

Exercice 1 :

1) En utilisant la définition de la limite d'une suite montrer que :

a) $\frac{5}{3n^2} = 0$, b) $\frac{4n^3+1}{3n^3+6} = \frac{4}{3}$, c) $3\sqrt[5]{n} - 4 = +\infty$

2) Déterminer la limite, si celle-ci existe, des suites $(u_n)_n$ suivantes :

a) $u_n = e^{-\sqrt{n}}(\ln(1 + n + e^n))$, b) $u_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$,

c) $u_n = \frac{n}{n+(-1)^{n+1}}$, d) $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k}$, e) $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^k}$,

f) $u_n = \frac{n^n}{n!}$, g) $u_n = \ln \ln(2n^2 - n) - \ln(3n + 1)$, h) $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$

Exercice 2 : On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$ avec $\alpha > 0$

1) Montrer que $(u_n)_n$ est croissante.

2) a) On suppose que $\alpha = 1$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n} \geq u_n + \frac{1}{2}$.

b) En déduire, en utilisant le critère de Cauchy que la suite $(u_n)_n$ diverge.

3) a) On suppose que $\alpha = 2$. Montrer que, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \geq 2$, $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

b) En déduire que la suite $(u_n)_n$ est majorée par 2 et convergente.

4) On suppose que α est un entier ≥ 3 . Montrer que $(u_n)_n$ converge.

Exercice 3 :

1) Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites définies par : $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$,

$$v_n = u_n + \frac{1}{n(n!)}$$

a) Montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.

b) En déduire la convergence de $(v_n)_n$.

2) Soit $(u_n)_n$ une suite réelle décroissante et de limite nulle, et pour tout $n \in \mathbb{N}$ On pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$$

- a) Montrer que les deux suites extraites $(S_{2n})_n$ et $(S_{2n+1})_n$ sont adjacentes.
- b) En déduire que la suite S_n est convergente.

Exercice 4 :

Soit $k \in]0, 1[$, soit $(u_n)_n$ une suite numérique vérifiant pour tout $n \geq 1$:

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq k |u_{n+1} - u_n|$$

- 1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $|u_{n+1} - u_n| \leq k^n |u_1 - u_0|$
- 2) Montrer que $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy et en déduire qu'elle est convergente.

Exercice 5 :

- 1) Soit la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 = 0$ et $u_n = \frac{u_{n-1} - 1}{u_{n-1} + 3} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ et la suite $v_n = \frac{1}{u_n + 1} \quad \forall n \geq 0$.

- a) Montrer que $(v_n)_n$ est une suite arithmétique.
- b) Montrer que $(u_n)_n$ converge et calculer sa limite.

Exercice 6 :

- 1) Etudier la suite $(u_n)_n$ déterminée par la donnée du réel u_0 et de la relation

$$u_{n+1} = u_n^2 + \frac{3}{16}; \quad n \in \mathbb{N} \text{ et } u_0 > 0$$

- 2) Etudier la suite $(u_n)_n$ déterminée par la donnée du réel u_0 et de la relation

$$u_{n+1} = \sin(u_n) \text{ et } u_0 \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

Exercice 7 : On définit les deux suites récurrentes suivantes $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ par :

$$\{u_{n+1} = \sqrt{u_n} u_0 = \frac{1}{3} \quad ; \quad \{v_{n+1} = \sqrt{v_n} v_0 = 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- 1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{3} \leq u_n \leq 1 \leq v_n \leq 3$.
- 2) Montrer que $(u_n)_n$ est croissante majorée et $(v_n)_n$ est décroissante minorée.
- 3) On pose $w_n = v_n - u_n$, montrer que $0 \leq w_{n+1} \leq \frac{3}{4} w_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
- 4) En déduire que $0 \leq w_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n w_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- 5) Montrer que la suite $(w_n)_n$ est convergente et donner sa limite.

6) Que peut on dire des suites (u_n) et (v_n) ?