

Travaux Dirigés de Mécanique Quantique Compléments Mathématiques Série n°5

En mécanique quantique, x désigne la position d'une particule dans les problèmes à une dimension et k désigne le nombre d'onde de l'onde associée à cette particule en mouvement. k est lié à l'impulsion p de la particule par $p = \hbar k$, où $\hbar$ est la constante de Planck réduite : $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, h étant la constante de Planck. En termes de l'impulsion, la transformée de Fourier de la fonction d'onde $\psi(x)$ sera définie par :

$$\bar{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) e^{-i\frac{p}{\hbar}x} dx$$

De même, on peut déduire $\psi(x)$ à partir de $\bar{\psi}(p)$ à l'aide de la transformation de Fourier inverse.

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\psi}(p) e^{+i\frac{p}{\hbar}x} dp$$

1) Calculer les transformées de Fourier :

a. $\psi(x) = \frac{1}{a}$ pour $|x| < \frac{a}{2}$ et $\psi(x) = 0$ pour $|x| > \frac{a}{2}$

b. $\psi(x) = e^{-\frac{|x|}{a}}$, a étant une constante positive.

La largeur à mi-hauteur Δx d'une fonction $\psi(x)$ admettant un maximum central au point x_0 et symétrique par rapport à l'axe $x = x_0$ est définie par :

$$\psi\left(x_0 \pm \frac{\Delta x}{2}\right) = \frac{1}{2} \psi(x_0)$$

Dans chacun des cas précédents, déterminer les largeurs à mi-hauteur Δx et Δp des courbes $\psi(x)$ et $\bar{\psi}(p)$ et montrer que le produit $\Delta x \Delta p$ est proportionnel à $\hbar$.

2) Etablir la relation de Récurrence : $\bar{\psi}^n(p) = \left(\frac{ip}{\hbar}\right)^n \bar{\psi}(p)$ où $\psi^n(x)$ est la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $\psi(x)$ dont les limites sont supposées être nulles lorsque x tend vers $\pm\infty$.

3) Démontrer l'égalité :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x) \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\psi}^*(p) \bar{\varphi}(p) dp$$

En déduire l'identité de Parseval-Plancherel :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\bar{\psi}(p)|^2 dp$$

Et l'égalité :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x) \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} dx = \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} p |\bar{\psi}(p)|^2 dp$$