26.10.2022

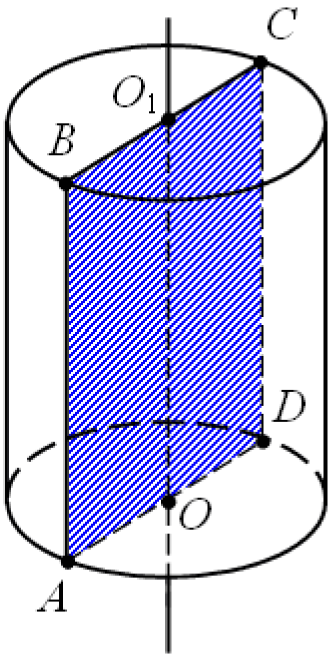
Тема: Розв’язування задач

Посилання на підручник: https://lib.imzo.gov.ua/wa-data/public/site/books2/pidruchnyky-11-klas-2019/13-matematyka-11-klas/merzlyak-ag-matematyka-algebra-i-poch-analizu-ta-geometriya-riven-standartu-11-kl.pdf

Циліндр. Приклади задач

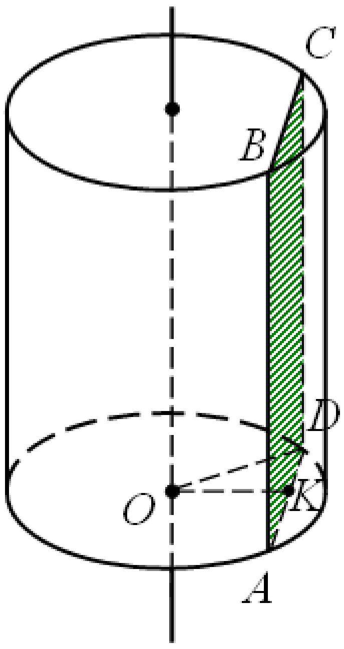
№ 1. Площа основи циліндра відноситься до площі осьового перерізу як π і 4. Знайти кут між діагоналями осьового перерізу.

Розв'язання.

	Розглянемо осьовий переріз *ABCD*. Твірна циліндра *AB* дорівнює його висоті, а відрізок *AD* є діаметром циліндра, тоді площа перерізу буде $S = 2RH.$ В основі циліндра лежить круг, площа якого дорівнює πR^2. За умовою задачі можна записати співвідношення $\frac{\pi R^2}{2RH} = \frac{\pi}{4}; \quad \frac{R}{H} = \frac{1}{2}; \quad H = 2R.$ Бачимо, що висота циліндра дорівнює діаметру, тобто *ABCD* - квадрат. Як відомо, діагоналі квадрата перетинаються під прямим кутом. **Відповідь: 90°.**

№2. В циліндрі радіуса *R* і висоти *H* проведено переріз, паралельний осі циліндра. На якій відстані від осі знаходиться площина перерізу, якщо його площа дорівнює *S*?

Розв'язання.



Відомо, що переріз циліндра площиною, яка паралельна осі циліндра, є прямокутник. Розглянемо прямокутник *ABCD*. Його площа *S*, *CD=H*, тоді $AD=\frac{S}{H}$.

Опустимо з точки *O* - центра основи циліндра перпендикуляр на відрізок *AD*. Оскільки вісь паралельна перерізу, то *OK* - відстань від осі до перерізу. *AK=KD.*

Розглянувши трикутник *OKD*, маємо:

$$OK=\sqrt{OD^2-KD^2};$$

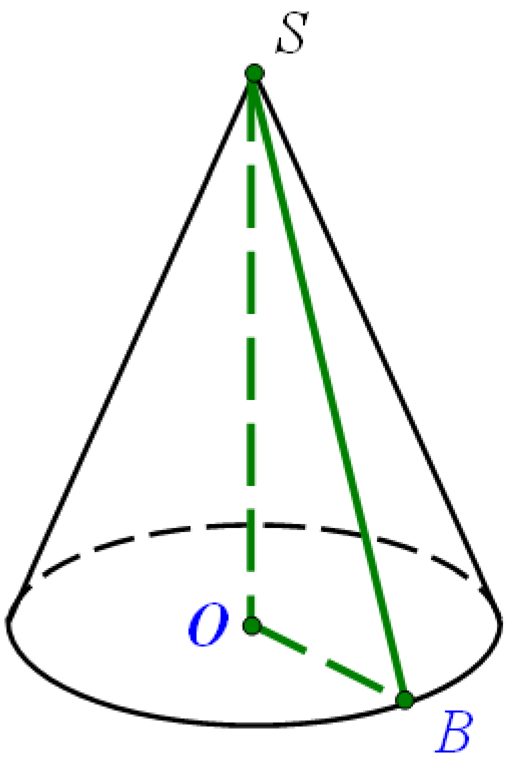
$$OK=\sqrt{R^2-\left(\frac{S}{2H}\right)^2}=\sqrt{R^2-\frac{S^2}{4H^2}}=\sqrt{\frac{4H^2R^2-S^2}{4H^2}}=\frac{\sqrt{4H^2R^2-S^2}}{2H}.$$

Відповідь: $\frac{\sqrt{4H^2R^2-S^2}}{2H}$.

Конус.

Приклади задач

№1. Кут між висотою і твірною конуса 60°, висота конуса – *H*. Знайти площу перерізу, проведеного через дві взаємно перпендикулярні твірні.



Розв'язання.

Нехай кут між висотою і твірною конуса $\angle OSB=60^\circ$, висота $SO=H$.

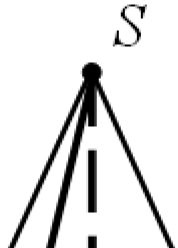
Нехай існують дві взаємно перпендикулярні твірні, тоді площа цього перерізу буде знаходитись як півдобуток твірних.

З ΔOSB, $SB=\frac{SO}{\cos 60^\circ}$; $SB=\frac{H}{1/2}=2H$.

Отже, $S=\frac{1}{2}(2H)^2=2H^2$.

Відповідь: $2H^2$.

№2. В конусі проведено два перерізи,



паралельні основі, які ділять висоту конуса на три рівні частини. Знайти відношення їх площ.

Розв’язання.

Проведемо два перерізи в конусі, паралельно основі, причому так, що центри цих кіл O_2 і O_3 ділять висоту конуса на три рівні частини. Тоді радіус круга з центром O_2 дорівнює $A_2O_2 = \frac{2}{3}A_1O_1$, а радіус круга з центром O_3 – $A_3O_3 = \frac{1}{3}A_1O_1$ (Це випливає з подібності трикутників A_1SO_1; A_2SO_2; A_3SO_3).

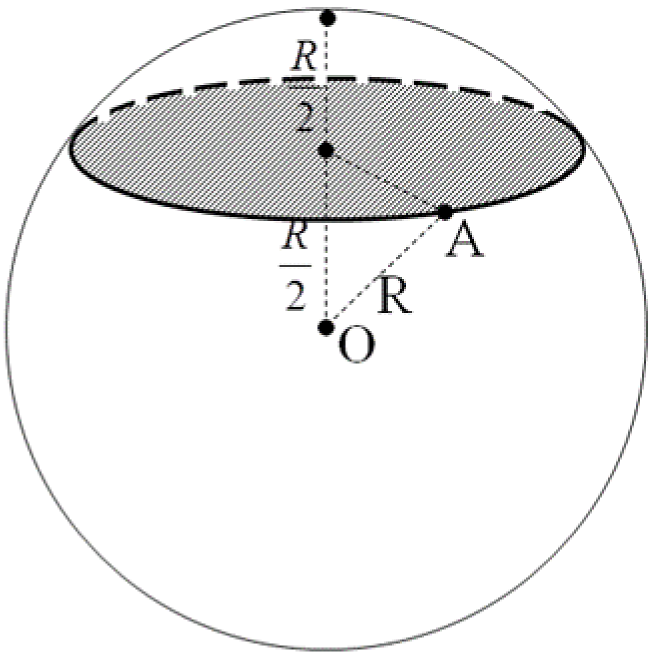
Тоді, позначивши площі перерізів S_2 і S_3, маємо

$$\frac{S_2}{S_3} = \frac{\pi A_2O_2^2}{\pi A_3O_3^2} = \frac{A_2O_2^2}{A_3O_3^2} = \frac{\frac{4}{9}A_1O_1^2}{\frac{1}{9}A_1O_1^2} = \frac{4}{1};$$

або $\frac{S_3}{S_2} = \frac{1}{4}$.

Відповідь: $\frac{1}{4}$ або $\frac{4}{1}$.

Сфера. Куля. Приклади задач



№1. Через середину радіуса кулі проведено перпендикулярну йому площину. Як відноситься площа отриманого перерізу до площі великого круга?

Розв’язання

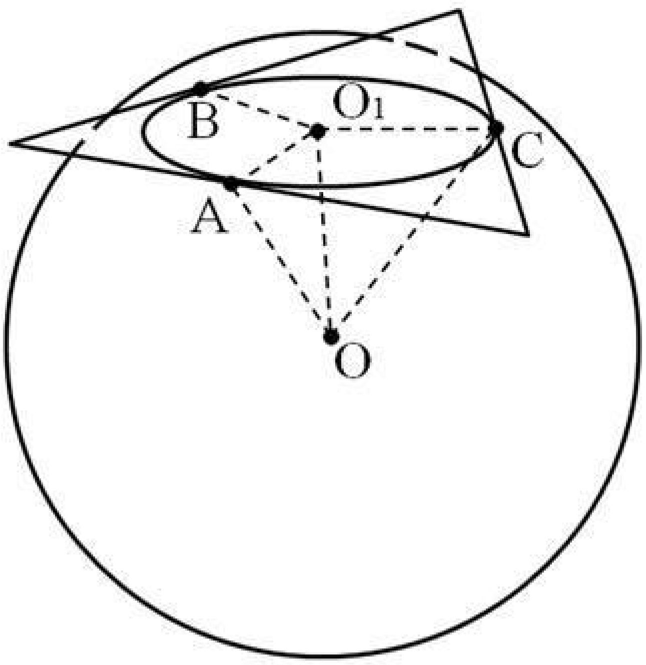
На мал. зображено кулю з центром в точці O і радіусом $OA = R$, тоді площа великого круга буде рівною πR^2 .

Площину, що проведено через середину радіуса кулі перпендикулярно до нього, зображено на мал. Ця площина є кругом з радіусом, що обчислюється з прямокутного трикутника $\sqrt{R^2-\left(\frac{R}{2}\right)^2}=R\sqrt{\frac{3}{4}}$

Таким чином, відношення площі отриманого перерізу до площі великого круга дорівнює

$$\frac{\pi\left(R\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2}{\pi R^2}=\frac{3}{4}$$

Відповідь: $\frac{3}{4}$



№2. Сторони трикутника 13 см,14см, 15 см. Знайти відстань від площини трикутника до центра кулі, яка дотикається усіх сторін трикутника. Радіус кулі 5 см.

Розв'язання.

Нехай трикутник дотикається кулі у точках A, B, C, тобто ці точки одночасно належать сторонам даного трикутника та сфері. Тоді відрізки OA, OB, OC – радіуси кулі.

$OA=OB=OC=5$ см.

Опустимо з точки O – центра кулі, перпендикуляр OO_1 в площину трикутника. Трикутники OAO_1, OCO_1, OBO_1 рівні за катетами і гіпотенузою, тому $BO_1=AO_1=CO_1$. З останньої рівності отримуємо, що точка O_1 рівновіддалена від сторін трикутника, що свідчить про те, що ця точка є центром кола, вписаного в даний трикутник.

Обчислимо довжину радіуса кола (r), вписаного в трикутник, скориставшись формулою

$r = \frac{2S}{a+b+c}$.

Обчислимо площу трикутника за формулою Герона

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$,

$S = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = \sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6} = 84(см^{2})$,
$r = AO_1 = \frac{2\cdot 84}{13+14+15} = 4(см^{2})$.

З прямокутного трикутника OAO_1 знайдемо шукану відстань $OO_1 = 3см$.

Відповідь: 3см.

Завдання:

1. Повторити теоретичний матеріал §5.
2. Виконати письмово вправи: 19.13, 20.12, 21.14.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!!! Роботу виконувати у робочому або окремому зошиті (якщо робочий залишився у гуртожитку), фотографувати і надсилати на електронну адресу valentinatalavera@ukr.net , у темі листа вказувати – ПІБ, предмет, номер групи.

Можна підготувати мультимедійну презентацію з теми і надіслати на електронну адресу valentinatalavera@ukr.net .