Chapitre 08
Information chiffrée

I. Taux d'évolution direct et coefficient multiplicateur

Définition 1
On considère une valeur initiale V_i et une valeur finale V_f d'une même grandeur numérique. Le **taux** t **d'évolution** (ou **variation relative**) de cette grandeur est donné par la formule

$$t = \frac{V_f - V_i}{|V_i|}$$

Exemples

- Le prix d'une paire de baskets passe de 159€ à 199€. Le taux d'évolution du prix est de

$$\frac{199-159}{159} = \frac{40}{159} \approx 0,25 \approx \frac{25}{100}$$

  Le prix a augmenté d'environ 25%.
- La température est passé de $-\ 10°C$ à $-\ 3°C$. Le taux d'évolution de la température est de

$$\frac{-3-(-10)}{|-10|} = \frac{7}{10} = \frac{70}{100}$$

  La température a augmenté de 70%
- Le solde d'un compte en banque est passé de 1 600€ à $-\ 200$€. Le taux d'évolution du solde est de

$$\frac{-200-1\,600}{1\,600} = -\frac{1\,800}{1\,600} \approx -\ 1,125 \approx -\ \frac{112,5}{100}$$

  Le compte en banque a perdu 112,5% de sa valeur.

Remarque
$V_f - V_i$ est nommée **variation absolue**.

Définition 2
Le **coefficient multiplicateur** c qui correspond à un **taux d'évolution** t est égal à

$$c = \frac{V_f}{V_i} = \begin{cases} 1 + t \text{ si } V_i \geq 0 \\ 1 - t \text{ si } V_i < 0 \end{cases}$$

Démonstration

- Supposons que $V_i \geq 0$

$$1 + t = 1 + \frac{V_f - V_i}{V_i} = \frac{V_i}{V_i} + \frac{V_f - V_i}{V_i} = \frac{V_f}{V_i} = c$$

- Supposons que $V_i < 0$

$$1 - t = 1 - \frac{V_f - V_i}{-V_i} = \frac{V_i}{V_i} + \frac{V_f - V_i}{V_i} = \frac{V_f}{V_i} = c$$

Exemples

- Pour le premier exemple, le coefficient est de

$$c = 1 + \frac{40}{159} = \frac{199}{159} \approx 1,25$$

$$159 \times 1,25 \approx 199$$

- Pour le deuxième exemple, le coefficient est de

$$c = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10} = \frac{-3}{-10}$$

$$-\ 10 \times \frac{3}{10} = -\ 3$$

- Pour le troisième exemple, le coefficient est de

$$c = 1 + \left(-\frac{1\,800}{1\,600}\right) = -\frac{200}{1\,600} \approx -0,125$$

$$1\,600 \times (-0,125) = -200$$

Remarque

Un coefficient de **0,7** correspond soit à une **diminution de 30%** si la quantité de départ est **positive**, soit à une **augmentation de 30%** si la valeur initiale est **négative**.

II. Taux d'évolutions successives et coefficient multiplicateur

Soit V_0 la valeur initiale d'une grandeur numérique.

Propriété 1

- Si $V_0 \geq 0$ subit n évolutions successives de taux t_1, t_2… t_n tous **supérieurs à -1 (baisse de 100%)**, alors, si c_1, c_2… c_n désignent les coefficients multiplicateurs correspondants à ces taux, les valeurs successives seront toutes positives et le coefficient multiplicateur total c sera égal à

$$c = c_1 \times c_2 \times \ldots \times c_n$$

- Si $V_0 < 0$ subit n évolutions successives de taux t_1, t_2… t_n tous **inférieurs à 1 (augmentation de 100%)**, alors si c_1, c_2… c_n désignent les coefficients multiplicateurs correspondants à ces taux, les valeurs successives seront toutes négatives et le coefficient multiplicateur total c sera égal à

$$c = c_1 \times c_2 \times \ldots \times c_n$$

Autrement dit, si c_1, c_2… c_n désignent des coefficients multiplicateurs **positifs** correspondants à n évolutions successives, alors le coefficient multiplicateur total c sera égal à

$$c = c_1 \times c_2 \times \ldots \times c_n$$

Remarques

Le coefficient multiplicateur dépendant du taux d'évolution et de la valeur initiale, les autres cas sont moins systématiques.
Par exemple, on considère deux augmentations successives de 150% et de 50%.
Si la valeur initiale est 100, la valeur finale est $100 \times 2,5 \times 1,5 = 375$ et le coefficient vaut $c = 3,75$
Si la valeur initiale est -100, la valeur finale est $-100 \times (-0,5) \times 1,5 = 75$ et le coefficient vaut $c = -0,75$
Dans le dernier cas, si l'on change l'ordre des augmentations, on obtient $-100 \times 0,5 \times (-0,5) = 25$
Avec les conditions de la propriété, les évolutions peuvent être effectuées dans l'ordre que l'on veut sans changer le résultat. Ce n'est pas le cas autrement.

Exemples

- Le **prix** d'une paire de basket (donc **positif**) augmente de 10% puis baisse de 20% puis baisse encore de 50%. Le coefficient multiplicateur total est $1,1 \times 0,8 \times 0,5 = 0,44$
  Le prix final représente donc 44% du prix initial, soit une **baisse de 56%**
- Un professeur de mathématiques dépensier possède toujours un **solde négatif** sur son compte en banque. Au cours du mois, il observe une baisse de son solde de 20%, puis une hausse de 50% et enfin une baisse de 30%. Le coefficient multiplicateur total est $1,2 \times 0,5 \times 1,3 = 0,78$.
  Son solde a donc subi une **hausse de 22%**.

III. Taux d'évolution réciproque et coefficient multiplicateur

On considère une valeur initiale V_i et une valeur finale V_f d'une même grandeur numérique. Soit t le taux d'évolution et c le coefficient multiplicateur. Soit t' le taux et c' le coefficient entre V_f et V_i (c'est-à-dire retrouver la valeur initiale en connaissant la valeur finale), on utilise la propriété suivante.

Propriété 2

$$c' = \frac{1}{c}$$

Exemples

- La Bourse de Paris a subi une baisse de 5% de ses valeurs. De quel pourcentage doit-elle augmenter pour revenir à son niveau initial ?

*Les capitalisations sont en euros donc elles sont positives. Une baisse de 5% correspond donc à un coefficient c de **0,95** donc*

$$c' = \frac{1}{c} = \frac{1}{0,95} \approx 1,053$$

La bourse doit augmenter d'environ $5,3\%$ *pour revenir à son niveau initial.*

- Le prix d'un T-shirt est augmenté de 25%. De quel pourcentage doit-on le diminuer pour revenir au prix initial ?

$$c' = \frac{1}{c} = \frac{1}{1,25} = 0,8$$

Le prix doit donc être diminué de 20%.