ثانوية : عيسى زريمش (حمام دباغ)	سلسلة تمارين الدوال الأسية	السنة الدراسية : 2017 – 2018 المستوى : 3 تر – 3 عتج

التمرين الأول:

$(I$ لتكن الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=e^{2x}-e^{x}-x+1$

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في م م م م $(O,\vec{i},\vec{j})$

1 / احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$.

2 / ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

3 / بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-x+1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

4 / أدرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

5 / أ * بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T) يوازي المستقيم (Δ)

ب * عين معادلة المماس (T) .

جـ * بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثييها .

8 / أرسم (Δ) ، (T) و (C_f) .

$(II$ نعتبر h الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x)=\dfrac{e^{2x}+xe^{2x}-e^{x}+1}{e^{2x}}$

1 / أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $h(x)=f(-x)$.

2 / استنتج أنه يوجد تحويل نقطي بسيط يحول (C_f) إلى (C_h)

3 / أنشئ في نفس المعلم السابق (C_h) .

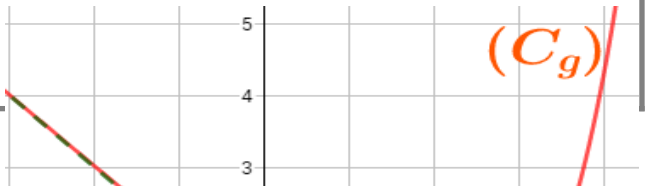
$(III$ نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=\sqrt{f(x)}$

استنتج اتجاه تغير الدالة h على المجال $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها .

التمرين الثاني :

$(I$ نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=e^{x-2}+1-x$

في الشكل الآتي المنحنى (C_g) الممثل لها في م م م م $(O,\vec{i},\vec{j})$.



بقراءة بيانية :

1)عين $g(2)$ و $g'(2)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[g(x)-(x-1)\right]$.

2) عين اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

3) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

$(II$ نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x)=x-1+\frac{x}{e^{x-2}}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في م م م م $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1)أ. احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

ب. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]$ ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C_f) .

2)أ.بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $\mathbb{R}$ و :

$$f'(x)=\frac{g(x)}{e^{x-2}}$$

ب.استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

ج.بينأن النقطة التي فاصلتها 2 هي نقطة انعطاف للمنحنى (C_f) .

3)أ. بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (Δ) معامل توجيهه 1 ، يطلب تعيين معادلته.

ب.بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0.1;0.2[$.

4)أ. ارسم (Δ) و (C_f) .

ب. ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $\dfrac{x}{e^{x-2}}=m+1$ .....(1)

ج. بين أنه إذا كانت المعادلة (1) تقبل حلين β و γ فإن $\beta e^{\gamma}=\gamma e^{\beta}$.

$(III$ نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ بـ :

$h(x)=(x-1)(1+e^{3-x})$ و (C_h) في المعلم السابق

بين أن من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $h(x)=f(x-1)+1$

استنتج أن (C_h) هو صورة (C_h) بواسطة تحويل بسيط يطلب تعيينه. ارسم (C_h).

التمرين الثالث :

(I) لتكن الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل :

$$g(x)=1+x+e^x$$

1 / ادرس تغيرات الدالة g

2 / برهن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلا وحيدا α. تحقق أن α من المجال $]-1.3;-1.2[$.

3 / حدد تبعا لقيم x إشارة $g(x)$، ثم استنتج إشارة $g(-x)$.

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي :

$f(x)=\dfrac{xe^x}{1+e^x}$ نسمي (Γ) المنحنى البياني لها .

1 / أ. أكتب $f'(x)$ بدلالة $g(x)$ ثم ادرس تغيرات الدالة f.

ب. برهن أن $f(\alpha)=1+\alpha$ . .

جـ. برهن أن المنحنى (Γ) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) معادلته : $y=x$.

د. اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (Γ) عند النقطة O مبدأ المعلم ، ثم ادرس وضعية المنحنى (Γ) بالنسبة للمماس (T) .

هـ. ارسم في معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ المنحنى (Γ) و (Δ) (تؤخذ $2cm$ كوحدة).

2 / H نقطة فاصلتها x (حيث $x>0$) وترتيبها معدوم ،المستقيم الموازي للمحور (yy') والمار من H يقطع (Γ) في النقطة M ويقطع المقارب (Δ) في النقطة N ، نضع $\varphi(x)=MN$

أ. بين أن $\varphi(x)=\dfrac{x}{1+e^x}$.

ب. برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا :

$$\varphi'(x)=\frac{e^x}{(1+e^x)^2}\cdot g(-x)$$

واستنتج أن MN يكون أكبر ما يمكن عندما $x=-\alpha$.

جـ. برهن أن $f(-\alpha)=1$.

3. أحسب $f(\ln 9-x)+f(x)$ ماذا تستنتج ؟

4. بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها α حيث : $-2<\alpha<\dfrac{-3}{2}$.

5.أنشئ المنحنى (C_f) ، (Δ) ، (Δ') والمماس (T) .

6.ناقش بيانيا وحسب قيم العدد الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $(m+2)(e^x+3)=4e^x$.

التمرين الخامس :

(I) نعتبر الدالة g للمتغير الحقيقي x المعرفة على $]-\infty;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=xe^x-1$

و ليكن (C_g) تمثيلها البياني في م م م م $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1 / أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ ثم فسر هذه النهاية تفسيرا هندسيا .

2 / أدرس تغيرات الدالة g على $]-\infty;+\infty[$ ، ثم أنشئ جدول تغيراتها .

3 / بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0.56;0.57[$.

4 / استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x .

5 / أرسم (C_g) .

6 / m وسيط حقيقي ، ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $-xe^x+1=e^m$ في $\mathbb{R}$.

د. برهن أن المماس للمنحنى (Γ) عند النقطة A ذات الفاصلة $(-\alpha)$ يوازي المستقيم (Δ) .اكتب معادلته ثم ارسمه في نفس المعلم السابق.

3 / ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة التالية: $me^x + m + x = 0$.

التمرين الرابع :

f الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3}$$

وليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$، الوحدة $2cm$

1 . أ) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مائلين (Δ) و (Δ') معادلتيهما على الترتيب : $y = x + 2$ ، $y = x - 2$

ج) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيمين (Δ) و (Δ')

2. أ) بين أنه مهما كان العدد الحقيقي x فإن:

$$f'(x) = \left(\frac{e^x - 3}{e^x + 3}\right)^2$$

ب) أدرس اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ ، ثم شكل جدول تغيراتــها .

ج) أكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = \ln 3$ واستنتج من تغيرات الدالة f وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (T) ،مادا يمكن قوله عن النقطة $w(\ln 3; \ln 3)$.

II) لتكن الدالة G المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$G(x) = (ax + b)e^x - x$.

1 / عين العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $G'(x) = g(x)$.

2 /استنتج اتجاه تغير الدالة G على $\mathbb{R}$.

3 / بين أن منحنى الدالة G يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياها .

III) ليكن (Γ) المنحنى البياني للدالة $x \mapsto e^x$ و (P) المنحنى الممثل للدالة $x \mapsto \ln x$ في مستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$. و ليكن x عدد حقيقي موجب تماما . M نقطة من (Γ) فاصلتها x و N نقطة من (P) فاصلتها x (لدينا $e^x > \ln x$ من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x) .

1 / أثبت أن $MN = e^x - \ln x$.

2 / نضع من أجل كل عدد x من المجال $]0;+\infty[$: $f(x) = MN$.

أ * أدرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

ب * استنتج أن المسافة MN تكون أقصر ما يمكن لما $x = \alpha$ ثم عين حصرا للمسافة MN (في هذه الحالة) .

3 / باستعمال الجزء I) بين أن $e^\alpha = \frac{1}{\alpha}$.

4 / استنتج أن المماس لـ (Γ) عند النقطة ذات الفاصلة α و المماس لـ (P) عند النقطة ذات نفس الفاصلة متوازيان .

التمرين السادس :

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\left(ax^2+bx+c\right)e^{-x}$ ، حيث a ، b و c أعداد حقيقية. و (C_f) تمثيلها البياني في م م م م $(O,\vec{i},\vec{j})$.

$(I$ عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث يقبل (C_f) مماسا عند النقطة $A(0;-3)$ معامل توجيهه 3 والعدد $\sqrt{3}$ حلا للمعادلة $f(x)=0$

$(II$ نضع $f(x)=\left(x^2-3\right)e^{-x}$

1 / أحسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

2 / أدرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

3 / أكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة التي فاصلتها $x=0$.

4 / عين إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل.

5 / بين أن (C_f) له نقطتي انعطاف يطلب تعيين فاصلتيهما .

6 / أرسم (T) و (C_f)

7 / بين الدالة f هي حل للمعادلة $y+2y'+y''=2e^{-x}$

8 / m عدد حقيقي موجب تماما. ناقش بيانيا وحسب قيم العدد m عدد وإشارة حلول المعادلة $\ln(m)-\ln\left(x^2-3\right)+x=0$

التمرين السابع :

$(I$ 1 / حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية : $y'-2y=0.....(1)$

2 / نعتبر المعادلة التفاضلية التالية: $y'-2y=xe^x.....(2)$

u دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $u(x)=(ax+b)e^x$ حيث a و b عددان حقيقيان .

عين a و b حتى تكون الدالة u حلا للمعادلة التفاضلية (2) .

3 / بين أنه إذا كانت الدالة v حل للمعادلة التفاضلية (1) فإن الدالة $u+v$ حل للمعادلة التفاضلية (2).

4 / استنتج جميع حلول المعادلةالتفاضلية (2) ، ثم عين الحل الخاص الذي ينعدم من أجل 0 وليكن $f(x)$.

$(II$ g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=2e^x-x-2$

و (C_g) تمثيلها البياني في م م م $(O,\vec{i},\vec{j})$. (الشكل الآتي)

1 / بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلان في $\mathbb{R}$ أحدهما معدوم و الآخر α حيث : $-1,6<\alpha<-1,5$.

2 / استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x .

$(II$ f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=e^{2x}-(x+1)e^x$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس .

1 / عين نهاية الدالة f عند $-\infty$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

2 / بين أن من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $f(x)=xe^x\left(\frac{e^x}{x}-\frac{x+1}{x}\right)$ ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

3 / بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=e^xg(x)$ ثم استنتج جدول تغيرات الدالة f .

4 / بين أن $f(\alpha)=-\frac{\alpha^2+2\alpha}{4}$ ثم أعط حصرا للعدد $f(\alpha)$

5 /أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

6 / أرسم المماس (T) و المنحنى (C_f) .

$(III$ h دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$h(x)=(x+1)e^x-\left(e^{2x}+1\right)$

1 / أكتب $h(x)$ بدلالة $f(x)$

2 / أنشئ (C_h) التمثيل البياني للدالة h انطلاقا من التمثيل البياني (C_f) (مع الشرح).

التمرين الثامن : (بكالوريا 2013 عتج)

$(I$ f الدالة المعرفة على $]-\infty;1[$ كمايلي:

$f(x)=\frac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}$.

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1 / احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}}f(x)$ ثم استنتج المستقيمين المقاربين للمنحنى (C) .

2 / احسب $f'(x)$. بين أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$ ، ثم شكّل جدول تغيراتها .

3 / بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في $]-\infty;1[$ حلا وحيدا α . باستعمال جدول القيم أعلاه جِد حصرا للعدد α .

4 / ارسم المستقيمين المقاربين و المنحنى (C) ، ثم ارسم المنحنى (C') الممثل للدالة $|f|$.

5 /عين بيانيا مجموعة قيم الأعداد الحقيقية m

x	$f(x)$
0.20	0.037
0.21	0.016
0.22	−0.005
0.23	−0.026
0.24	−0.048
0.25	−0.070

التي من أجلها يكون للمعادلة $|f(x)|=m$ حلان مختلفان في الإشارة .

(II) g الدالة المعرفة على $]-\infty;1[$ بـ : $g(x)=f(2x-1)$. (عبارة $g(x)$ غير مطلوبة)

1 / ادرس تغيرات الدالة g على $]-\infty;1[$ ثمّ شكل جدول تغيراتها .

2 / أ) تحقق من أن $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=0$ ، ثمّ بيّن أن : $g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=2f'(\alpha)$.

ب) استنتج معادلة (T) المماس لمنحنى الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+1}{2}$.

ج) تحقق من أن : $y=\frac{2}{(\alpha-1)^3}x-\frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ ، معادلة للمستقيم (T) .

التمرين التاسع :

(I) لتكن الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$g(x)=-4+(4-2x)e^x$

1. احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ (نذكر أن $\lim\limits_{x\to-\infty}ue^u=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$

2. ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم أنجز جدول تغيراتها.

3. احسب $g(0)$ ،ثم بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.59<\alpha<1.60$

4. استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\frac{2x-2}{e^x-2x}$

نسمي (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و فسر النتيجة هندسيا.

2. تحقق انه من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\frac{g(x)}{(e^x-2x)^2}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3. عين دون حساب : $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ و فسر النتيجة بيانيا.

4. بين أن $f(\alpha)=\frac{2-\alpha}{\alpha-1}$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

5. احسب $f(1)$ ، $f(-1)$ ، $f(2)$ و $f(-2)$ ثم أنشئ (C_f)

I) g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي:

$$g(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}+1$$

1/ احسب نهايات الدالة g عند أطراف مجالات مجموعة تعريفها .

2 / استنتج المستقيمات المقاربة للمنحنى

3/ بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $g'(x)=-\left(\frac{2x+1}{x^3}\right)e^{\frac{1}{x}}$

4 / استنتج اتجاه تغير الدالة g و شكل جدول تغيراتها .

5 / من جدول تغيرات الدالة g استنتج إشارة $g(x)$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي :

$$f(x)=\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$$ من أجل $x\neq 0$ و $f(0)=0$

(C_f) التمثيل البياني لدالة f في م م م م م $(O,\vec{i},\vec{j})$

1 / ادرس استمرارية الدالة f عند 0 .

2 / ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند 0 ، فسر النتيجة هندسيا .

3 / احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

4 / بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $f'(x)=\frac{g(x)}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}$

5 / استنتج تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

6 / بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

7/ أنشئ المنحنى (C_f) .

III) لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يأتي:

$u_0=\alpha$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=u_ne^{-u_n}$ ،حيث α هو العدد الحقيقي المعرف في الجزء I.3.

1. برهن بالتراجع، انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n\geq 0$

2. بين أن المتتالية (u_n) متناقصة.

3. هل المتتالية (u_n) متقاربة؟ إذا كانت كذلك فما هي نهايتها؟

4. نعتبر المتتالية العددية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$w_n=\ln u_n$

أ- بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n=w_n-w_{n+1}$

ب- نضع من اجل كل عدد طبيعي n : $S_n=u_0+u_1+...+u_n$

بين انه: $S_n=w_0-w_{n+1}$

جـ- احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$