

Тема уроку: Властивості тригонометричних функцій.

Мета уроку: Вивчення властивостей тригонометричних функцій $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ (область визначення; область значень; парність (непарність); симетричність графіків; періодичність; нулі; проміжки спадання (зростання); проміжки знакопостійності; найбільші і найменші значення).

I. Перевірка домашнього завдання.

Перевірити правильність побудови графіків функцій вправи № 28 (а—г) за рисунками, зробленими до уроку.

II. Вивчення властивостей тригонометричних функцій.

Властивості вивчених тригонометричних функцій зручно записати в таблицю 5. При заповненні таблиці можливі такі коментарі:

1. Вирази $\sin x$ і $\cos x$ визначені для будь-яких x , оскільки для будь-якого числа x можна знайти координати точки P_α , одиничного кола.

Вираз $\operatorname{tg} x$ має смисл при будь-якому x , крім чисел виду $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Вираз $\operatorname{ctg} x$ має смисл при будь-якому x , крім чисел виду $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

2. Оскільки $\sin x$ і $\cos x$ — це ордината і абсциса точки P_α одиничного кола, то областю значення синуса і косинуса є проміжок $[-1; 1]$.

Оскільки $\operatorname{tg} \alpha$ — це ордината точки P_α лінії тангенсів, то областю значень тангенса є $\mathbb{R}$.

Оскільки $\operatorname{ctg} \alpha$ — це абсциса точки Q_α лінії котангенсів, то областю значень котангенса є $\mathbb{R}$.

3. Оскільки точки P_α і $P_{-\alpha}$ одиничного кола (рис. 75) симетричні відносно осі OX , то ці точки мають однакові абсциси і протилежні ординати, тобто $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$; $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$.

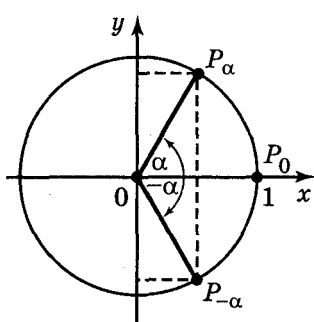


Рис. 75

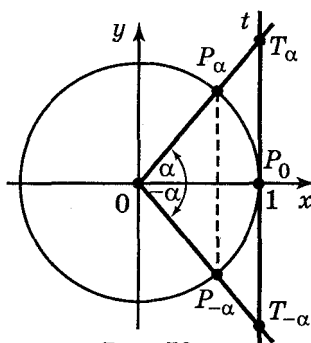


Рис. 76

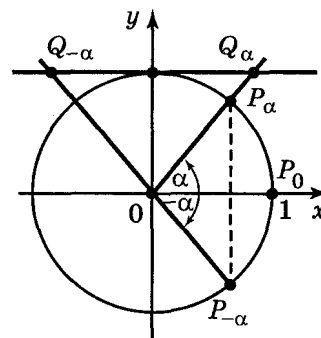


Рис. 77

Оскільки точки T_α і $T_{-\alpha}$ симетричні відносно P_0 лінії тангенсів, то $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$.

Оскільки точки Q_α і $Q_{-\alpha}$ симетричні (рис. 77) відносно

точки $P_{\pi/2}$ лінії котангенсів, то $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$.

Можна довести аналітичне, що $\operatorname{tg} \alpha$ і $\operatorname{ctg} \alpha$ непарні:

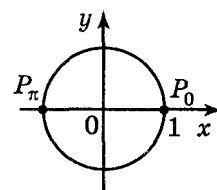


Рис. 78

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\cos \alpha}{-\sin \alpha} = -\operatorname{ctg} \alpha$$

4. Див. урок 8.

5. Ординату, рівну нулю, мають дві точки (рис. 78) одиничного кола: $(1; 0)$ і $(-1; 0)$. Ці точки утворюються із точки $(1; 0)$ поворотом на кути $0, \pi, 2\pi, 3\pi$ і т. д., а також на кути $-\pi, -2\pi, \dots$. Отже, $\sin x = 0$, якщо $x = nk, n \in \mathbb{Z}$.

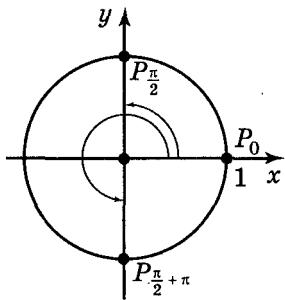


Рис. 79

Абсцису, рівну нулю, мають дві точки одиничного кола: $(0; 1)$ і $(0; -1)$. Ці точки утворюються із точки $(1; 0)$ поворотом

на кути $\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + \pi; \frac{\pi}{2} + 2\pi$ і т. д., а також на кути $-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}$

$+ \pi; -\frac{\pi}{2} + 2\pi$, тобто на кути $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ (рис. 79). Отже,

$\cos x = 0$, якщо $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

7. 8. Див. урок 9.

9. 10. Якщо кут α змінюється від $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, то ордината точки P_α збільшується від -1 до 1 , тобто $\sin \alpha$ зростає на проміжку

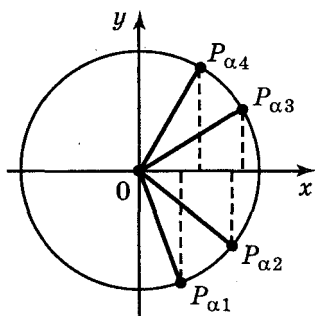


Рис. 80

$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, враховуючи, що найменшим періодом синуса є 2π , робимо висновок, що $\sin \alpha$ зростає на проміжку

$\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right], n \in \mathbb{Z}$ (рис. 80). Якщо кут α змінюється

від $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{2}$, то ордината точки P_α зменшується від 1 до

-1 , тобто $\sin \alpha$ спадає на проміжку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$. Враховуючи,

що найменший період синуса є 2π , робимо висновок, що $\sin \alpha$ спадає на

проміжках $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right], n \in \mathbb{Z}$.

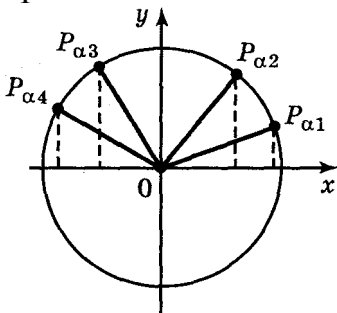


Рис. 81

Якщо кут α змінюється від 0 до π , то абсциса точки P_α зменшується від 1 до -1 , тобто $\cos \alpha$ спадає на проміжку $[0; \pi]$, якщо кут α змінюється від $-\pi$ до 0 , то абсциса точки P_α збільшується від -1 до 1 , тобто $\cos \alpha$ зростає (рис. 81). Враховуючи, що найменший період косинуса є 2π , робимо висновок, що функція $\cos \alpha$ спадає на проміжках $[2\pi n; \pi + 2\pi n]$ і зростає на проміжках $[-\pi + 2\pi n; 2\pi n], n \in \mathbb{Z}$.

При зміні кута α від $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ ордината точки T_α лінії тангенсів збільшується від $-\infty$ до $+\infty$, тобто $\operatorname{tg} \alpha$ зростає на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Враховуючи, що найменший додатний період тангенса є π , робимо висновок, що $\operatorname{tg} \alpha$ зростає на кожному з проміжків $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$ (рис. 82).

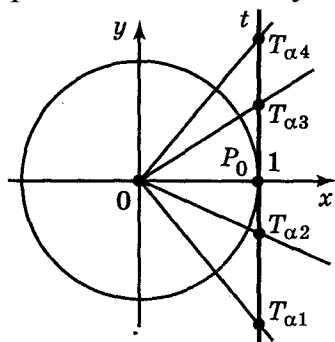


Рис. 82

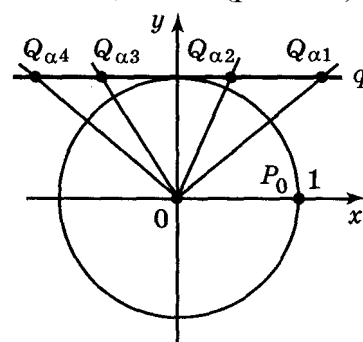


Рис. 83

При зміні кута α від 0 до π абсциса точки Q_α лінії котангенсів зменшується від $+\infty$ до $-\infty$, тобто $\operatorname{ctg} \alpha$ спадає на проміжку $(0; \pi)$. Враховуючи, що найменший додатний період котангенса є π , робимо висновок, що $\operatorname{ctg} \alpha$ спадає на кожному з проміжків $(\pi n; \pi + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$ (рис. 83).

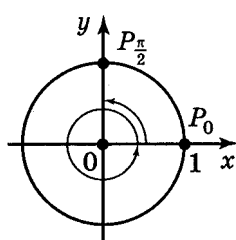


Рис. 84

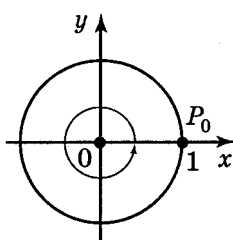


Рис. 85

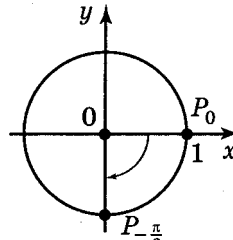


Рис. 86

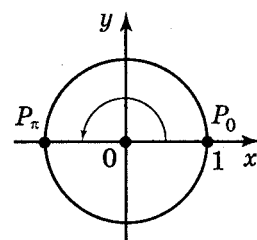


Рис. 87

11. Ординату, рівну 1, має точка $(0; 1)$ одиничного кола (рис. 84). Цю точку отримаємо із точки $(1; 0)$ поворотом на кути $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$. Отже, $\sin x = 1$, якщо $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Абсцису, рівну 1, має точка (рис. 85), утворена із точки $(1; 0)$ поворотом на кути $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Отже, $\cos x = 1$, якщо $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

12. Ординату, рівну -1, має точка (рис. 86), утворена із точки $(1; 0)$ поворотом на кут $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Отже, $\sin x = -1$, якщо $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Абсцису, рівну -1, має точка, утворена із точки P_α поворотом (рис. 87) на кут $\pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Отже, $\cos x = -1$, якщо $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

III. Застосування властивостей тригонометричних функцій до розв'язування вправ.

Виконання вправ

1. Використовуючи властивості функції $y = \sin x$, порівняйте числа:

- а) $\sin \frac{13\pi}{7}$ і $\sin \frac{11\pi}{7}$; б) $\sin \left(-\frac{8\pi}{7}\right)$ і $\sin \left(-\frac{9\pi}{8}\right)$; в) $\sin 3$ і $\sin 4$; г) $\sin 1^\circ$ і $\sin 1$.

Відповідь: а) $\sin \frac{13\pi}{7} > \sin \frac{11\pi}{7}$; б) $\sin \left(-\frac{8\pi}{7}\right) > \sin \left(-\frac{9\pi}{8}\right)$;
в) $\sin 3 > \sin 4$; г) $\sin 1^\circ < \sin 1$.

2. Розташуйте числа в порядку зростання:

- а) $\sin 20^\circ$; $\sin 85^\circ$; $\sin 30^\circ$; б) $\sin 0,2$; $\sin 0,3$; $\sin 0,1$; в) $\sin 2$; $\sin (-2)$; $\sin (-1)$; $\sin 1$.

Відповідь: а) $\sin 20^\circ$; $\sin 30^\circ$; $\sin 85^\circ$;

б) $\sin 0,1$; $\sin 0,2$; $\sin 0,3$; в) $\sin (-2)$; $\sin (-1)$; $\sin 1$; $\sin 2$.

3. Використовуючи властивості функції $y = \cos x$, порівняйте числа:

- а) $\cos 2,52$ і $\cos 2,53$; б) $\cos (-4,1)$ і $\cos (-4)$; в) $\cos 1$ і $\cos 3$; г) $\cos 4$ і $\cos 5$.

Відповідь: а) $\cos 2,52 > \cos 2,53$; б) $\cos (-4,1) > \cos (-4)$;

в) $\cos 1 > \cos 3$; г) $\cos 4 < \cos 5$.

4. Розташуйте числа в порядку зростання:

- а) $\cos 13^\circ$; $\cos 53^\circ$; $\cos 23^\circ$; б) $\cos 0,3$; $\cos 0,6$; $\cos 0,9$; в) $\cos 2$; $\cos 4$; $\cos 6$.

Відповідь: а) $\cos 53^\circ$; $\cos 23^\circ$; $\cos 13^\circ$; б) $\cos 0,9$; $\cos 0,6$; $\cos 0,3$;

в) $\cos 4$; $\cos 2$; $\cos 6$.

5. Використовуючи властивості функції $y = \operatorname{tg} x$, порівняйте числа:

- а) $\operatorname{tg} (-2,6\pi)$ і $\operatorname{tg} (-2,61\pi)$; б) $\operatorname{tg} 2,7\pi$ і $\operatorname{tg} 2,75\pi$; в) $\operatorname{tg} 2$ і $\operatorname{tg} 3$; г) $\operatorname{tg} 1$ і $\operatorname{tg} 1,5$.

Відповідь: а) $\operatorname{tg} (-2,6\pi) > \operatorname{tg} (-2,61\pi)$; б) $\operatorname{tg} 2,7\pi < \operatorname{tg} 2,75\pi$;

в) $\operatorname{tg} 2 < \operatorname{tg} 3$; г) $\operatorname{tg} 1 < \operatorname{tg} 1,5$.

6. Розташуйте числа в порядку зростання:

- а) $\operatorname{tg} 25^\circ$; $\operatorname{tg} 65^\circ$; $\operatorname{tg} 15^\circ$; б) $\operatorname{tg} (-1)$; $\operatorname{tg} (-2)$; $\operatorname{tg} (-3)$; в) $\operatorname{tg} (-5)$; $\operatorname{tg} (-3)$; $\operatorname{tg} 3$.

Відповідь: а) $\operatorname{tg} 15^\circ$; $\operatorname{tg} 25^\circ$; $\operatorname{tg} 65^\circ$; б) $\operatorname{tg} (-1)$; $\operatorname{tg} (-3)$; $\operatorname{tg} (-2)$;

в) $\operatorname{tg} 3$; $\operatorname{tg} (-3)$; $\operatorname{tg} (-5)$.

Таблиця 5

№ п/п	Властивості	Функція			
		$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \operatorname{tg} x$	$y = \operatorname{ctg} x$
1	2	3	4	5	6
1.	$D(y)$	R	R	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$ $n \in Z$	$x \neq \pi n$, $n \in Z$
2.	$E(y)$	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$	R	R
3.	Парність	непарна $\sin(-x) = -\sin x$	парна $\cos(-x) = \cos x$	непарна $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$	непарна $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$
4.	Періодич- ність, період	2π	2π	π	π
5.	Нулі функції	$\pi n, n \in Z$	$\frac{\pi}{2} + \pi n$ $n \in Z$	$\pi n, n \in Z$	$\frac{\pi}{2} + \pi n$ $n \in Z$
6.	Якщо $x = 0$	$\sin x = 0$	$\cos x = 1$	$\operatorname{tg} x = 0$	не визначено

1	2	3	4	5	6
7.	Проміжки, на яких $y > 0$	$(2\pi n; \pi + 2\pi n)$	$\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$	$\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$	$\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$
8.	Проміжки, на яких $y < 0$	$(-\pi + 2\pi n; 2\pi n)$	$\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right)$
9.	Проміжки зростання	$\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$	$[-\pi + 2\pi n; 2\pi n]$	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$	немає
10.	Проміжки спадання	$\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$	$[2\pi n; \pi + 2\pi n]$	немає	$(\pi n; \pi + \pi n)$
11.	Найменші значення	$y = -1$, якщо $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$	$y = -1$, якщо $x = \pi + 2\pi n$	немає	немає
12.	Найбільші значення	$y = 1$, якщо $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$	$y = 1$, якщо $x = 2\pi n$	немає	немає