Chapitre 03
Fonction inverse

I. Définition et allure de la courbe

🖥️ **Vidéo https://youtu.be/Vl2rlbFF22Y**

Définition

La **fonction inverse** f est définie sur $R\backslash\{0\} = R^*$ par

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Représentation graphique

x	**−2**	**−1**	**0,25**	**1**	**2**	**3**
$f(x)$	−0,5	−1	4	1	0,5	$\frac{1}{3}$

Remarque

La courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$ de la fonction inverse, appelée **hyperbole** de centre O, est symétrique par rapport à l'origine. La fonction est donc **impaire**.

$$\forall x \in R^*, f(-x) = \frac{1}{-x} = -f(x)$$

II. Dérivée et sens de variation

1. Dérivée

Propriété

La **dérivée** de la fonction inverse f est définie sur R^* par

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Démonstration (pour les experts)

🖥️ **Vidéo https://youtu.be/rQ1XfMN5pdk**

Soit $x, h \in R^*$ tels que $x + h \neq 0$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{1}{h} \times \left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{h} \times \left(\frac{x}{x(x+h)} - \frac{(x+h)}{x(x+h)}\right) = \frac{1}{h} \times \frac{x-x-h}{x(x+h)} = -\frac{1}{x(x+h)}$$

Cette dernière quantité, lorsque x est fixé, admet une limite lorsque h tend vers 0 donc

$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \left(-\frac{1}{x(x+h)}\right) = -\frac{1}{x^2}$$

2. Variations

Propriété

La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty; 0[= R^*_-$ et sur $]0; +\infty[= R^*_+$

Démonstration

$\forall x \in R^*, f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$

Donc f est décroissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$

Remarque

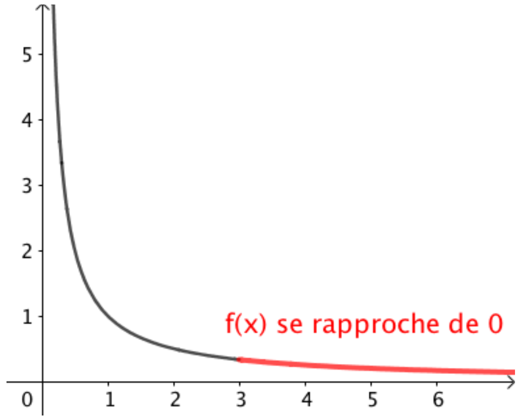
On ne peut pas dire que la fonction f est décroissante sur R^* car f n'est pas continue en 0.

III. Comportement de la fonction inverse aux bornes de son ensemble de définition

1. Comportement en $+\infty$

On s'intéresse aux valeurs de $f(x)$ lorsque x devient de plus en plus grand.

x	**5**	**10**	**100**	**10 000**	**…**
$f(x)$	0,2	0,1	0,01	0,0001	?



On constate que $f(x)$ se rapproche de 0 lorsque x devient de plus en plus grand. On dit que la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$ est égale à 0 et on note

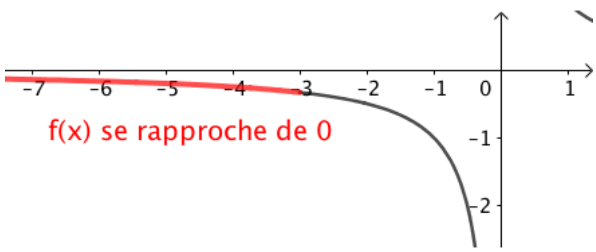
$$f(x) \ = 0$$

Graphiquement, pour des valeurs de plus en plus grandes, la courbe de f se rapproche de plus en plus de l'axe des abscisses.

2. Comportement en $-\infty$

On s'intéresse aux valeurs de $f(x)$ lorsque x devient de plus en plus petit.

x	…	$-10\,000$	-100	-10	-5
$f(x)$	?	$-0,0001$	$-0,01$	$-0,1$	$-0,2$



On constate que $f(x)$ se rapproche de 0 lorsque x devient de plus en plus petit. On dit que la limite de f lorsque x tend vers $-\infty$ est égale à 0 et on note

$$f(x) \ = 0$$

Graphiquement, pour des valeurs de plus en plus petites, la courbe de f se rapproche de plus en plus de l'axe des abscisses.

On dit que l'axe des abscisses est une **asymptote horizontale** à la courbe de la fonction inverse en $-\infty$ et en $+\infty$

3. Comportement au voisinage de 0

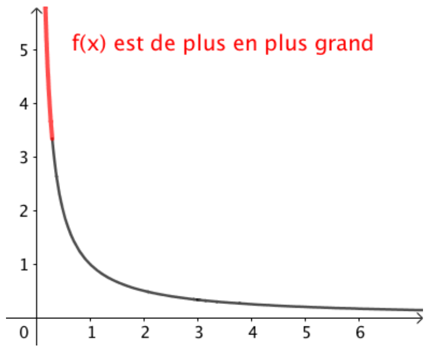
L'image de 0 par la fonction f n'existe pas. On s'intéresse cependant aux valeurs de $f(x)$ lorsque x se rapproche de 0.

x	$-0,5$	$-0,1$	$-0,01$	$-0,001$	…	**0,001**	**0,01**	**0,1**	**0,5**
$f(x)$	-2	-10	-100	$-1\,000$	?	1 000	100	10	2

A l'aide de la calculatrice, on constate que, pour $x > 0$, $f(x)$ devient de plus en plus grand lorsque x se rapproche de 0. On dit que la limite de f lorsque x tend vers 0 pour $x > 0$ (par valeurs supérieures ou positives dans ce cas) est égale à $+\infty$ et on note

$$f(x) \ = f(x) \ =+\infty$$

Graphiquement, pour des valeurs positives, de plus en plus en proches de 0, la courbe de f se rapproche de plus en plus de l'axe des ordonnées.

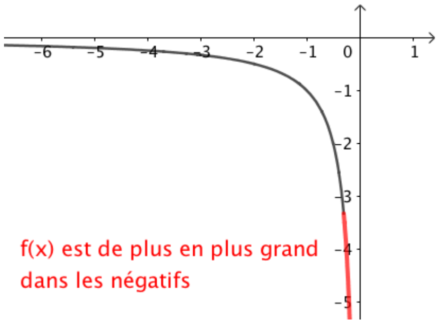


Pour $x < 0$, $f(x)$ devient de plus en plus petit lorsque x se rapproche de 0.
On dit que la limite de f lorsque x tend vers 0 pour $x < 0$ est égale à $-\infty$ et on note

$$f(x) \ = f(x) \ =-\infty$$

Graphiquement, pour des valeurs négatives, de plus en plus en proches de 0, la courbe de f se rapproche de plus en plus de l'axe des ordonnées.

On dit que l'axe des ordonnées est une **asymptote verticale** à la courbe de la fonction inverse.



Méthode

Étudier une fonction obtenue par combinaisons linéaires de la fonction inverse et d'une fonction polynomiale

🖥️ **Vidéo https://youtu.be/P3Ui9-Pk8p8**

Soit la fonction f définie sur R^* par

$$f(x) = 1 - 2x - \frac{2}{x}$$

1. Calculer la fonction dérivée de f.
2. Déterminer le signe de f' en fonction de x.
3. Dresser le tableau de variations de f.
4. Représenter la fonction f dans un repère.

Rappels sur les formules de dérivation

Solution

1. Soit $x \in R^*$

$$f(x) = 1 - 2x - 2 \times \frac{1}{x}$$

Donc

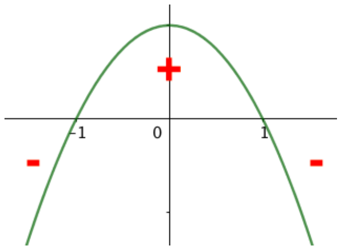
$$f'(x) =- 2 - 2\times\left(-\frac{1}{x^2}\right) =- 2 + \frac{2}{x^2} = \frac{-2x^2}{x^2} + \frac{2}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{2-2x^2}{x^2}$$

2. On commence par résoudre l'équation

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow 2 = 2x^2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow (x = 1) \vee (x =- 1)$$

f' est du signe du numérateur car le dénominateur est positif. Le numérateur est une fonction du second degré représentée par une parabole sont les branches sont tournées vers le bas ($a =- 2$ est négatif). Elle est donc négative pour $x \leq -1$ puis positive pour $-1 \leq x \leq 1$ et à nouveau négative pour $x \geq 1$.



3. On dresse alors le tableau de variations en appliquant le théorème suivant.

Si $f' \leq 0$, alors f est décroissante.
Si $f' \geq 0$, alors f est croissante.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$ ↘		5	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	-3	↘ $-\infty$	

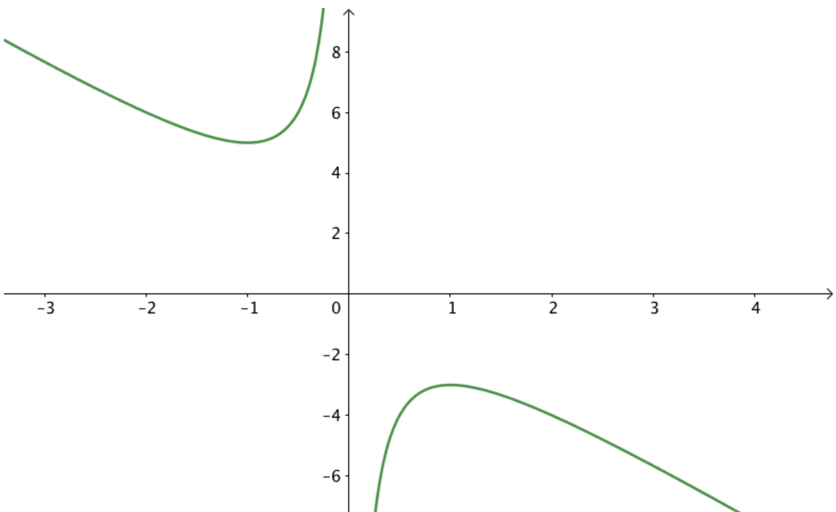
$$f(-1) = 1 - 2\times(-1) - \frac{2}{-1} = 5$$

$$f(1) = 1 - 2\times 1 - \frac{2}{1} =- 3$$

4. En testant, pour des valeurs négatives de plus en plus en proches de 0, $f(x)$ devient de plus en plus grand. Pour des valeurs positives de plus en plus en proches de 0, $f(x)$ devient de plus en petit.

Autrement dit,

$$f(x) \ =+\infty$$



$$f(x) =- \infty$$

L'axe des ordonnées est une asymptote verticale à la courbe de la fonction f.