A. ĐẶT VẤN ĐỀ

I. Lí do chọn đề tài

Luật Giáo dục điều 24 khoản 2 đã ghi “Phương pháp giáo dục phổ thông phải phát huy được tính tích cực, tự giác, chủ động, sáng tạo của học sinh, phù hợp với đặc điểm từng lớp học, môn học, bồi dưỡng phương pháp tự học, rèn luyện kĩ năng vận dụng kiến thức vào thực tiễn, tác động đến tình cảm, đem lại niềm vui, hứng thú học tập cho học sinh”.

Đặc biệt, đối với môn Toán thì yếu tố sáng tạo là vô cùng cần thiết, nó không những đòi hỏi phải nắm vững kiến thức mà trên cơ sở đó người học còn phải biết tổng hợp các kiến thức để tìm ra kiến thức mới, chưa có sẵn trong sách giáo khoa cũng như sách bài tập.

Tuy không phải là giáo viên trực tiếp tham gia ôn thi THPT tại trường sở tại nhưng qua tìm hiểu tài liệu và những năm đã bồi dưỡng, ôn luyện thi THPT những năm trước tôi nhận thấy cần phải có một hệ thống kiến thức về chuyên đề phương trình bậc hai có chứa tham số. Qua chuyên đề “ phương trình bậc hai chứa tham số” phần nào giúp các em học sinh có kĩ năng làm các bài tập liên quan.

II. Mục đích nghiên cứu

Giúp học sinh có kỹ năng giải một số dạng bài toán “ phuong trình bậc hai chứa tham số” thường xuất hiện trong đề thi THPT của Bắc Giang và các tỉnh bạn.

III. Nhiệm vụ nghiên cứu

Nghiên cứu hệ thống các dạng bài tập về “ phương trình bậc hai chứa tham số” giúp

IV. Phạm vi nghiên cứu

Đưa ra cách giải một số dạng bài tập liên quan tới phương trình bậc hai có chứa tham số.

V. Phương pháp nghiên cứu

- Nghiên cứu tài liệu.
- Qua kinh nghiệm giảng dạy ôn thi THPT với các đối tượng học sinh.

B. NỘI DUNG

1. Những thuận lợi và khó khăn

1.1. Thuận lợi

- Đây là một dạng toán quan trọng và đặc trưng của chuyên đề phương trình bậc hai.
- Các bài toán về phương trình bậc hai chứa tham số thường xuất hiện trong đề thi THPT ở các năm gần đây nên được học sinh chú ý và ôn luyện.
- Học sinh có kiến thức về phương trình bậc hai và hệ thức Vi-et nên không bỡ ngỡ nhiều vói dạng toán này.

1.2. Khó khăn

- Một số học sinh gặp khó khăn trong việc biến đổi các biểu thức liên quan tới hệ thức Vi-et.
- Kĩ năng lập luận và biến đổi của các em còn hạn chế.
- Một số dạng toán trong chuyên đề còn mới mẻ nên không tránh khỏi sự bỡ ngỡ của các em học sinh.

2. Các bài toán về phương trình bậc hai chứa tham số

<u>Bài toán 1</u>: Tìm điều kiện của m để phương trình có nghiệm, có nghiệm kép, vô nghiệm, có 2 nghiệm phân biệt.

Phương pháp giải:

<u>Bước 1</u>: Xác định các hệ số a, b, c (hoặc a, b, c, b') (nếu chưa thành thạo).

<u>Bước 2</u>: Tính Δ hoặc Δ'

<u>Bước 3</u>. Kiểm tra các điều kiện

+ Nếu $\Delta<0$ (hoặc $\Delta'<0$) thì phương trình vô nghiệm.

+ Nếu $\Delta=0$ (hoặc $\Delta'=0$) thì phương trình có nghiệm kép

+ Nếu $\Delta>0$ (hoặc $\Delta'>0$) thì phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

+ Nếu $\Delta\ge 0$ (hoặc $\Delta'\ge 0$) thì phương trình có nghiệm.

<u>+ Lưu ý:</u>

- Trong một số bài toán tìm điều kiện để phương trình có nghiệm mà hệ số a chứa tham số ta phải xét trường hợp a = 0. Sau đó xét trường hợp $a\neq 0$ và làm như các bước ở trên.

- Trong một số bài toán tìm điều kiện của m để phương trình có nghiệm, có nghiệm kép, vô nghiệm, có 2 nghiệm phân biệt ma hệ số a chứa tham số ta phải tìm điều kiện để phương trình đó là phương trình bậc hai ($a \neq 0$)

Ví dụ 1: Cho phương trình (m-1)x^2 + 2.(m+2)x+m = 0 (1).

a, Tìm điều kiện của m để phương trình có nghiệm

b, TÌm điều kiện của m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

Giải

a,

+ Khi m-1 = 0 hay m =1, phương trình (1) trở thành: 6x + 1 = 0.

Đó là phương trình bậc nhất và có nghiệm $x = \frac{-1}{6}$.

+ Khi $m - 1 \neq 0$ hay $m \neq 1$. Ta có

$$\Delta' = (m+2)^2 - m.(m-1) = m^2 + 4m + 4 - m^2 + m = 5m + 4$$

Để phương trình có nghiệm thì $\Delta' \geq 0$, tức là: $5m + 4 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{-4}{5}$

Kết hợp 2 trường hợp ta được khi $m \geq \frac{-4}{5}$ thì phương trình 1 có nghiệm.

b, Để phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt thì $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases}$, tức là:

$$\begin{cases} m - 1 \neq 0 \\ 5m + 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \geq \frac{-4}{5} \end{cases}$$

Vậy với $m \neq 1$ và $m \geq \frac{-4}{5}$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt.

<u>Bài tập áp dụng</u>

Bài 1: Tìm điều kiện của m để các phương trình sau có nghiệm

a, x^2 - x - 2m = 0 b, 5x^2 + 3x + m-1 = 0 c, $mx^2 - x - 5 = 0$ d, $(m^2 + 1)x^2 - 2(m+3)x + 1 = 0$

Bài 2: Tìm điều kiện của m để các phương trình sau có 2 nghiệm phân biệt

a, $3x^2 - 2x + m = 0$ b, $x^2 + 2(m-1)x - 2m+5 = 0$

Bài 3. Tìm điều kiện của m để phương trình vô nghiệm

a, $(m-1)x^2 + 2x + 11 = 0$ b, $x^2 + (m-1)x+m-2=0$

<u>Bài toán 2:</u> Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm, 2 nghiệm phân biệt với mọi m.

Phương pháp giải:

Bước 1: Tính Δ hoặc Δ'

Bước 2:

+ Chứng minh $\Delta \geq 0$ thì phương trình luôn có nghiệm với $\forall m$

+ Chứng minh $\Delta > 0$ thì phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với $\forall m$.

(Chú ý sử dụng hằng đẳng thức ta tách các biểu thức thành bình phương của một biểu thức cộng với một số thực dương; Các biểu thức sau luôn không âm: $\sqrt{A}$; A^2, ...)

Lưu ý: Ta có thể chứng minh phương trình có 2 nghiệm phân biệt với $\forall m$ bằng cách chứng minh a.c < 0 (a, c trái dấu).

Ví dụ 1: Cho phương trình $x^2 - (m+1)x + m = 0$ (1) (x là ẩn số, m là tham số)

Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi m

Giải

Ta có $\Delta = [-(m+1)]^2 - 4m = (m+1)^2 - 4m = m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2$

Nhận thấy $\Delta = (m-1)^2 \geq 0, \forall m$

Suy ra, phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi m.

Ví dụ 2: Cho phương trình x^2 - 2.(m-1)x + m-3 = 0 (1) (x là ẩn số, m là tham số)

Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt.

Giải

+ Ta có $\Delta' = [-(m-1)]^2 - (m-3) = (m-1)^2 - (m-3) = m^2 - 2m + 1 - m + 3 = m^2 - 3m + 4$

Ta có m^2 - 3m+ 4 = $(m^2 - 2.\frac{3}{2}m + \frac{9}{4}) + \frac{7}{4} = (m - \frac{3}{2})^2 + \frac{7}{4} > 0, \forall m$

Suy ra $\Delta > 0, \forall m$

Vậy phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt.

<u>Bài tập áp dụng</u>

Bài 1: Chứng minh phương trình ẩn x sau luôn có nghiệm hoặc có 2 nghiệm phân biệt.

a, x^2 - 2.(m+1)x + 2m+1 = 0 b, x^2 - 3x + 1-m^2 = 0

c, x^2 + (m+3)x + m+1 = 0

<u>Bài toán 3:</u> Xác định m để phương trình có 1 nghiệm bằng α cho trước. Với m vừa tìm được hãy tìm nghiệm còn lại

Phương pháp giải:

Bước 1: Thay $x = \alpha$ vào phương trình bậc 2, sau đó giải phương trình ẩn m để tìm ra giá trị của m.

Bước 2: Thay giá trị m vừa tìm được vào phương trình, sau đó dùng hệ thức viet để tính nghiệm còn lại bằng cách $x_2 = S - x_1$ (S: là tổng 2 nghiệm của phương trình).

Ví dụ: Cho phương trình: x^2 - 2.(m-1)x+2m-3 = 0 (1)

Xác định m để phương trình có 1 nghiệm bằng -1 và khi đó hãy xác định nghiệm còn lại của phương trình.

Giải:

+ Thay x = -1 vào phương trình (1), ta có

$(-1)^2 - 2.(m-1).(1) + 2m-3 = 0 \Leftrightarrow 4m-4=0 \Leftrightarrow m=1$

+ Thay m = 1 vào phương trình (1) ta được phương trình:

$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$

Vậy với m=1 thì phương trình có 1 nghiệm là x = -1 và nghiệm còn lại là x = 1.

Bài tập áp dụng

Bài 1: Tìm m để các phương trình sau có một nghiệm số cho trước (...). Tìm nghiệm còn lại.

a, $x^2 - (m+2)x + m+1 = 0$ (x=1)

b, $x^2 + 2x + m^2 - 2m = 0$ (x=-3)

c, $mx^2 + 2x + 1-m = 0$ (x=2)

<u>Bài toán 4:</u> Tìm điều kiện của m để phương trình bậc 2 có 2 nghiệm x_1, x_2 thoả mãn điều kiện: $mx_1 + nx_2 = p$ (1). (m, n, p là các số cho trước).

Phương pháp giải:

Bước 1: Tìm điều kiện của m để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 ($\Delta \geq 0$ hoặc $\Delta' \geq 0$) (*)

Bước 2: Lập hệ thức vi-et về tổng, tích 2 nghiệm của phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} (2) \\ x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} (3) \end{cases}$$

Bước 3: Giải hệ phương trình sau để tìm ra x_1, x_2

$$\begin{cases} mx_1 + nx_2 = p \\ x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} \end{cases}$$

Bước 4: Thay x_1, x_2 vào (3) --> m cần tìm.

Bước 5: Đối chiếu giá trị m vừa tìm được với điều kiện ở bước 1 --> kết luận.

Lưu ý: Cũng có thể kết hợp (1) với (3) để có hệ phương trình như ở bước 3. Tìm được x_1, x_2 rồi thì tiếp tục làm bước 4 và bước 5.

Ví dụ: Cho phương trình $x^2 - 8x + m = 0$. Tìm giá trị của m để phương trình đã cho có 2 nghiệm thoả mãn $x_1 - x_2 = 2$ (1).

Giải:

Ta có: $\Delta' = (-4)^2 - m = 16 - m$.

Để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 thì $\Delta \geq 0$, tức là: $16 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 16$ (*).

Theo hệ thức vi-et ta có: $x_1 + x_2 = 8$ (2); $x_1.x_2 = m$ (3).

Kết hợp (1) với (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + x_2 = 8 \\ x_1 - x_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

Thay $x_1 = 5$, $x_2 = 3$ vào (3) ta có: m=5.3=15 (thoả mãn đk *)

Vậy với m = 15 thì phương trình trên có 2 nghiệm x_1,x_2 thoả mãn x_1-x_2=2.

Lưu ý: Các bài toán tìm m để phương trình bậc 2 (chứa tham số m) có 2 nghiệm đối nhau ($x_1 = -x_2$), có nghiệm này bằng k lần nghiệm kia ($x_1 = kx_2$), có nghiệm này lớn hơn nghiệm kia k đơn vị ($x_1 = x_2 + k$ hay x_1-x_2 =k),...ta có thể quy về bài toán 4.

<u>Bài toán 5:</u> Tìm điều kiện của m để phương trình bậc hai có 2 nghiệm thoả mãn một biểu thức về x_1, x_2 (sử dụng hệ thức vi-et)

Phương pháp giải

Bước 1: Tìm điều kiện của m để phương trình bậc hai có 2 nghiệm x_1, x_2 ($\Delta \geq 0$ hoặc $\Delta' \geq 0$) (*).

Bước 2: Lập hệ thức vi-et về tổng, tích 2 nghiệm của phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} (2) \\ x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} (3) \end{cases}$$

Bước 3: Biến đổi các biểu thức ở đầu bài về dạng tổng 2 nghiệm, tích 2 nghiệm, sau đó thay kết quả ở bước 2 vào biểu thức rồi giải phương trình ẩn m thu được.

Các biểu thức thường gặp:

a, $x_1^2+x_2^2=k \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=k$

b, $x_1^3+x_2^3=k \Leftrightarrow (x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=k$

c, $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=k \Leftrightarrow \frac{x_1+x_2}{x_1.x_2}=k$

d, $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=k \Leftrightarrow \frac{x_1^2+x_2^2}{x_1.x_2}=k \Leftrightarrow \frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}=k$

Bước 4: Đối chiếu kết quả vừa tìm được ở bước 3 với điều kiện ở bước 1--> kết luận.

Lưu ý: Các biểu thức khác chúng ta cũng làm tương tự, sử dụng phương pháp hằng đẳng thức, đặt nhân tử chung, quy đồng phân thức, ... để đưa về dạng tổng, tích các nghiệm.

Ví dụ: Cho phương trình x^2 - 4x + m-1 = 0 (1). Tìm điều kiện của m để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 thoả mãn: $x_1^2 + x_2^2 = 12$.

Giải:

Ta có $\Delta' = (-2)^2-(m-1)=4-m+1=5-m$

Để phương trình (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 thì $\Delta' \geq 0$, tức là: $5-m\geq 0 \Leftrightarrow m\leq 5$ (*)

Theo hệ thức vi-et ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=4 \\ x_1x_2=m-1 \end{cases}$

Ta có: $x_1^2+x_2^2=12 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=12$

$\Leftrightarrow 4^2-2.(m-1)=12 \Leftrightarrow 16-2m+2=12 \Leftrightarrow m=3$

Nhận thấy m = 3 thoả mãn điều kiện (*).

Vậy với m = 3 thì phương trình (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 thoả mãn: $x_1^2 + x_2^2 = 12$.

Bài toán 6: Lập phương trình bậc hai khi biết 2 nghiệm x_1, x_2

Trường hợp 1: 2 nghiệm $x_{,}x_2$ là 2 số cụ thể:

Bước 1: Tính tổng $S = x_1 + x_2$, tích $P = x_1x_2$.

Bước 2: Lập phương trình: x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $x^2 - Sx + P = 0$

Trường hợp 2: x_1, x_2 là nghiệm của phương trình ban đầu. Lập phương trình có nghiệm là biểu thức chứa x_1, x_2

Phương pháp giải:

Bước 1: Lập tổng (S) 2 biểu thức chứa x_1, x_2; tích (P) 2 biểu thức chứa x_1, x_2 (biến đổi như bài toán 5)

Bước 2: Lập hệ thức vi-et cho phương trình ban đầu.

Bước 3: Lập phương trình $x^2 - Sx + P = 0$. Đây là phương trình cần tìm

Ví dụ:

a, Lập phương trình bậc hai biết 2 nghiệm của nó là: $x_1 = 7$, $x_2 = 10$

b, Cho x_1, x_2 phương trình $x^2 - 2(m-1)x-1=0$ (1). Hãy lập phương trình có 2 nghiệm $\frac{1}{x_1^2}$ và $\frac{1}{x_2^2}$

Giải:

a, Ta có: $S = x_1 + x_2 = 7+10 =17$

$P = x_1x_2 = 7.10 =70$

--> x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $x^2 - 17x +70 =0$

b, Nhận thấy a = 1, c = -1 --> a.c = -1 < 0 --> phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2.

Theo hệ thức vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2.(m-1) \\ x_1.x_2 = -1 \end{cases}$

Ta có: $S = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2x_2^2} = \frac{(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2}{(x_1x_2)^2} = \frac{[2.(m-1)]^2 - 2.(-1)}{(-1)^2} = 2.(2m^2 - 4m + 3)$

$$P = \frac{1}{x_1^2}.\frac{1}{x_2^2} = \frac{1}{(x_1.x_2)^2} = \frac{1}{(-1)^2} = 1$$

Phương trình cần lập là: $x^2 - 2.(2m^2 - 4m + 3)x + 1 = 0$

Bài tập áp dụng

Bài 1: Lập các phương trình có 2 nghiệm

a, $x_1 = 7$, $x_2 = 10$; b, $x_1 = -3$, $x_2 = 8$

c, $x_1 = \frac{5-\sqrt{6}}{2}, x_2 = \frac{5+\sqrt{6}}{2}$ d, $x_1 = \frac{-1}{3}, x_2 = \frac{5}{2}$

Bài 2: Cho phương trình $-3x^2 + 8x - 2 = 0$. Lập phương trình có 2 nghiệm mà mỗi nghiệm gấp đôi mỗi nghiệm của phương trình đã cho.

Bài 3: Cho x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $x^2 - 12x + 11 = 0$. Lập phương trình có 2 nghiệm $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}$

Bài 4: Cho phương trình $x^2 + 2004^{2003}x + 1 = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2. Lập phương trình bậc hai ẩn y có 2 nghiệm là: $y_1 = x_1^2 + 1$, $y_2 = x_2^2 + 1$.

Bài 5: Cho phương trình $x^2 - 6x + 4 = 0$. Lập phương trình có 2 nghiệm bằng bình phương mỗi nghiệm của phương trình đã cho

(Các bài toán trên yêu cầu chung là không giải phương trình)

Bài toán 7: Tìm m để phương trình bậc hai có 2 nghiệm x_1, x_2. Sau đó tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của một biểu thức qua x_1, x_2.

Phương pháp giải

Bước 1: Tìm điều kiện của m để phương trình bậc hai có 2 nghiệm x_1, x_2 ($\Delta \geq 0$ hoặc $\Delta' \geq 0$) (*).

Bước 2: Lập hệ thức vi-et $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \\ x_1.x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$

Bước 3: Biến đổi biểu thức về dạng tổng và tích 2 nghiệm để có thể áp dụng hệ thức vi-et --> ta thu được biểu thức bậc 2 của m.

Các biểu thức thường gặp

a, $x_1^2 + x_2^2 = k \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = k$

b, $x_1^3 + x_2^3 = k \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = k$

c, $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = k \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{x_1.x_2} = k$

d, $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = k \Leftrightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1.x_2} = k \Leftrightarrow \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1x_2} = k$

Bước 4: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất

+ Nếu hệ số a của biểu thức m >0 ta có giá trị nhỏ nhất. Để tìm giá trị nhỏ nhất ta biến đổi biểu thức chứa m về dạng $A^2 + a \geq a, \forall m$, khi đó giá trị nhỏ nhất là a (phải chỉ rõ đạt được tại giá trị của m bằng bao nhiêu --> so với điều kiện ở bước 1 rồi kết luận).

+ Nếu hệ số a của biểu thức m < 0 ta có giá trị lớn nhất. Để tìm giá trị lớn nhất ta biến đổi biểu thức chứa m về dạng $a - A^2 \leq a, \forall m$, khi đó giá trị lớn nhất là a (phải chỉ rõ đạt được tại giá trị của m bằng bao nhiêu --> so với điều kiện ở bước 1 rồi kết luận).

Ví dụ: Cho phương trình $x^2 - (m+1)x+m=0$ (1)

Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình (1).

Tìm giá trị của m để $A = x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + 2007$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Giải:

+ Ta có: $\Delta = [-(m+1)]^2 - 4m = m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2 \geq 0, \forall m$

$\Rightarrow \Delta \geq 0, \forall m$

$\Rightarrow$ phương trình luôn có nghiệm với $\forall m$

+ Theo hệ thức vi-et ta có: $x_1 + x_2 = m + 1$; $x_1.x_2 = m$

+ Ta có $A = x_1x_2.(x_1 + x_2) + 2007 = m.(m+1)+2007 = m^2 + m + 2007$

= $m^2 + 2.m.\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 2006\frac{3}{4}$ = $(m+\frac{1}{2})^2 + 2006\frac{3}{4} \ge 2006\frac{3}{4}, \forall m$

Dấu " = " xảy ra $m+\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow m=\frac{-1}{2}$

Vậy với m = $\frac{-1}{2}$ thì biểu thức A đạt giá trị nhỏ nhất là $2006\frac{3}{4}$

Ví dụ: Cho phương trình $x^2 + 2mx + 2m-1 = 0$ (1) có 2 nghiệm x_1, x_2

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức A = $x_1^2x_2 + x_1x_2^2$

Giải:

+ Ta có $\Delta' = m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2 \ge 0, \forall m$

$\Rightarrow \Delta' \ge 0, \forall m$, phương trình luôn có nghiệm

+ Theo hệ thức vi-et ta có: $x_1 + x_2 = -2m$; $x_1x_2 = 2m-1$

+ Ta có: A = $x_1x_2.(x_1 + x_2)$ =-2m.(2m-1)= $-4m^2 + 2m$

= - ($4m^2$ - 2m) = - [$(2m)^2$ - 2. 2m. $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{4} - \frac{1}{4}$] = - [(2m- $\frac{1}{2}$ $)^2$ - $\frac{1}{4}$]

= $\frac{1}{4}$ - (2m- $\frac{1}{2}$ $)^2$ $\le \frac{1}{4}, \forall m$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 2m - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}$

KL:Vậy với m = $\frac{1}{4}$ thì biểu thức A đạt giá trị lớn nhất là $\frac{1}{4}$

Bài tập áp dụng

Bài 1: Cho phương trình $x^2 - 2mx + m-1 = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2

Tìm giá trị của m để A = $x_1^2 + x_2^2 + 1945$ đạt GTNN. TÌm giá trị đó.

Bài 2: Cho phương trình

a, $x^2 - 2mx + m^2 + m - 1 = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2

b, $x^2 - 2.(m+1)x + m^2 - 6m + 5 = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2

Tìm giá trị của m để tích 2 nghiệm của phương trình đạt GTNN

Bài 3: Cho phương trình $x^2 - (a-1)x - a^2 + a - 2 = 0$

a, Tìm a để tích 2 nghiệm của phương trình đạt GTLN

b, Tìm a để $A = x_1^2 + x_2^2 + 2010$ đạt GTNN

Bài toán 8: Cho x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình bậc 2. Tìm hệ thức liên hệ x_1, x_2 độc lập với m (không phụ thuôc vào m).

Phương pháp giải:

Bước 1: Tìm điều kiện của m để phương trình bậc hai có 2 nghiệm x_1, x_2 ($\Delta \geq 0$ hoặc $\Delta' \geq 0$) (*).

Bước 2: Lập hệ thức vi-et $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} (1) \\ x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} (2) \end{cases}$

Bước 3: Rút m từ (1) thế vào (2) (hoặc ngược lại) ta sẽ được hệ thức liên hệ.

(**Lưu ý**: Trong một số bài ta có thể cộng hoặc trừ 1 cho 2 --> ta thu được hệ thức cần tìm. Tuỳ bài toán vận dụng một cách linh hoạt để tìm được kết quả nhanh nhất).

Ví dụ: Cho phương trình $x^2 + 2mx + 2m - 1 = 0$

Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 độc lập với m

Giải:

+ Ta có: $\Delta' = m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2 \geq 0, \forall m$

--> Phương trình luôn có nghiệm với mọi m

+ Theo vi-et ta có: $x_1 + x_2 = -2m$ (1); $x_1x_2 = 2m-1$ (2)

Từ (1) --> $m = \dfrac{x_1 + x_2}{-2}$. Thế vào (2), ta được: $x_1x_2 = 2.\dfrac{x_1 + x_2}{-2}$ -1 $\Leftrightarrow x_1x_2 + x_1x_2 = -1$

Vậy hệ thức cần tìm là: $x_1x_2 + x_1x_2 = -1$

Bài tập áp dụng

Bài 1: Cho phương trình: x^2 - (2m - 3)x + m^2 - 3m = 0 (1)

a, Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi m.

b, Tìm hệ thức liên hệ giữa x1, x_2 độc lập với m.

Bài 2: Cho phương trình: x^2 + (2m - 1)x + m- 1 = 0 (1)

a, Tìm m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thoả mãn $3x_1 - 4x_2 = 11$.

b, Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 độc lập với m.

Bài toán 9: TÌm m để phương trình bậc hai có 2 nghiệm thoả mãn:

$x_1 < \alpha < x_2$ (α là số cho trước).

Phương pháp giải:

Bước 1: Tìm điều kiện của m để phương trình bậc hai có 2 nghiệm x_1, x_2 ($\Delta \geq 0$ hoặc $\Delta' \geq 0$) (*).

Bước 2: : Lập hệ thức vi-et $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} (1) \\ x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} (2) \end{cases}$

Bước 3: Từ giải thiết $x_1 < \alpha < x_2$ $\Rightarrow x_1 - \alpha < 0, x_2 - \alpha > 0$

$\Rightarrow (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) < 0 \Rightarrow x_1x_2 - \alpha(x_1 + x_2) + \alpha^2 < 0$ **(3)**

Bước 4: Thay (1), (2) vào (3) ta được bất phương trình ẩn m

Bước 5: Giải bất phương trình ẩn m vừa tìm được --> đối chiếu kết quả với điều kiện ở bước 1 ---> Kết luận.

Ví dụ: Cho phương trình x^2 - 2(m-1)x+2m-5 = 0 (1)

a, Chứng minh rằng phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m.

b, Tìm giá trị của m để pt có 2 nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $x_1 < 1 < x_2$.

Giải:

a, HS tự chứng minh.

b, Theo hệ thức vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1)(1) \\ x_1.x_2 = 2m-5(2) \end{cases}$

Từ giải thiết $x_1 < 1 < x_2$ $\Rightarrow x_1 - 1 < 0, x_2 - 1 > 0$

$\Rightarrow (x_1-1)(x_2-1) < 0 \Rightarrow x_1x_2 - (x_1+x_2) + 1 < 0$ **(3)**

Thay (1), (2) vào (3) ta có:

2m - 5 - (2m-2)+1 < 0 --> 0m - 2 < 0 (đúng với mọi m)

Vậy với mọi m thì phương trình trên có 2 nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $x_1 < 1 < x_2$.

Bài toán 10. Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có chứa tham số m.

a, Tìm điều kiện của m để phương trình có 2 nghiệm trái dấu.

b, Tìm điều kiện của m để phương trình có 2 nghiệm cùng dấu

c, Tìm điều kiện của m để phương trình có 2 nghiệm dương

d, Tìm điều kiện của m để phương trình có 2 nghiệm âm.

<u>**Phương pháp giải:**</u>

* Sử dụng các điều kiện dưới đây để hoàn thành bài toán

a, Phương trình có 2 nhiệm trái dấu $\Leftrightarrow P < 0$

b, Phương trình có 2 nghiệm cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \end{cases}$

c, Phương trình có 2 nghiệm dương $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$

d, Phương trình có 2 nghiệm âm $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$

(Trong đó: S là tổng 2 nghiệm, P là tích 2 nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$)

Bài tập áp dụng

Bài 1: Cho phương trình $x^2 + 3x - 2m + 1 = 0$

Tìm m để phương trình có 2 nghiệm cùng dấu.

Giải

Để phương trình trên có 2 nghiệm cùng dấu thì $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \end{cases}$, tức là:

$$\begin{cases} 9 - 4.(1 - 2m) \geq 0 \\ 1 - 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8m + 5 \geq 0 \\ 2m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \dfrac{-5}{8} \\ m < \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-5}{8} \leq m < \frac{1}{2}$$

Vậy với $\frac{-5}{8} \leq m < \frac{1}{2}$ thì phương trình trên có 2 nghiệm cùng dấu.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 1: Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m^2 + 3m + 2 = 0$

a, Tìm m dể phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt

b, Tìm giá trị của m thoả mãn $x_1^2 + x_2^2 = 12$ (x_1, x_2 là nghiệm của phương trình)

c, Tìm giá trị của m để tích 2 nghiệm đạt GTNN. Tìm giá trị đó.

(Đề thi tỉnh Hải Dương năm học 1999- 2000)

Bài 2: Cho phương trình $x^2 - 2mx + 2m - 5 = 0$

a, Chứng minh rằng phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m.

b, Tìm m để phương trình luôn có 2 nghiệm trái dấu.

c, Gọi 2 nghiệm của phương trình là x_1, x_2, tìm giá trị của m để:

$x_1^2(1-x_2^2) + x_2^2(1-x_1^2) = -8$. *(Hải Dương năm 2000-2001)*

Bài 3: Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + 2m - 15 = 0$

a, Giải phương trình với m =0

b, Gọi 2 nghiệm của phương trình là x_1, x_2. Tìm giá trị của m thoả mãn $5x_1+x_2=4$

(Hải Dương năm 2001-2002)

Bài 4: Cho phương trình $\frac{-1}{2}x^2 - x - m + 2 = 0$ (1)

a, Tìm m để (1) có 2 nghiệm phân biệt.

b, Tìm m để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $x_1^2 + x_2^2 + 20 = x_1^2 x_2^2$.

(Hải Dương năm 2002-2003)

Bài 5: Cho phương trình $x^2 - 6x + 1 = 0$. Không giải phương trình, hãy tính

a, $x_1^2 + x_2^2$ b, $x_1\sqrt{x_1} + x_2\sqrt{x_2}$ c, $\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2^2 + x_1^2x_2}{x_1^2(x_2^2-1) + x_2^2(x_1^2-1)}$

(Hải Dương năm 2002-2003)

Bài 6: Cho phương trình $x^2 - (m+4)x + 3m + 3 = 0$

a, Xác định m để phương trình có 1 nghiệm bằng 2. Tìm nghiệm còn lại

b, Xác định m để phương trình có 2nghiệm thoả mãn $x_1^3 + x_2^3 \geq 0$

c, Lập hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 độc lập với m.

(Hải Dương năm 2003-2004)

Bài 7: Cho phương trình $(m-1)x^2 + 2mx + m - 2 = 0$

a, Giải phương trình với m=1.

b, Tìm m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

Bài 8: Cho phương trình $x^2 - (2m+1) + m^2 + m - 1 = 0$

a, Chứng minh phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m

b, Chứng minh có một hệ thức liên hệ giữa 2 nghiệm số không phụ thuộc m.

Bài 9: Cho phương trình $x^2 + 2(m+3)x + m^2 + 3 = 0$

a, Tìm giá trị của m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt

b, Tìm giá trị của m để phương trình có 1 nghiệm lớn hơn nghiệm kia là 2.

c, Lập hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 độc lập với m.

Bài 10: Lập phương trình biết nghiệm của chúng lần lượt là:

a, $x_1 = 7; x_2 = 12$; b, $x_1 = -2, x_2 = 5$ c, $x_1 = -3, x_3 = -4$

Bài 11: Cho phương trình $x^2 - 5x + 4=0$ có 2 nghiệm x_1, x_2. Không giải pt hãy lập phương trình bậc hai có 2 nghiệm là: $y_1 = \frac{1}{x_1}, y_2 = \frac{1}{x_2}$

3. **Bài học kinh nghiệm**

Trong quá trình dạy học và ôn thi, tôi nhận thấy để làm được thành thào các dạng toán thì học sinh bên cạnh việc nắm vững các kiến thức cần sáng tạo trong giải toán. Trong quá trình học cần nhìn nhận bài toán ở nhiều góc độ, nhiều khía cạnh khác nhau. Bên cạnh đó, việc quan sát, nhận xét để tìm lời giải nhanh cũng rất quan trọng. Học sinh cần luyện tập nhiều để rèn kỹ năng và tích lũy kinh nghiệm giải toán cho bản thân.

4. Kiến nghị, đề xuất

Nhà trường nên tổ chức các lớp bồi dưỡng cho học sinh theo các khối lớp để giúp các em thêm tự tin, tăng thêm sự hứng thú, niềm say mê qua đó áp dụng vào bài thi để đạt kết quả cao.

C. KẾT LUẬN

Trên đây chỉ là một số dạng bài tập về phương trình bậc hai chứa tham số. Học sinh phải nắm vững, hiểu rõ, hiểu sâu các kiến thức lí thuyết đã được học trong phạm vi chương trình; đồng thời, phải có những kinh nghiệm đã được tích lũy trong quá trình luyện tập giải toán; có khả năng phân tích linh hoạt, sáng tạo các tình huống toán học thường gặp.

Trong quá trình nghiên cứu sáng kiến không tránh khỏi những thiếu sót, rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của các đồng nghiệp để sáng kiến của tôi được hoàn thiện hơn.

D. TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Sách giáo khoa Toán 9, tập 2

2. Sách bài tập Toán 9, tập 2

3. Một số dạng toán ôn thi THPT.