у колективі, розвивати в учнів уміння слухати і вступати в діалог, брати участь в колективному обговоренні проблем, продовжувати виховувати самостійність в роботі, відповідальність, вміння виражати і відстоювати власну думку;
 - *вміння навчатись впродовж життя* – застосування поняття кореня n -го степеня та його властивостей у різних сферах життєдіяльності людини, формувати впевненість в своїх силах.

Тип уроку: комбінований формування стійких умінь та навичок

Методи і прийоми заняття: пояснення нового матеріалу з застосуванням презентації; бесіда; аналіз конкретних ситуацій; інтегроване навчання; елементи ділових ігор; диференційований підхід; робота з опорними схемами і таблицями; самостійна робота з картками та інтерактивними вправами; групова робота за картками; проблемна ситуація, заготовки смайликів.

Принципи уроку: взаємозв'язок матеріалу, що вивчається з власним досвідом учнів ; системний підхід до навчання; навчання через діяльність;

використання розумової діяльності учнів – проведення аналогій, порівнянь, уміння узагальнювати матеріал та виділяти головне.

Міжпредметні зв'язки: геометрія, фізика, інформатика, хімія, біологія, фізична культура, спец предмети.

Технічні засоби навчання: картки-завдання, презентаційні матеріали, пам'ятки, мультимедійна система, прикладне програмне забезпечення.

Методичне забезпечення: презентація до уроку на тему «Застосування визначеного інтегралу», картки для роботи в групах, таблиці усного рахунку, схеми, роздатковий матеріал.

Очікувані результати:

Учні на кінець уроку повинні вміти:

- обчислювати інтеграл;
- визначати тип інтеграла в завданні;
- застосовувати інтегралів при виконанні практичних завдань.

Хід уроку

I. Організаційний момент

- *Привітання*
- *Перевірка наявності учнів на уроці (доповідь чергового учня).*
- *Перевірка підготовки учнів до уроку, зовнішнього вигляду.*
- *Викладач інформує про форму проведення уроку, вітає всіх учасників, на екрані висвітлена тема уроку (див. Додаток1, слайд 1).*

II. Повідомлення теми і мети уроку

- *Викладач повідомляє тему і мету уроку.*

Викладач. Тема сьогоднішнього уроку «Застосування визначеного інтегралу». На попередніх уроках ми з вами розглянули поняття визначеного інтеграла, училися його обчислювати. Також вам відомо одне із найбільш поширених застосувань визначеного інтеграла в геометрії – обчислення площ плоских фігур. Зараз на уроці ви дізнаєтеся про інші сфери застосування інтеграла та познайомимось з технологіями застосування інтеграла для обчислень в різних сферах життя.

- *Учні записують в конспекти дату і тему уроку.*

III. Мотивація навчальної діяльності

Викладач. Шановні учні! При вивченні даної теми мені неодноразово доводилося чути від вас висловлювання, типу: «Навіщо нам потрібні ці інтеграли?», «Де їх взагалі використовують?», «Ми ж майбутні продавці! Хіба нам в професійній діяльності знадобиться уміння обчислювати

інтеграли?» та інші. Поняття інтеграла та інтегральне числення виникло також через необхідність обчислювати площі поверхонь та об'єми довільних тіл. Своє практичне застосування інтеграл знайшов не тільки в геометрії, а й у фізиці й техніці, хімії та біології, економіці. (див. Додаток1, слайди – 2, 3, 4)

Інтегральне числення має багатий математичний апарат для моделювання й дослідження різних процесів, що відбуваються в повсякденному житті в тому числі і у вашій професії. На минулому уроці найбільш допитливим учням було запропоновано завдання: підготувати проекти на тему «Практичне застосування визначеного інтеграла».

IV. Актуалізація опорних знань учнів

1. Фронтальна бесіда по матеріалу попередніх уроків Викладач задає питання учням, вони відповідають.

- Яка операція є оберненою до операції диференціювання?
- Як називають сукупність всіх первісних функцій $F(x)+C$?
- Хто ввів символ інтеграла?
- Що називають визначеним інтегралом?
- За якою формулою обчислюється визначений інтеграл?
- В чому полягає геометричний зміст визначеного інтеграла?
- Що називають криволінійною трапецією?
- Як обчислити площу криволінійної трапеції?
- Як обчислити площу фігури, обмежену двома графіками функцій?

2. Вправа «Встанови відповідність» (див. Додаток1, слайд 5)

Вибраний вчителем учень (або по бажанню) підходить до інтерактивної дошки і за допомогою стилуса малює стрілки відповідності.

3. Вправа «Вибери правильну відповідь» (див. Додаток1, слайд 6)

V. Сприймання і усвідомлення матеріалу

Учні, які отримали завдання демонструють свої міні-проекти на застосування визначеного інтеграла при розв'язанні практичних задач. Доповідь учнів із використанням демонстраційного слайду та розв'язанням задач.

1. Використання визначеного інтеграла для обчислення об'ємів тіл обертання

(див. Додаток I, слайди 7, 8)

Учень. Задачі на обчислення об'єму тіла обертання розв'язуються аналогічно задачам про площу криволінійної трапеції. Кожне тіло обертання можна уявити складеним з дуже великої кількості круглих пластинок чи циліндрів з малими висотами Δx . Радіус кожного такого циліндра залежить від змінної x і дорівнює $f(x)$. Об'єм одного циліндрика, що відповідає змінній x , дорівнює $V_1 = \pi f^2(x) \Delta x$. Усьому тілу обертання відповідає інтегральна сума $\pi f^2(x_1) \Delta x + \pi f^2(x_2) \Delta x + \dots + \pi f^2(x_n) \Delta x$. Отже, об'єм тіла обертання можна обчислити за формулою $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$.

Задача

Знайти об'єм посудини заввишки 4 дм, якщо контури посудини описуються формулою $y = \sqrt{2x}$.

Розв'язання

Шуканий об'єм посудини дорівнює об'єму тіла, утвореного обертанням криволінійної трапеції, що задається лініями $y = \sqrt{2x}$, $x = 0$, $x = 4$ навколо осі x .

Отже, шуканий об'єм $V = \pi \int_0^4 (\sqrt{2x})^2 dx = \pi \int_0^4 2x dx = 2\pi \cdot \frac{4^2}{2} - \frac{0^2}{2} = 16\pi$ (дм³).

2. Використання визначеного інтеграла для обчислення маси стрижня

(див. Додаток I, слайди 9, 10)

Учень. Інтеграл має дуже широке застосування при розв'язанні задач з фізики. Найбільш часто зустрічаються задачі на обчислення пройденого шляху за відомим законом зміни швидкості, обчислення роботи змінної сили, обчислення маси неоднорідного стрижня, обчислення кількості електрики та інші.

Розглянемо задачу на обчислення маси неоднорідного стрижня.

За означенням лінійна густина ρ неоднорідного стрижня дорівнює похідній функції $m = m(l)$, що виражає масу стрижня як функцію його довжини. Отже, $\rho = m'(l)$, тобто функція $m = m(l)$ є первісною для $\rho = \rho(l)$. Звідси випливає, що масу стрижня на

відрізку $l_1; l_2$ можна обчислити за формулою $m = \int_{l_1}^{l_2} \rho(l) dl$.

Задача Знайти масу прямолінійного неоднорідного стрижня довжиною 12 см, якщо його лінійна густина визначається формулою (кг/м).

Розв'язання:

12 см = 0,12 м.

Масу стрижня шукаємо за формулою: $m = \int_0^{0,12} l^2 + l + 1 \, dl = \frac{0,12^3}{3} + \frac{0,12^2}{2} + 0,12 - \frac{0^3}{3} - \frac{0^2}{2} - 0 = 0,127776 \approx 0,13 \text{ (кг)}$.

3. Використання визначеного інтеграла для обчислення шляху, пройденого тілом за законом зміни швидкості.

(див. Додаток1, слайд 11)

Учень. При вивченні теми «Похідна функції» було встановлено, що миттєва швидкість нерівномірного руху є похідною від шляху $v = S'$ - в цьому полягає механічний зміст похідної. Оскільки операцією, оберненою до диференціювання є інтегрування, то шлях, пройдений тілом за проміжок часу від t_1 до t_2 виражається через інтеграл за формулою Ньютона-Лейбніца $S = \int_{t_1}^{t_2} v \, dt$, за умови, що функція $v = v(t)$ є непервною.

Задача

Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю, яка змінюється за законом $v = 3t^2 + 4t + 1$ (м/с). Знайти шлях, який пройшло тіло за проміжок часу від $t_1 = 1$ с до $t_2 = 3$ с.

Розв'язання

Шуканий шлях шукатимемо за допомогою формули Ньютона-Лейбніца.

$$S = \int_1^3 3t^2 + 4t + 1 \, dt = 3 \cdot \frac{3^3}{3} + 4 \cdot \frac{3^2}{2} + 3 - \left(3 \cdot \frac{1^3}{3} + 4 \cdot \frac{1^2}{2} + 1 \right) = (27 + 18 + 3) - (1 + 2 + 1) = 48 - 4 = 40 \text{ (м)}.$$

Викладач. Основні формули з застосуванням визначеного інтеграла у фізиці та техніці зібрані у пам'ятці, що лежить у вас на робочих столах. (див. Додаток3). Вам потрібно вклеїти їх вдома в зошити. Ці формули стануть у нагоді при розв'язанні прикладних задач з фізики.

VI. Розв'язування завдань

Викладач. Настав час застосувати отримані відомості до розв'язання прикладних задач. Щоб дати відповідь на поставлені вами питання, виконаємо практичну роботу по розв'язанню задач, запропонованих робітниками нашого навчального закладу. Для цього ми розділимося на 4 підгрупи. Завдання кожної підгрупи – обрати лідера підгрупи, розв'язати запропоновану задачу та оформити на дошці її розв'язання. Лідер групи захищає роботу

Методична доцільність:

Показати значимість інтегрального числення в застосуванні різних сфер життя.

Завдання: Розв'язати задачу:

1-а група отримує картку №1 (див. Додаток2)

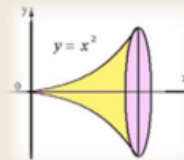
Задача №1 від викладача математики

Обчислити об'єм тіла, що утворюється при обертанні криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y = x^2$, $x = 0$; $x = 2$.

Очікувані результати:

Розв'язання:

1. Будуємо в системі координат тіло, що утворюється обертанням заданої криволінійної трапеції навколо осі ОХ.
2. Об'єм тіла обертання обчислюємо за формулою $V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$.
3. Визначаємо межі інтегрування: $a=0$, $b=2$.
4. Обчислюємо об'єм тіла: $V = \pi \int_0^2 x^2 dx = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$ (куб. од.)



2-а група отримує картку №2 (див. Додаток2)

Задача №2 від викладача фізкультури

На змаганнях спортсмен біжить прямолінійно зі швидкістю $v = 6t + 3t^2$. Знайдіть довжину шляху, який здолає бігун за 5 сек. від початку руху.

Очікувані результати:

Розв'язання:

1. Довжину шляху обчислюємо за формулою $S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$.
2. Визначаємо межі інтегрування: $t_1 = 0$ с; $t_2 = 5$ с.
3. Обчислюємо довжину шляху: $S = \int_0^5 (6t + 3t^2) dt = 6\frac{5^2}{2} + 3\frac{5^3}{3} - 6\frac{0^2}{2} - 3\frac{0^3}{3} = 75 + 125 = 200$ (м).

Задача №3 від директора

Споживання електричної енергії в нашому навчальному закладі описується формулою $y = 12t^2 - 8t + 120$, t – кількість годин. З метою контролю і економії необхідно обчислити вартість електроенергії, спожитої за один робочий день (з 800 год до 1600 год), якщо 1 квт/год=2,2 грн.

Очікувані результати:

Розв'язання:

1. Кількість електроенергії обчислюємо за формулою $q = \int_{t_1}^{t_2} y(t) dt$.
2. Визначаємо межі інтегрування. Робочий день складає 8 год, отже:
 $t_1 = 0 \text{ год}; t_2 = 8 \text{ год}$.
3. Визначаємо кількість електроенергії, що витрачається в день:
$$q = \int_0^8 (12t^2 - 8t + 120) dt = 3 \frac{8^3}{3} - 8 \frac{8^2}{2} + 120 \cdot 8 - \left(3 \frac{0^3}{3} - 8 \frac{0^2}{2} + 120 \cdot 0 \right) =$$
$$512 - 256 + 960 = 1216 \text{ (квт)}.$$
4. Обчислюємо вартість: $1216 \cdot 2,2 = 2675,2$ (грн).

VII. Підсумок уроку

1. Оцінювання роботи учнів, виставлення оцінок
2. Домашнє завдання Опрацювати за підручником Бевз Математика, 11 кл. §16 (стор. 121 - 123).

Завдання обов'язкового рівня - №№ 541, 547.

Завдання підвищеного рівня - № 557.

3. Виконання усної вправи:

Завдання: Скласти сенкан до слова «Інтеграл»

Методична доцільність:

Сенкан – складання вільного вірша, що синтезує інформацію та коротко описує тему. Використовуючи сенкан, викладач ставить собі за мету розвивати критичне мислення учня, здатність розкривати складні ідеї та почуття у декількох словах. Учні при цьому навчаються помірковано використовувати поняття і висловлювати своє ставлення до поставленої проблеми, використовуючи всього п'ять рядків.

Очікувані результати:

ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

обернений, однозначний

знаходити, записувати, інтегрувати

площа, шлях, об'єм, робота, маса, кількість енергії

Викладач. Сьогодні на уроці ви не лише дізналися про сфери застосування визначеного інтеграла, а й самі спробували його застосувати. Бачимо, що задач, при розв'язанні яких використовується інтеграл дуже багато. Закінчити наш урок хочу словами великого вченого Лобачевського: «Немає жодної галузі математики, яка б абстрактна вона не була, яка коли-небудь не виявиться придатною до явищ дійсного світу» (див. Додаток1, слайд 12)

Дякую всім за роботу на уроці!

3. Висновки

Сучасний урок, якісний урок, якісна освіта — всі ці питання постійно перебувають у полі уваги не тільки педагогів: вони хвилюють випускників, їх обговорюють батьки, роботодавці, висуває держава як одну з головних проблем забезпечення якісної освіти.

В даній методичній розробці уроку наводяться оновлені прийоми та методи використання особистісно-орієнтованих педагогічних технологій відповідно їх сучасного призначення. Такий урок є досить ефективним, він є радісним і цікавим для учнів, розкриває творчий потенціал особистості, поставивши її в ситуацію морального вибору й прийняття самостійного рішення.

Сподіваюсь, що даний матеріал допоможе моїм колегам сформувати в собі нове, позитивне мислення, а процес навчання з обов'язку перетворить на захоплення, радість навчання та спілкування.

4. Список використаних джерел

1. Математика: М.І. Бурда, Т.В. Колесник, Ю.І. Мальований, Н.А. Тарасенкова підручник для 10 класу вивчення математики рівня стандарту / УОВЦ «Оріон», 2018. – 288 с.
2. Мерзляк А.Г. Алгебра і початки аналізу. Підручник для класів з поглибленим вивченням математики / Харків: "Гімназія", 2010. – 414 с.
3. Гальперіна А.Р. Алгебра і початки аналізу. Збірник завдань для контролю знань. // Видавництво "Ранок". – 2010. – 176 с.
4. Корнієнко Т.Л. Алгебра і початки аналізу. Методичні та дидактичні матеріали// Видавництво "Ранок". – 2019. – 496 с.

Додаток 2

Картка №1

Задача від викладача математики

Обчислити об'єм тіла, що утворюється при обертанні криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y = x^2$, $x = 0$; $x = 2$.

Картка №2

Задача від викладача фізкультури

На змаганнях спортсмен біжить прямолінійно зі швидкістю $v = 6t + 3t^2$. Знайдіть довжину шляху, який здолає бігун за 5 с від початку руху.

Картка №3

Задача від директора

Споживання електричної енергії в нашому навчальному закладі описується формулою $y = 12t^2 - 8t + 120$, t – кількість годин. З метою контролю і економії необхідно обчислити вартість електроенергії, спожитої за один робочий день (з 8⁰⁰ год до 16⁰⁰ год), якщо 1 квт/год=2,2 грн.

Пам'ятка



Застосування визначеного інтеграла у фізиці

A - робота F - сила N - потужність	$A = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx$ $A = \int_{t_1}^{t_2} N(t) dt$
m – маса стрижня ρ – лінійна щільність	$m = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) dx$
Q – електричний заряд I – сила току	$Q = \int_{t_1}^{t_2} I(t) dt$
S - шлях v - швидкість	$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$
Q – кількість теплоти c - теплоємність	$Q = \int_{t_1}^{t_2} c(t) dt$