

Travaux Dirigés de Mécanique Quantique

Quantification de la Matière

Série n°6

Exercice 1

On imagine une particule qui serait décrite à $t=0$, par la fonction d'onde $\psi(x, 0) = A(L^2 - x^2)$, si x est compris entre $-L$ et $+L$ et 0 ailleurs. A est une constante réelle positive, de même que L .

- Quelle est la densité de probabilité de trouver la particule en un point x .
- Normer la fonction d'onde. En déduire la dimension de A .
- Tracer la fonction d'onde en fonction de x .
- Quelle est la valeur moyenne de x , notée $\langle x \rangle$.
- Calculer Δx après l'avoir relié à 2 valeurs moyennes. Expliquer son sens physique.
- Calculer $\langle p_x \rangle$, Δp_x puis $\Delta x \Delta p_x$, commenter.

Exercice 2

Une fonction d'onde à une dimension est donnée, au temps $t=0$, par l'expression :

$$\psi(x, 0) = \varphi_0(x) = C_0 \exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right)$$

Où m est la masse de la particule et ω la pulsation de l'oscillateur. C_0 est une constante réelle. L'énergie de cet état fondamental est

$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$$

- Que représente $|\varphi_0(x)|^2$? Calculer C_0 pour que $\varphi_0(x)$ soit normée. Justifier physiquement cette normalisation. Tracer $|\varphi_0(x)|^2$.
- Calculer la valeur moyenne de x notée $\langle x \rangle$ et valeur moyenne de x^2 notée $\langle x^2 \rangle$. En déduire Δx . Donner l'interprétation physique de Δx .
- p est la quantité de mouvement associée à cet oscillateur. Calculer la valeur moyenne de p notée $\langle p \rangle$ et valeur moyenne de p^2 notée $\langle p^2 \rangle$. En déduire Δp . Donner l'interprétation physique du produit $\Delta x \Delta p$.
- Si l'énergie potentielle de la particule est $V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$; à partir des résultats des questions b) et c), donner les expressions des valeurs moyennes de l'énergie cinétique, de l'énergie potentielle et de l'énergie totale. Conclusion.
- Ecrire la fonction d'onde à l'instant t soit $\psi(x, t)$. Quelle est l'équation qui nous permet de passer de $\psi(x, 0)$ à $\psi(x, t)$?

Calculer à nouveau $\langle x \rangle(t)$ et $\langle x^2 \rangle(t)$. Conclusion.

Données : $I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\alpha x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ et $I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \exp(-\alpha x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$

Exercice 3 : Paquets d'Ondes Libres

On considère une particule libre de masse m , animée d'un mouvement rectiligne le long de l'axe Ox et décrite à l'instant t par le paquet d'ondes :

$$\Psi(t, x) = N \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{|p|}{p_0}} \cdot e^{i \frac{(px - Et)}{\hbar}} dp$$

Où N est une constante de normalisation et p_0 une valeur positive de l'impulsion de cette particule.

- 1) Quelle est l'énergie de cette particule ?
- 2) Montrer que les composantes de ce paquet (les ondes planes monochromatiques) satisfont à l'équation de Schrödinger pour la particule libre. En déduire que ce paquet peut bien décrire cette particule.
- 3) Calculer $\Psi(0, x)$.
- 4) Evaluer la transformée de Fourier $\bar{\Psi}(0, p)$ de $\Psi(0, x)$.
- 5) Donner une détermination réelle de la constante N .
- 6) Calculer les largeurs à mi-hauteur Δx et Δp des courbes $|\Psi(0, x)|^2$ et $|\bar{\Psi}(0, p)|^2$ définies par :

$$\left| \Psi(0, \pm \frac{\Delta x}{2}) \right|^2 = \frac{1}{2} |\Psi(0, 0)|^2 \quad \text{et} \quad \left| \bar{\Psi}(0, \pm \frac{\Delta p}{2}) \right|^2 = \frac{1}{2} |\bar{\Psi}(0, 0)|^2$$

- 7) Evaluer le produit $\Delta x \Delta p$ et en déduire l'interprétation physique de Δx et Δp .