Дисциплина: ОД.07 Математика
Занятие № 49 **Группа БУ и ТД 1/1-9/25** **Дата: 18.12.2025**
Тип занятия: лекция 24 **Преподаватель:** Бережная В.А.
По теме: «*Комплексные числа*»

Цель занятия:
Деятельностная:
– создать условия для усвоения обучающимися понятия комплексного числа, для формирования у обучающегося умения выполнять основные арифметические действия с комплексными числами в алгебраической форме.
Содержательная:
Обеспечить усвоение обучающимися математических понятий и представлений:
- определение комплексного числа как элемента множества С и его связь с координатной плоскостью (геометрическая и алгебраическая интерпретация);
- алгебраическая форма записи комплексного числа и её;
- правила выполнения арифметических операций с комплексными числами;
- применение комплексных чисел при решении квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом.

План занятия:
1. Понятие комплексного числа. Геометрическая интерпретация.
2. Алгебраическая форма записи комплексного числа.
3. Операции с комплексными числами в алгебраической форме.

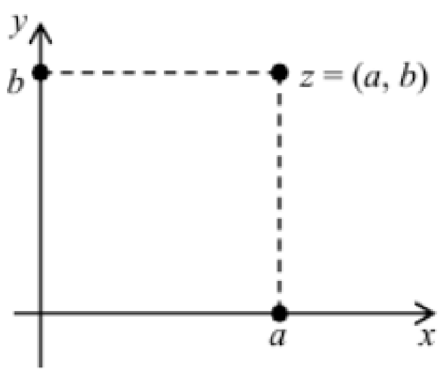
Ход занятия

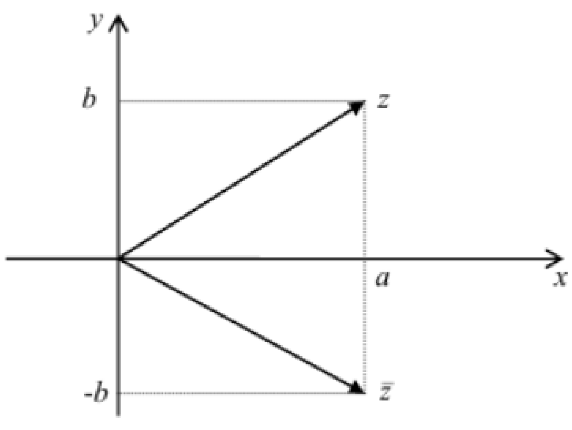
1. Понятие комплексного числа. Геометрическая интерпретация

Вначале вспомним геометрическую интерпретацию действительных чисел, согласно которой каждому действительному числу соответствует точка на координатной прямой. Теперь опишем комплексное число как упорядоченную пару действительных чисел:

$$z = (a,\ b)\ .$$

Тогда сразу появляется возможность соотнести каждое комплексное число z с точкой на плоскости, имеющей координаты a и b. При этом, число a называют действительной частью комплексного числа z и обозначают $Re\ z$, а действительное число b называют мнимой частью комплексного числа и обозначают $Im\ z$ (от английских слов «real» и «imaginary»), т.е. $a = Rez$, $b = Imz$. (Еще раз подчеркнем, что a и b – это «обычные» действительные числа.) Плоскость, которая используется для представления комплексных чисел, называется комплексной плоскостью или z-плоскостью. Ось OX – называется действительной осью, а ось OY – мнимой осью. Величина действительной части есть абсцисса точки, а величина мнимой части есть ордината точки.





2. Алгебраическая форма записи комплексного числа

$z = a+bi$ ($i=\sqrt{-1}$ – мнимая единица) – алгебраическая форма комплексного числа.

Будем считать, что два комплексных числа $z_1 = a_1+b_1i$ и $z_2 = a_2 - b_2i$ равны тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части.

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \text{ и } b_1 = b_2.$$

Если дано число $z = a+bi$, то сопряженным ему будет число $\bar{z} = a-bi$.

3. Операции с комплексными числами в алгебраической форме

1. Сумма (разность) комплексных чисел вычисляется по формуле
$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2) \cdot i$.
2. Произведение комплексных чисел вычисляется следующим образом
$z_1 \cdot z_2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1) \cdot i$.
3. Деление двух комплексных чисел осуществляется по следующему правилу:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1+b_1i)}{(a_2+b_2i)} = \frac{(a_1+b_1i)\cdot(a_2-b_2i)}{a_2^2+b_2^2}, \quad (z_2 \neq 0)$$

4. Возведение в степень определяется следующим образом:

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n-раз}$$

5. Комплексная степень обладает такими же свойствами, что и действительная.

$$z^n \cdot z^m = z^{n+m}$$

$$\left(z^n\right)^m = z^{n \cdot m}$$

$$(z_1 \cdot z_2)^n = z_1^n \cdot z_2^n$$

Разобранные задания

Рассмотрим задания, приводящие к возникновению комплексных чисел. Как Вы прекрасно помните из курса основной школы, при решении квадратного управления методом дискриминанта, при отрицательном значении дискриминанта выдвигалось утверждение, что квадратное уравнение корней не имеет. Теперь же, с уверенностью можем утверждать: корней нет среди множества ***действительных*** чисел. Однако, среди чисел комплексных – решения существуют.

Задание 1. Решить квадратное уравнение:

$$2x^2 + 3 = 0$$

Решение: $a=2;\ b=0;\ c=3$

Уравнение является неполным. Воспользуемся частным способом решения:

$$2x^2 + 3 = 0$$

$$2x^2 = -3 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{3}{2}}$$

Ранее мы бы сказали, что подкоренное выражение может быть лишь неотрицательным, но заметим, что одно отрицательное значение (мнимую единицу, мы сегодня уже встречали):

$$x = \pm\sqrt{-\frac{3}{2}} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}\cdot(-1)} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{-1} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot i$$

Ответ: $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot i$

Задание 2. Решить квадратное уравнение:

$$x^2 - 10x + 41 = 0$$

Решение: a=1; b= –10; c=41

$$D = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 41 = 100 - 164 = -64$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{-64} = \sqrt{64 \cdot (-1)} = \sqrt{64} \cdot \sqrt{-1} = 8i$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{10 \pm 8i}{2 \cdot 1} = 5 \pm 4i$$

Ответ: $x_{1,2} = 5 \pm 4i$

Задание 3. Выполните действия с комплексными числами:

$z_1 = 5 - 3i$ $\qquad$ $z_2 = 3 + 7i$

Решение:

Сопряженные числа к данным:

$\overline{z_1} = 5 + 3i$ $\qquad$ $\overline{z_2} = 3 - 7i$

Сложим два комплексных числа:

$$z_1 + z_2 = (5 - 3i) + (3 + 7i) = 5 - 3i + 3 + 7i = (5 + 3) + (-3 + 7)i = 8 + 4i$$

Вычтем поочередно из одного комплексного числа второе:

$$z_1 - z_2 = (5 - 3i) - (3 + 7i) = 5 - 3i - 3 - 7i = (5 - 3) + (-3 - 7)i = 2 - 10i$$

$$z_2 - z_1 = (3 + 7i) - (5 - 3i) = 3 + 7i - 5 + 3i = (3 - 5) + (7 + 3)i = -2 + 10i$$

Умножим комплексные числа друг на друга:

$$z_1 \cdot z_2 = (5 - 3i) \cdot (3 + 7i) = 15 + 35i - 9i - 21i^2 = \left[i^2 = -1\right] = (15 - 21 \cdot (-1)) + (35 - 9)i = 36 + 27i$$

Разделим поочередно одно комплексное число на второе:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(5 - 3i)}{(3 + 7i)} = \frac{(5 - 3i) \cdot (3 - 7i)}{(3 + 7i) \cdot (3 - 7i)} = \frac{15 - 35i - 9i + 21i^2}{9 - 21i + 21i - 49i^2} = \left[i^2 = -1\right] = \frac{-6 - 44i}{58} = -\frac{3}{29} - \frac{22}{29}i$$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{(3 + 7i)}{(5 - 3i)} = \frac{(3 + 7i) \cdot (5 + 3i)}{(5 - 3i) \cdot (5 + 3i)} = \frac{15 + 9i + 35i + 21i^2}{25 + 15i - 15i - 9i^2} = \left[i^2 = -1\right] = \frac{-6 + 44i}{34} = -\frac{3}{17} + \frac{22}{17}i$$

Возведем комплексное число z_1 во вторую и в третью степень:

$$z_1^2 = (5 - 3i) \cdot (5 - 3i) = 25 - 15i - 15i + 9i^2 = 25 - 9 - 30i = 16 - 30i$$

$$z_1^3 = z_1^2 \cdot (5 - 3i) = (16 - 30i) \cdot (5 - 3i) = 80 - 48i - 150i + 90i^2 = -10 - 198i$$

(!) Домашнее задание (!)

1. Ответьте на контрольные вопросы (письменно):

1.1. Комплексное число.
1.2. Комплексная плоскость.
1.3. Алгебраическая форма записи комплексного числа.
1.4. Геометрическая форма записи комплексного числа.

2. Решите предложенные задания (письменно):

Задание 2.1	**Задание 2.2**
Вычислить: $(5 + i) + (-2 + 3i) =$ $\quad$ $(5 + i) - (-2 + 3i) =$ $(5 + i)(-2 + 3i) =$ $\dfrac{(5+i)}{(-2+3i)} =$ $(2+i\sqrt{12})^2 =$	Вычислить: $(2 - i) + (-4 + 3i) =$ $\quad$ $(2 - i) - (-4 + 3i) =$ $(2 - i)(-4 + 3i) =$ $\dfrac{(2-i)}{(-4+3i)} =$ $(3+i\sqrt{2})^2 =$

Отчетность

Работы принимаются до 25 декабря 2025 г.

Задания выполняются от руки на тетрадных листах в клетку. Каждый лист на полях подписываете: Фамилия Имя, группа, дата (в формате ДД.ММ.ГГГГ). По выполнению фотографии каждого листа (в правильном порядке и вертикальной ориентации – без перевернутых страниц) высылаете на проверку преподавателю.

Выполненное задание контрольной работы вы присылаете на @mail:

pushistav@mail.ru

В теме письма указываем:

ОД.07 Математика 18.12.25 (Фамилия Имя, группа)

К примеру:

ОД.07 Математика 18.12.25 (Иванов Иван, ТД и БУ 1/1-9/25)

Обязательно проверьте, что Вы состоите в чате:

https://t.me/+RX9Nb2N84woxOTdi

С уважением!

Преподаватель математики ШТЭК ДОННУЭТ

Бережная Валерия Александровна

Основная литература: Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы : базовый и углубленный уровни : учебник / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва [и др.]. – 10-е изд., стер. – Москва : Просвещение, 2022. – 463.