Chapitre 10
Information chiffrée

I. Taux d'évolution direct et coefficient multiplicateur

Définition 1
On considère une valeur initiale V_i et une valeur finale V_f d'une même grandeur numérique. Le **taux** t **d'évolution** de cette grandeur est donné par la formule

$$t = \frac{V_f - V_i}{|V_i|}$$

Exemples

- Le prix d'une paire de baskets passe de 159€ à 199€. Le taux d'évolution du prix est de
$$\frac{199-159}{159} = \frac{40}{159} \approx 0,25 \approx \frac{25}{100}$$
Le prix a augmenté d'environ 25%.
- La température est passé de $-\ 10°C$ à $-\ 3°C$. Le taux d'évolution de la température est de
$$\frac{-3-(-10)}{|-10|} = \frac{7}{10} = \frac{70}{100}$$
La température a augmenté de 70%
- Le solde d'un compte en banque est passé de 1 600€ à $-\ 200$€. Le taux d'évolution du solde est de
$$\frac{-200-1\,600}{1\,600} = -\frac{1\,800}{1\,600} \approx -\ 1,125 \approx -\ \frac{112,5}{100}$$
Le compte en banque a perdu 112,5% de sa valeur.

Définition 2
Le **coefficient multiplicateur** c qui correspond à un **taux d'évolution** t est égal à

$$c = \frac{V_f}{V_i} = \begin{cases} 1 + t \text{ si } V_i \geq 0 \\ 1 - t \text{ si } V_i < 0 \end{cases}$$

Démonstration

- Supposons que $V_i \geq 0$
$$1 + t = 1 + \frac{V_f - V_i}{V_i} = \frac{V_i}{V_i} + \frac{V_f - V_i}{V_i} = \frac{V_f}{V_i} = c$$
- Supposons que $V_i < 0$
$$1 - t = 1 - \frac{V_f - V_i}{-V_i} = \frac{V_i}{V_i} + \frac{V_f - V_i}{V_i} = \frac{V_f}{V_i} = c$$

Exemples

- Pour le premier exemple, le coefficient est de
$$c = 1 + \frac{40}{159} = \frac{199}{159} \approx 1,25$$
$$159 \times 1,25 \approx 199$$
- Pour le deuxième exemple, le coefficient est de
$$c = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10} = \frac{-3}{-10}$$
$$-\ 10 \times \frac{3}{10} = -\ 3$$
- Pour le troisième exemple, le coefficient est de
$$c = 1 + \left(-\frac{1\,800}{1\,600}\right) = -\frac{200}{1\,600} \approx -\ 0,125$$

$$1\,600\times(-0,125)=-200$$

Remarque

Un coefficient de **0,7** correspond soit à une **diminution de 30%** si la quantité de départ est **positive**, soit à une **augmentation de 30%** si la valeur initiale est **négative**.

II. Taux d'évolutions successives et coefficient multiplicateur

Soit V_0 la valeur initiale d'une grandeur numérique.

Propriété 1

- Si $V_0\geq 0$ subit n évolutions successives de taux $t_1, t_2\dots t_n$ tous **supérieurs à −1 (baisse de 100%)**, alors, si $c_1, c_2\dots c_n$ désignent les coefficients multiplicateurs correspondants à ces taux, les valeurs successives seront toutes positives et le coefficient multiplicateur total c sera égal à
$$c=c_1\times c_2\times\ldots\times c_n$$
- Si $V_0<0$ subit n évolutions successives de taux $t_1, t_2\dots t_n$ tous **inférieurs à 1 (augmentation de 100%)**, alors si $c_1, c_2\dots c_n$ désignent les coefficients multiplicateurs correspondants à ces taux, les valeurs successives seront toutes négatives et le coefficient multiplicateur total c sera égal à
$$c=c_1\times c_2\times\ldots\times c_n$$

Autrement dit, si $c_1, c_2\dots c_n$ désignent des coefficients multiplicateurs **positifs** correspondants à n évolutions successives, alors le coefficient multiplicateur total c sera égal à
$$c=c_1\times c_2\times\ldots\times c_n$$

Remarques

Le coefficient multiplicateur dépendant du taux d'évolution et de la valeur initiale, les autres cas sont moins systématiques.
Par exemple, on considère deux augmentations successives de 150% et de 50%.
Si la valeur initiale est 100, la valeur finale est $100\times 2,5\times 1,5=375$ et le coefficient vaut $c=3,75$
Si la valeur initiale est -100, la valeur finale est $-100\times(-0,5)\times 1,5=75$ et le coefficient vaut $c=-0,75$
Dans le dernier cas, si l'on change l'ordre des augmentations, on obtient $-100\times 0,5\times(-0,5)=25$
Avec les conditions de la propriété, les évolutions peuvent être effectuées dans l'ordre que l'on veut sans changer le résultat. Ce n'est pas le cas autrement.

Exemples

- Le **prix** d'une paire de basket (donc **positif**) augmente de 10% puis baisse de 20% puis baisse encore de 50%. Le coefficient multiplicateur total est $1,1\times 0,8\times 0,5=0,44$
  Le prix final représente donc 44% du prix initial, soit une **baisse de 56%**
- Un professeur de mathématiques dépensier possède toujours un **solde négatif** sur son compte en banque. Au cours du mois, il observe une baisse de son solde de 20%, puis une hausse de 50% en enfin une baisse de 30%. Le coefficient multiplicateur total est $1,2\times 0,5\times 1,3=0,78$.
  Son solde a donc subi une **hausse de 22%**.

III. Taux d'évolution réciproque et coefficient multiplicateur

On considère une valeur initiale V_i et une valeur finale V_f d'une même grandeur numérique. Soit t le taux d'évolution et c le coefficient multiplicateur. Soit t' le taux et c' le coefficient entre V_f et V_i (c'est-à-dire retrouver la valeur initiale en connaissant la valeur finale), on utilise la propriété suivante.

Propriété 2

$$c'=\frac{1}{c}$$

Exemples

- La Bourse de Paris a subi une baisse de 5% de ses valeurs. De quel pourcentage doit-elle augmenter pour revenir à son niveau initial ?

Les capitalisations sont en euros donc elles sont positives. Une baisse de 5% correspond donc à un coefficient c de ***0,95*** *donc*

$$c^{'} = \frac{1}{c} = \frac{1}{0{,}95} \approx 1,053$$

La bourse doit augmenter d'environ $5,3\%$ *pour revenir à son niveau initial.*

- Le prix d'un T-shirt est augmenté de 25%. De quel pourcentage doit-on le diminuer pour revenir au prix initial ?

$$c^{'} = \frac{1}{c} = \frac{1}{1{,}25} = 0,8$$

Le prix doit donc être diminué de 20%*.*