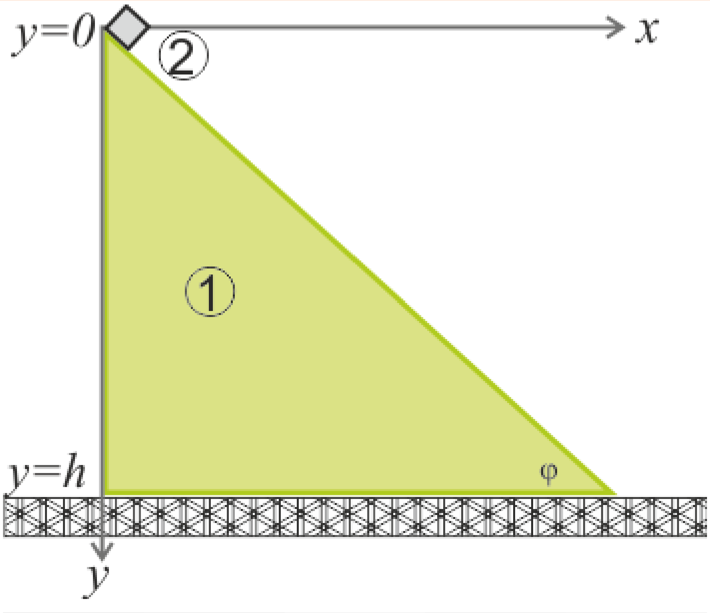
Εκφώνηση

Σώμα 2, μάζας m και αμελητέων διαστάσεων, αφήνεται να ολισθήσει κατά μήκος της κεκλιμένης πλευράς ελεύθερης κατακόρυφης λεπτής σφήνας (σώμα 1) σχήματος ορθογωνίου τριγώνου μάζας $\lambda m \; \lambda \in R^{+}$, ύψους h και κλίσης φ (όπως στο Σχήμα 1). Υποθέτοντας ότι τριβές δεν υπάρχουν να μελετηθούν οι κινήσεις των σωμάτων του συστήματος.



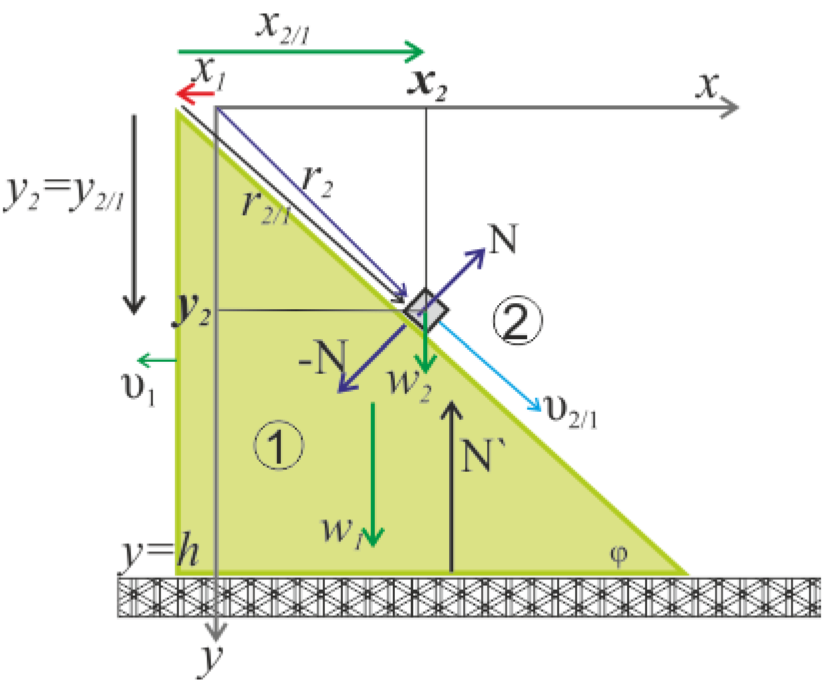
Εφαρμογή: Για $\lambda = 1,\ 2,\ 3$, ύψους $h = 1,4\ m$ (κατακόρυφη πλευρά) και κλίσης $\varphi = 30^{0},\ 45^{0},\ 60^{0}$.

Απάντηση

Η Φυσική Μας Διαίσθηση – Πρώτες Σκέψεις

Το σώμα πιέζει τη σφήνα και τη «σπρώχνει» αριστερά, ενώ το ίδιο κατερχόμενο επί της κεκλιμένης επιφάνειάς της κινείται προς τα κάτω και δεξιά. (σώμα 1 – σώμα 2, εφεξής σφήνα –σώμα αντιστοίχως).

Οι δυνάμεις που δρουν (Σχήμα 2) σε κάθε σώμα είναι τα βάρη τους, η μεταξύ τους αλληλεπίδραση $\left(\vec{N},\ -\vec{N}\right)$, κάθετη στην κεκλιμένη πλευρά της σφήνας, και η κάθετη δύναμη $\vec{N}'$ από το δάπεδο στη σφήνα οι οποίες, θεωρούμενες σταθερές, θα προκαλέσουν σταθερές επιταχύνσεις στα δύο σώματα. Η μεν σφήνα θα κινηθεί κατ' ανάγκην μόνο οριζόντια και αριστερά υπό τη δράση της οριζόντιας συνιστώσας της $-\vec{N}$, ενώ στην κατακόρυφη διεύθυνση οι δυνάμεις, βάρος της, κατακόρυφη συνιστώσα της $-\vec{N}$ και η αντίδραση από το δάπεδο $\vec{N}'$, ισορροπούν, το δε σώμα υπό τη δράση της οριζόντιας συνιστώσας της $\vec{N}$ θα κινηθεί οριζόντια και δεξιά, και μάλιστα θα επιταχύνεται περισσότερο αυτό με τη μικρότερη μάζα, αφού δύναμη ίδιου μέτρου επιταχύνει και το δύο σώματα οριζόντια, ενώ υπό τη δράση του βάρους της $\vec{w}_2$ και της κατακόρυφης συνιστώσας της $\vec{N}$ θα κινηθεί προς τα κάτω.



Σχήμα 2: Η διάταξη των ασκούμενων στο σύστημα δυνάμεων, εσωτερικών και εξωτερικών και των ταχυτήτων απόλυτων και σχετικών. Το σύστημα αναφοράς xOy είναι ακίνητο.

Οι εσωτερικές δυνάμεις $\left(\vec{N},\ -\vec{N}\right)$, ανάμεσα στα δύο σώματα, δεν μπορούν να μεταβάλλουν την ορμή του συστήματος και οποιαδήποτε μεταβολή στην ορμή τους θα επέλθει από τις εξωτερικές δυνάμεις, δηλ. τα βάρη των δύο σωμάτων. Έτσι στην οριζόντια διεύθυνση η ορμή του συστήματος θα διατηρείται μηδενική, ενώ στην κατακόρυφη όχι (κατακόρυφη ορμή του σώματος). Από τα προηγούμενα συνάγεται ότι η μετατόπιση, η ταχύτητα και η επιτάχυνση της σφήνας (απόλυτα μεγέθη) θα είναι οριζόντια και προς τ' αριστερά. Το σώμα συμμετέχοντας στην κίνηση της σφήνας θα έχει όλα τα της σφήνας και επειδή ταυτόχρονα θα κινείται κατά μήκος της πλάγιας πλευράς της θα έχει και αντίστοιχα (σχετικά ως προς τη σφήνα, 2 ως προς 1, 2/1) μεγέθη κατά μήκος της. Απολύτως το σώμα θα κινείται και θα επιταχύνεται προς τα δεξιά και προς τα κάτω.

Σχετική κίνηση

Προφανώς η οριζόντια κίνηση της σφήνας και του σώματος να ολισθαίνει πάνω του δημιουργεί δεσμούς ανάμεσα στα κινηματικά στοιχεία (μετατοπίσεις, ταχύτητες, επιταχύνσεις) των δύο σωμάτων, έτσι ώστε όλα να μπορούν να εκφραστούν σε συνάρτηση του ενός. Μπορούμε να γράψουμε (τα σχετικά μεγέθη $d\vec{r}_{2/1},\ \vec{\upsilon}_{2/1},\ \vec{a}_{2/1}$ έχουν τη διεύθυνση της κεκλιμένης πλευράς της σφήνας με φορά προς τα κάτω, αυτά με δείκτη 1 τα αντίστοιχα της σφήνας με κατεύθυνση οριζόντια και αριστερά και αυτά με δείκτη 2 τα του σώματος) τις σχέσεις:

$$\begin{pmatrix} \vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{r}_{2/1} \rightarrow d\vec{r}_2 = d\vec{r}_1 + d\vec{r}_{2/1} \\ \vec{\upsilon}_2 = \vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_{2/1} \\ \vec{a}_2 = \vec{a}_1 + \vec{a}_{2/1} \\ \text{Νόμος συνημ. για όλα, } \min\left(\vec{\upsilon}_1,\ \vec{\upsilon}_{2/1}\right) = 180^0 - \varphi \\ 90^0 < \theta \equiv \min\left(\vec{\upsilon}_1,\ \vec{\upsilon}_2\right) < 180^0 - \varphi \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} dx_2 = dx_1 + dx_{2/1},\ dy_2 = dy_1 + dy_{2/1} = 0 + dy_{2/1} \\ \upsilon_{2,x} = \upsilon_{1,x} + \upsilon_{2/1,x},\ \upsilon_{2,y} = \upsilon_{1,y} + \upsilon_{2/1,y} = 0 + \upsilon_{2/1,y} \\ a_{2,x} = a_{1,x} + a_{2/1,x},\ a_{2,y} = a_{1,y} + a_{2/1,y} = 0 + a_{2/1,y} \end{pmatrix}$$

Διατήρηση Ορμής Στον Οριζόντιο Άξονα Χ Και Συσχετισμός Ταχυτήτων

Οι μοναδικές δυνάμεις με οριζόντιες συνιστώσες που δρουν στο σύστημα των δύο σωμάτων είναι οι <u>εσωτερικές</u> δυνάμεις $\left(\vec{N},\ \text{-}\vec{N}\right)$ της μεταξύ τους αλληλεπίδρασης και οι οποίες δεν προκαλούν μεταβολή στην οριζόντια ορμή του συστήματος (και στη συνολική ορμή – αντίθετες μεταβολές στα δύο σώματα), που πρέπει να παραμένει μηδενική. Από αρχή διατήρησης της ορμής στην οριζόντια διεύθυνση παίρνουμε (Σχήμα 3, παρακάτω τα σύμβολα των μεγεθών χωρίς το διανυσματικό τους χαρακτηριστικό αντιπροσωπεύουν τα μέτρα τους):

$$\left(\vec{\upsilon}_{1,x} = \vec{\upsilon}_1,\ \vec{\upsilon}_{1,y} = 0,\ \vec{\upsilon}_{2,x} = \vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_{2/1,x},\ \vec{\upsilon}_{2,y} = \vec{\upsilon}_{2/1,y}\right)$$

$$\text{ΑΔΟ}(xx') : 0 = \lambda m\vec{\upsilon}_1 + m\vec{\upsilon}_{2,x} = \lambda m\vec{\upsilon}_1 + m\left(\vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_{2/1,x}\right) = (\lambda+1)m\vec{\upsilon}_1 + m\vec{\upsilon}_{2/1,x}$$

$$\xrightarrow{+} -\lambda\upsilon_1 + \upsilon_{2,x} = -(\lambda+1)\upsilon_1 + \upsilon_{2/1,x} = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} \lambda\upsilon_1 = \upsilon_{2,x} \\ (\lambda+1)\upsilon_1 = \upsilon_{2/1,x} = \upsilon_{2/1}\cos\varphi \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \lambda\Delta x_1 = \Delta x_2,\ (\lambda+1)\Delta x_1 = \Delta r_{2/1,x} = \Delta r_{2/1}\cos\varphi \xrightarrow{\alpha\nu\ x_{1,\alpha\rho\chi} = x_{2,\alpha\rho\chi} = 0} \lambda x_1 = x_2,\ (\lambda+1)x_1 = r_{2/1,x} = r_{2/1}\cos\varphi \\ \lambda a_1 = a_{2,x},\ (\lambda+1)a_1 = a_{2/1,x} = a_{2/1}\cos\varphi \end{pmatrix}$$

[1]

$$\upsilon_{2/1} = \frac{\lambda+1}{\cos\varphi}\upsilon_1 \rightarrow \begin{pmatrix} \upsilon_{2/1,x} = \upsilon_{2/1}\cos\varphi = (\lambda+1)\upsilon_1 \\ \upsilon_{2,y} = \upsilon_{2/1,y} = \upsilon_{2/1}\sin\varphi = \dfrac{\lambda+1}{\cos\varphi}\upsilon_1\sin\varphi \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \upsilon_{2,x} = \lambda\upsilon_1 \\ \upsilon_{2,y} = \upsilon_{2/1,y} = (\lambda+1)\tan\varphi\cdot\upsilon_1 \end{pmatrix}$$

$$\upsilon_2 = \sqrt{\upsilon_{2,x}^2 + \upsilon_{2,y}^2} = \sqrt{(\lambda\upsilon_1)^2 + \left[\tan\varphi(\lambda+1)\upsilon_1\right]^2} = \upsilon_1\sqrt{\lambda^2 + (\lambda+1)^2\tan^2\varphi} =$$

$$= \upsilon_1\frac{\sqrt{\lambda^2\cos^2\varphi + (\lambda+1)^2\sin^2\varphi}}{\cos\varphi} = \upsilon_1\frac{\sqrt{\lambda^2\cos^2\varphi + \lambda^2\sin^2\varphi + 2\lambda\sin^2\varphi + \sin^2\varphi}}{\cos\varphi} =$$

$$\upsilon_1\frac{\sqrt{\lambda^2 + (2\lambda+1)\sin^2\varphi}}{\cos\varphi} = \ldots = \upsilon_1\frac{\sqrt{\lambda^2 + (2\lambda+1)\left(1-\cos^2\varphi\right)}}{\cos\varphi} = \upsilon_1\frac{\sqrt{(\lambda+1)^2 - (2\lambda+1)\cos^2\varphi}}{\cos\varphi}$$

---

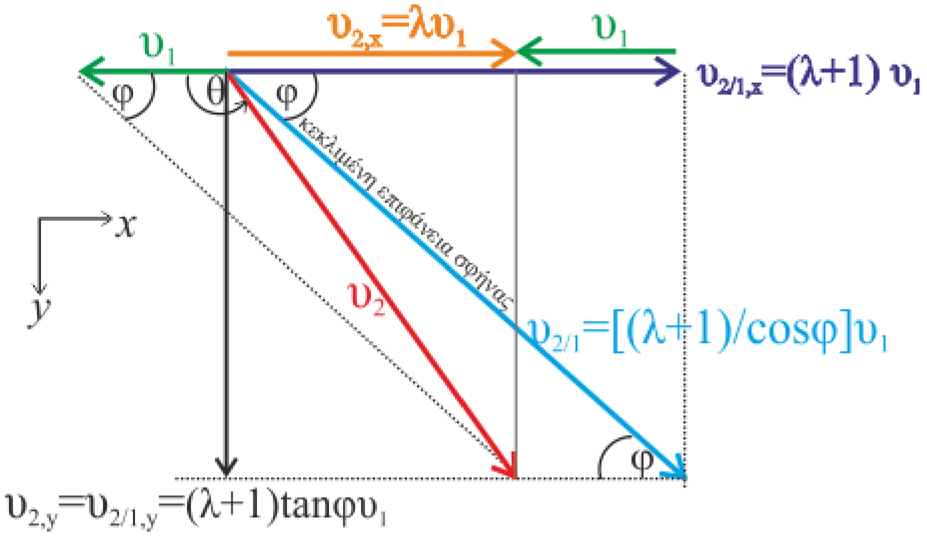
[1] Εδώ εκλαμβάνουμε και τα δύο σώματα ως σημειακά αντικείμενα που η αρχική τους θέση είναι η με συνέπεια οι μετατοπίσεις τους να συμπίπτουν με τις θέσεις τους.

Από τη $\vec{\upsilon}_{2,x} = -\lambda \vec{\upsilon}_1$ συνάγεται ότι με δεδομένο ότι η σφήνα θα κινηθεί οριζόντια προς τα αριστερά το σώμα οριζόντια θα κινηθεί προς αντίθετη κατεύθυνση, δηλ. προς τα δεξιά και συνολικά έχοντας και κατακόρυφη συνιστώσα η ταχύτητά του θα είναι προς τα δεξιά και κάτω. Την ταχύτητα του σώματος μπορούμε να την υπολογίσουμε και με το νόμο του συνημιτόνου στο πολύγωνο των διανυσμάτων των ταχυτήτων (Σχήμα 3):

$$\upsilon_2^2 = \upsilon_1^2 + \upsilon_{2/1}^2 + 2\upsilon_1\upsilon_{2/1}\cos(180-\varphi) = \upsilon_1^2 + \left(\frac{\lambda+1}{\cos\varphi}\upsilon_1\right)^2 - 2\upsilon_1\frac{\lambda+1}{\cos\varphi}\upsilon_1\cos\varphi =$$

$$= \left[1 + \left(\frac{\lambda+1}{\cos\varphi}\right)^2 - 2(\lambda+1)\right]\upsilon_1^2 = \left[\left(\frac{\lambda+1}{\cos\varphi}\right)^2 - (2\lambda+1)\right]\upsilon_1^2 \rightarrow$$

$$\upsilon_2 = \upsilon_1\sqrt{\left(\frac{\lambda+1}{\cos\varphi}\right)^2 - (2\lambda+1)} = \upsilon_1\frac{\sqrt{(\lambda+1)^2 - (2\lambda+1)\cos^2\varphi}}{\cos\varphi} = \ldots = \upsilon_1\frac{\sqrt{\lambda^2 + (2\lambda+1)\sin^2\varphi}}{\cos\varphi}$$



Σχήμα 3: Η διάταξη των ταχυτήτων σχετικής και απόλυτων. Παρόμοια σχήματα μπορούν να κατασκευαστούν για τις μετατοπίσεις και τις επιταχύνσεις. Προφανώς για ισότητα σχετικής ταχύτητας και απόλυτης του σώματος πρέπει η σφήνα να μην κινείται

Συνοψίζοντας: προσδιορίσαμε την ταχύτητα του σώματος (απόλυτη και σχετική) σε συνάρτηση της ταχύτητας της σφήνας (εξαρτήσεις).

$$\upsilon_{2/1} = \frac{\lambda+1}{\cos\varphi}\upsilon_1 \rightarrow \begin{pmatrix} \upsilon_{2/1,x} = (\lambda+1)\upsilon_1 \\ \upsilon_{2/1,y} = \tan\varphi(\lambda+1)\upsilon_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \upsilon_{2,x} = \lambda\upsilon_1 \\ \upsilon_{2,y} = \upsilon_{2/1,y} \end{pmatrix} \rightarrow \upsilon_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda^2 + (\lambda+1)^2\tan^2\varphi} \\ \dfrac{\sqrt{\lambda^2 + (2\lambda+1)\sin^2\varphi}}{\cos\varphi} \\ \dfrac{\sqrt{(\lambda+1)^2 - (2\lambda+1)\cos^2\varphi}}{\cos\varphi} \end{pmatrix} \cdot \upsilon_1$$

Διάταξη Ταχυτήτων

$$\upsilon_{2/1}=\frac{\lambda+1}{\cos\varphi}\upsilon_1\geq(\lambda+1)\upsilon_1\geq\upsilon_1\rightarrow\upsilon_{2/1}\geq\upsilon_1\ \forall(\lambda,\ \varphi)$$

$$\frac{\upsilon_{2/1}^2}{\upsilon_2^2}=\frac{\dfrac{(\lambda+1)^2}{\cos^2\varphi}}{\dfrac{\lambda^2+(2\lambda+1)\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}}=\frac{(\lambda+1)^2}{\lambda^2+(2\lambda+1)\sin^2\varphi}=\frac{\lambda^2+(2\lambda+1)}{\lambda^2+(2\lambda+1)\sin^2\varphi}\geq1\ \left[2\lambda+1\geq(2\lambda+1)\sin^2\varphi\right]\rightarrow$$

$$\upsilon_{2/1}\geq\upsilon_2\ \forall(\lambda,\ \varphi)$$

$$\text{για }\frac{\upsilon_2^2}{\upsilon_1^2}=\lambda^2+(\lambda+1)^2\tan^2\varphi\geq1\Leftrightarrow(\lambda+1)^2\tan^2\varphi\geq1-\lambda^2\rightarrow(\lambda+1)\tan^2\varphi\geq1-\lambda$$

$$\upsilon_1\leq\upsilon_2\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left(\lambda\geq1\ \text{με}\ 0<\varphi<\pi/2\right)\ \acute{\eta}\ \left(\varphi\geq\tan^{-1}1=\pi/4\ \text{με}\ \lambda\in R^+\right)\\ \\ \left(\lambda<1\ \text{με}\ \varphi\geq\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-\lambda}{1+\lambda}}\right)\ \acute{\eta}\ \left(\varphi<\tan^{-1}1=\pi/4\ \text{με}\ \lambda\geq\sqrt{\dfrac{1-\tan^2\varphi}{1+\tan^2\varphi}}\right)\end{array}\right\}$$

$$\upsilon_1<\upsilon_2\,\text{ισχύει για:}\left\{\begin{array}{l}\left[\lambda\geq1\ \wedge\ \varphi\in\left(0^{\circ},90^{\circ}\right)\right]\quad\left[\acute{\eta}\ \cos\varphi<\ ^{-1}\sqrt{\dfrac{1-\lambda}{1+\lambda}}\ \acute{\eta}\ \sin\ >\ \varphi\ ^{1-\lambda}\sqrt{\dfrac{1+}{2}}\quad\varphi\ \sqrt{\dfrac{}{2}}\right]\\ \left[\varphi\geq\tan^{-1}1=\pi/4\ \wedge\ \lambda\in R^+\right]\quad\left[\varphi<\ ^{-1}\ =\pi\ \wedge\ \lambda\geq\sqrt{\dfrac{1-\tan^2\varphi}{1+\tan^2\varphi}}\right]\end{array}\right.$$

Συμπεράσματα

Από τα προηγούμενα προκύπτουν (κάθε χρονική στιγμή ή μετά από κάθοδο κατά y του σώματος) τα εξής ($\upsilon_1<;\upsilon_2<\upsilon_{2/1}$):

- η σχετική ταχύτητα του σώματος είναι μεγαλύτερη από την απόλυτή του για κάθε συνδυασμό των λ και φ, όπως και της ταχύτητας του σώματος, δηλ. $\upsilon_{2/1}>\upsilon_1,\ \upsilon_2$
- η ταχύτητα του σώματος είναι μεγαλύτερη της ταχύτητας της σφήνας $\upsilon_1<\upsilon_2$

1. για κάθε γωνία φ αν $\lambda\geq1$ ή για κάθε λ αν $\varphi\geq\pi/4$
2. για κάθε $\varphi<\pi/4$ αν $1>\lambda>\sqrt{\dfrac{1-\tan^2\varphi}{1+\tan^2\varphi}}$ και μάλιστα αυξανόμενης της φ προς τις 45° η

απαιτούμενη τιμή του λ, για εξίσωση των ταχυτήτων, γίνεται μικρότερη (βλέπε παρακάτω απόδειξη

1) ή για κάθε $\lambda<1$ αν $\varphi > \tan^{-1}\sqrt{\frac{1-\lambda}{1+\lambda}}$ και μάλιστα αυξανόμενου του λ προς το 1 η απαιτούμενη τιμή της φ, για εξίσωση των ταχυτήτων, γίνεται μικρότερη (βλέπε παρακάτω απόδειξη 2).

Για παράδειγμα με $\lambda=0{,}25$ παίρνουμε ότι για κλίσεις φ μικρότερες της

$$\varphi = \tan^{-1}\sqrt{\frac{1-0,25}{1+0,25}} = 37,7^0 \text{ ή } 0{,}66 \quad rad$$

η ταχύτητα της σφήνας είναι μεγαλύτερη της του σώματος, ενώ για μεγαλύτερες γωνίες καθίσταται μικρότερη (εννοείται ότι για αυτόν τον συνδυασμό του λ και της φ οι δύο ταχύτητες καθίστανται ίσες, προσοχή ταχύτητες, όχι κινητικές ενέργειες).

- Το πηλίκο $\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1} = \sqrt{\lambda^2 + (\lambda+1)^2 \tan^2\varphi}$ (ταχύτητα του σώματος προς την ταχύτητα της σφήνας)

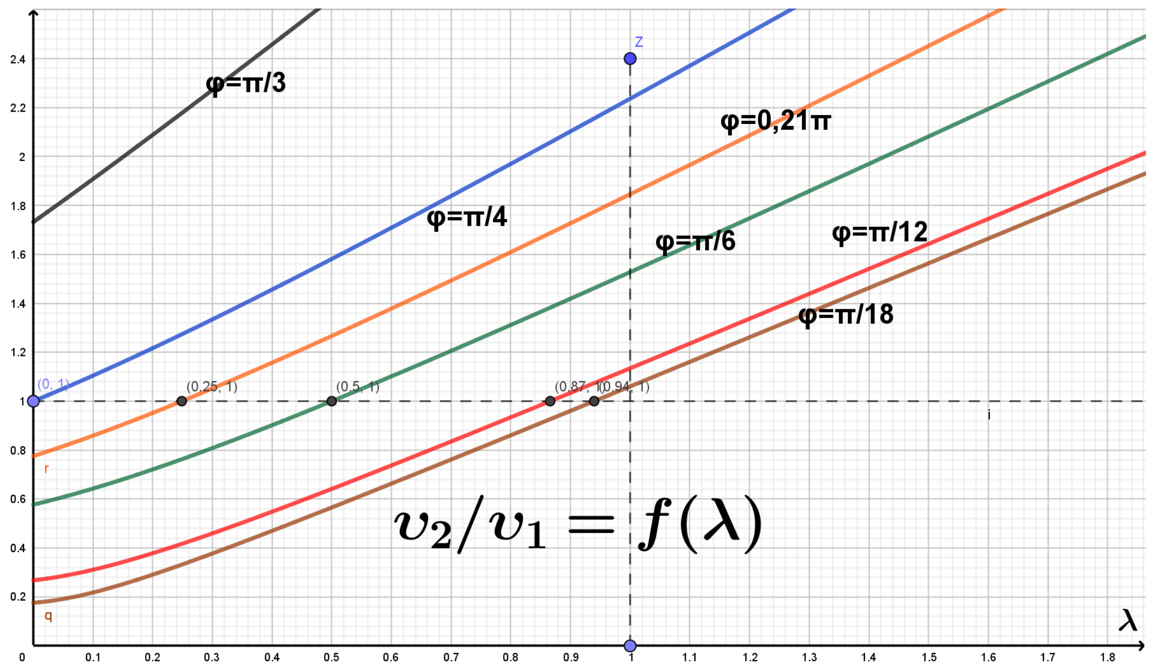
1. Εξαρτάται αποκλειστικά από τις τιμές των λ και φ και παραμένει το ίδιο καθόλη την εξέλιξη του φαινομένου (δεν εξαρτάται από τη χρονική στιγμή, $\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1} \neq f(t)$).
2. Είναι αύξουσα συνάρτηση του λ, $\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1} = f(\lambda)$ για κάθε κλίση φ (βλέπε τύπο συνάρτησης). Δηλ. καθώς η μάζα της σφήνας γίνεται συγκριτικά όλο και μεγαλύτερη από τη μάζα του σώματος ο συσχετισμός των ταχυτήτων αλλάζει υπέρ της ταχύτητας του σώματος και αυτό για κάθε κλίση φ. Αν το λ τείνει στο άπειρο, τότε και η τιμή του πηλίκου, ομοίως, τείνει στο άπειρο.
3. Είναι αύξουσα συνάρτηση της κλίσης φ, $\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1} = f(\varphi)$ για κάθε τιμή του λ (βλέπε τύπο συνάρτησης). Δηλ. για τα δύο συγκεκριμένα σώματα (τιμή του λ) αυξανόμενης της φ ο συσχετισμός των ταχυτήτων αλλάζει υπέρ της ταχύτητας του σώματος και αυτό για κάθε τιμή του λ. Αν η γωνία φ προσεγγίζει την ορθή το πηλίκο τείνει να απειρίζεται, αφού η σφήνα τείνει να μην κινείται και το σώμα να πέφτει ελεύθερα.

Απόδειξη 1

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1-\tan^2\varphi}{1+\tan^2\varphi}\right) = \frac{-2\tan\varphi\frac{1}{\cos^2\varphi}\left(1+\tan^2\varphi\right)-\left(1-\tan^2\varphi\right)2\tan\varphi\frac{1}{\cos^2\varphi}}{\left(1+\tan^2\varphi\right)^2} = \frac{-4\tan\varphi}{\cos^2\varphi\left(1+\tan^2\varphi\right)^2} < 0$$

Απόδειξη 2

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)=\frac{-1(1+\lambda)-(1-\lambda)}{(1+\lambda)^2}=-\frac{1}{(1+\lambda)^2}<0$$

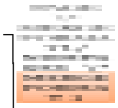


Σχήμα 4: Στο διάγραμμα εμφαίνονται οι προηγούμενες διαπιστώσεις. Για παράδειγμα αν λ=0,25 τότε η κλίση φ πάνω από την οποία η ταχύτητα του σώματος γίνεται μεγαλύτερη της σφήνας είναι $\varphi = 0,21\pi$ και αντιστρόφως αν $\varphi = 0,21\pi$ τότε η τιμή του λ πάνω από την οποία η ταχύτητα του σώματος γίνεται μεγαλύτερη της σφήνας είναι λ=0,25 .

Εφαρμογές (βάσει της $\upsilon_2 = \left(\sqrt{\lambda^2+(\lambda+1)^2\tan^2\varphi}\right)\cdot\upsilon_1$)

$$\lambda = 0,5 \rightarrow \varphi = \tan^{-1}\sqrt{\frac{0,50}{1,50}} = 30^0 \left[\begin{array}{l} \varphi = 20^{\circ} \rightarrow \upsilon_2 = \sqrt{0,5^2+1,5^2\tan^2 20^{\circ}}\cdot\upsilon_1 = 0,74\cdot\upsilon_1<\upsilon_1 \\ \varphi = 30^{\circ} \rightarrow \upsilon_2 = \sqrt{0,5^2+1,5^2\tan^2 30^{\circ}}\cdot\upsilon_1 = \upsilon_1 \\ \varphi = 45^{\circ} \rightarrow \upsilon_2 = \sqrt{0,5^2+1,5^2\tan^2 45^{\circ}}\cdot\upsilon_1 = 1,58\cdot\upsilon_1>\upsilon_1 \end{array}\right]$$

$$\lambda = 0,25 \rightarrow \varphi = \tan^{-1}\sqrt{\frac{0,75}{1,25}} = 37,7^0 \left[\begin{array}{l} \varphi = 30^{\circ} \rightarrow \upsilon_2 = \sqrt{0,25^2+1,25^2\tan^2 30^{\circ}}\cdot\upsilon_1 = 0,76\cdot\upsilon_1<\upsilon_1 \\ \varphi = 37,7^{\circ} \rightarrow \upsilon_2 = \sqrt{0,25^2+1,25^2\tan^2 37,7^{\circ}}\cdot\upsilon_1 = \upsilon_1 \\ \varphi = 45^{\circ} \rightarrow \upsilon_2 = \sqrt{0,25^2+1,25^2\tan^2 45^{\circ}}\cdot\upsilon_1 = 1,27\cdot\upsilon_1>\upsilon_1 \end{array}\right]$$



$$\lambda = 1 \rightarrow \begin{bmatrix} \upsilon_{2/1} = \dfrac{2}{\cos\varphi}\upsilon_1 \xrightarrow{\varphi=\pi/4} \upsilon_{2/1} = 2\sqrt{2}\cdot\upsilon_1 \\ \upsilon_2 = \sqrt{1+4\tan^2\varphi}\cdot\upsilon_1 \xrightarrow{\varphi=\pi/4} \upsilon_2 = \sqrt{5}\cdot\upsilon_1 \end{bmatrix} \quad \lambda = 2 \rightarrow \begin{bmatrix} \upsilon_{2/1} = \dfrac{3}{\cos\varphi}\upsilon_1 \xrightarrow{\varphi=\pi/4} \upsilon_{2/1} = 3\sqrt{2}\cdot\upsilon_1 \\ \upsilon_2 = \sqrt{4+9\tan^2\varphi}\cdot\upsilon_1 \xrightarrow{\varphi=\pi/4} \upsilon_2 = \sqrt{13}\cdot\upsilon_1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 3 \rightarrow \begin{bmatrix} \upsilon_{2/1} = \dfrac{4}{\cos\varphi}\upsilon_1 \xrightarrow{\varphi=\pi/4} \upsilon_{2/1} = 4\sqrt{2}\cdot\upsilon_1 \\ \upsilon_2 = \sqrt{9+16\tan^2\varphi}\cdot\upsilon_1 \xrightarrow{\varphi=\pi/4} \upsilon_2 = 5\cdot\upsilon_1 \end{bmatrix} \quad \lambda = 4 \rightarrow \begin{bmatrix} \upsilon_{2/1} = \dfrac{5}{\cos\varphi}\upsilon_1 \xrightarrow{\varphi=\pi/4} \upsilon_{2/1} = 5\sqrt{2}\cdot\upsilon_1 \\ \upsilon_2 = \sqrt{16+25\tan^2\varphi}\cdot\upsilon_1 \xrightarrow{\varphi=\pi/4} \upsilon_2 = \sqrt{41}\cdot\upsilon_1 \end{bmatrix}$$

Αντίστοιχες ακριβώς σχέσεις μπορούν να γραφτούν και για τις μετατοπίσεις και τις επιταχύνσεις (με παραγώγιση ως προς το χρόνο). Για παράδειγμα:

$$(\lambda = 3,\ \varphi = \pi/4): \upsilon_2 = 5\upsilon_1 \rightarrow a_2 t = 5a_1 t \rightarrow a_2 = 5a_1$$

Κατεύθυνση Ταχύτητας Σώματος

Από το πολύγωνο των διανυσμάτων (Σχήμα 3) των ταχυτήτων υπολογίζουμε, με το νόμο των ημιτόνων, τη (μικρότερη) αμβλεία γωνία θ, ανάμεσα στις κατευθύνσεις των ταχυτήτων των δύο σωμάτων. Η κατεύθυνση της ταχύτητας της σφήνας είναι οριζόντια προς τα αριστερά και του σώματος πλάγια δεξιά (της κατακορύφου) προς τα κάτω, οπότε $90^0 < \theta < 180^0 - \varphi$. Το κάτω όριο $180^0 - \varphi$ αντιστοιχεί στην περίπτωση που το σώμα πέφτει ελεύθερα και το πάνω, χωρίς κίνηση της σφήνας.

$$\frac{\upsilon_{2/1}}{\sin\theta} = \frac{\upsilon_2}{\sin\varphi} \rightarrow \sin\theta = \sin\varphi\frac{\upsilon_{2/1}}{\upsilon_2} = \sin\varphi\frac{\dfrac{\lambda+1}{\cos\varphi}\upsilon_1}{\upsilon_1\sqrt{\left(\dfrac{\lambda+1}{\cos\varphi}\right)^2 - (2\lambda+1)}} = \sin\varphi\frac{\lambda+1}{\sqrt{(\lambda+1)^2 - (2\lambda+1)\cos^2\varphi}} =$$

$$= \ldots = \frac{(\lambda+1)\sin\varphi}{\sqrt{\lambda^2 + (2\lambda+1)\sin^2\varphi}}$$

$$\theta = \min\angle(\vec{\upsilon}_1,\ \vec{\upsilon}_2) \in (90^\circ,\ 180^\circ - \varphi),\ \ \sin\theta = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{1 - \dfrac{2\lambda+1}{(\lambda+1)^2}\cos^2\varphi}},\ \mathrm{C} = \frac{2\lambda+1}{(\lambda+1)^2} < 1$$

$$\tan^2\theta = \frac{\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta} = \frac{\dfrac{\sin^2\varphi}{1-C\cos^2\varphi}}{1-\dfrac{\sin^2\varphi}{1-C\cos^2\varphi}} = \frac{\sin^2\varphi}{1-C\cos^2\varphi-\sin^2\varphi} = \frac{\sin^2\varphi}{(1-C)\cos^2\varphi} = \frac{\tan^2\varphi}{1-\dfrac{2\lambda+1}{(\lambda+1)^2}} = \frac{(\lambda+1)^2\tan^2\varphi}{\lambda^2} \rightarrow$$

$$\tan\theta = -\frac{\lambda+1}{\lambda}\tan\varphi \quad \theta = \tan^{-1}\left(-\frac{\lambda+1}{\lambda}\tan\varphi\right) \quad \varphi\in\left(0^{\circ},\ 90^{\circ}\right) \quad \theta\in\left(90^{\circ},\ 180^{\circ}-\varphi\right)$$

$$\cos\theta = -\frac{\lambda\cos\varphi}{\sqrt{\lambda^2+(2\lambda+1)\sin^2\varphi}}$$

Συμπεράσματα

Από τη σχέση $\tan\theta = -\dfrac{\lambda+1}{\lambda}\tan\varphi,\ \varphi\in\left(0^{\circ},\ 90^{\circ}\right),\ \theta\in\left(90^{\circ},\ 180^{\circ}-\varphi\right)$ και με δεδομένο ότι η $z(\lambda) = -\dfrac{\lambda+1}{\lambda}$ είναι αύξουσα συνάρτηση του λ[2] συμπεραίνουμε ότι η γωνία θ είναι:

- Αύξουσα συνάρτηση του λ για κάθε κλίση φ, δηλ. $90^0 < \theta = \theta(\lambda)$, αφού (για κάθε γωνία φ) αυξανόμενου του λ, αυξάνεται η $z(\lambda)$, όπως και η $0 > \tan\theta = f(\lambda)$ (λιγότερο αρνητική), οπότε η αμβλεία θ αυξάνεται. Για πολύ μεγάλα λ η εφαπτομένη της θ τείνει να γίνει ίση με το αντίθετο της εφαπτομένης της φ[3], δηλ.η θ τείνει να γίνει παραπληρωματική της φ και το σώμα να κινείται απολύτως κατά μήκος της κεκλιμένης πλευράς, ενώ η σφήνα τείνει να μην κινείται (μηδενισμός της ταχύτητας της σφήνας και εξίσωση σχετικής και απόλυτης ταχύτητας του σώματος).
- Φθίνουσα συνάρτηση της φ (για κάθε λ), $\theta = \theta(\varphi)$, αφού αυξανόμενης της φ και της εφαπτομένης της μειώνεται η εφαπτομένη της θ (περισσότερο αρνητική) που αντιστοιχεί σε μείωση της αμβλείας θ.
- Σταθερή κατά την εξέλιξη του φαινομένου, αφού εξαρτάται μόνο από τις τιμές των λ και φ, δηλ είναι ανεξάρτητη της χρονικής στιγμής ή της κατακόρυφης μετατόπισης y του σώματος ή των αντίστοιχων τιμών των ταχυτήτων. Αυτό συνεπάγεται ότι η απόλυτη ταχύτητα (όπως και η μετατόπιση και η επιτάχυνση) του σώματος έχει σταθερή κατεύθυνση (καθόλη τη διάρκεια του φαινομένου). Για παράδειγμα με $\varphi = 45^0$ η κίνηση του σώματος γίνεται υπό γωνία 127^0 ως προς την αρνητική οριζόντια κατεύθυνση ή υπό γωνία $180-127^0 = 53^0$ ως προς την οριζόντια θετική κατεύθυνση ή υπό

2

3

$127^0 - 90^0 = 37^0 < 45^0$ δεξιά της κατακόρυφου (άξονας y) καθώς κατέρχεται στην κεκλιμένη πλευρά της σφήνας.

Εφαρμογές (η $\tan\theta$ και η θ ως αύξουσα συνάρτηση του λ βάσει της τελευταίας σχέσης):

$$\lambda = 1 \rightarrow \tan\theta = -2\tan\varphi \xrightarrow{\varphi=\pi/4} \tan\theta = -2 \rightarrow \theta \approx 180^0 - 63^0 = 117^\circ$$

$$\lambda = 2 \rightarrow \tan\theta = -\frac{3}{2}\tan\varphi \xrightarrow{\varphi=\pi/4} \tan\theta = -1,5 \rightarrow \theta \approx 180^0 - 56^0 = 124^\circ$$

$$\lambda = 3 \rightarrow \tan\theta = -\frac{4}{3}\tan\varphi \xrightarrow{\varphi=\pi/4} \tan\theta = -\frac{4}{3} \rightarrow \theta \approx 180^0 - 53^0 = 127^\circ$$

$$\lambda = 4 \rightarrow \tan\theta = -\frac{5}{4}\tan\varphi \xrightarrow{\varphi=\pi/4} \tan\theta = -\frac{5}{4} \rightarrow \theta \approx 180^0 - 51^0 = 129^\circ$$

$$\lambda = 20 \rightarrow \tan\theta = -\frac{21}{20}\tan\varphi \xrightarrow{\varphi=\pi/4} \tan\theta = -\frac{21}{20} \rightarrow \theta = 180^0 - 46^0 = 134^\circ \approx 90^\circ + 45^\circ$$

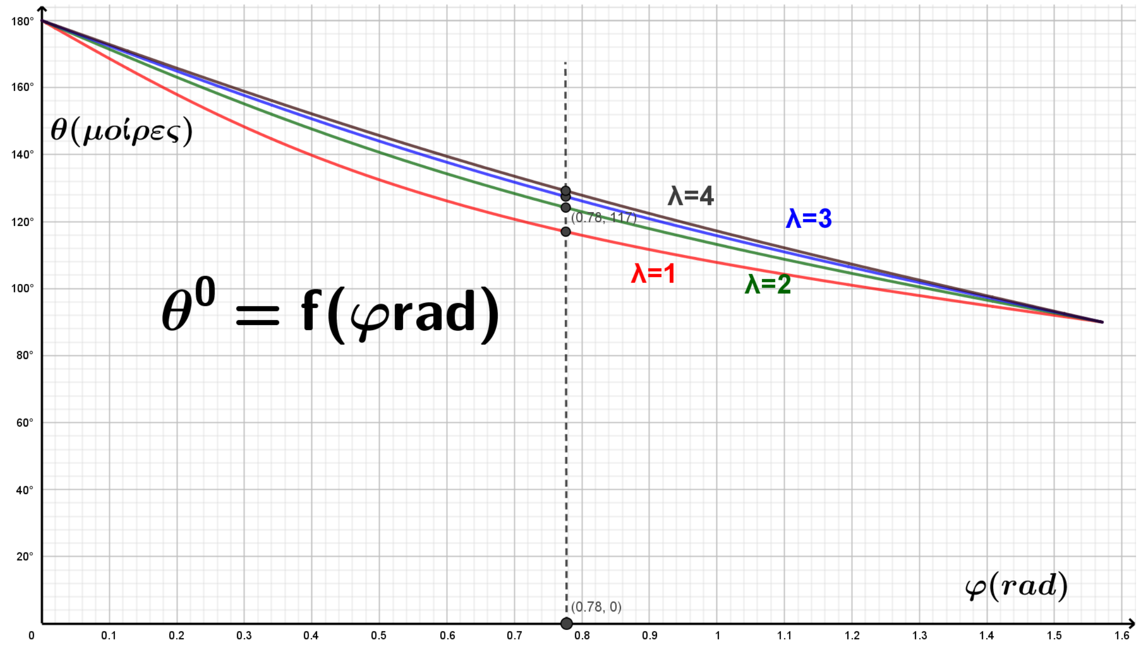
$$\lim_{\lambda\to\infty}\tan\theta = \lim_{\lambda\to\infty}\left(-\frac{\lambda+1}{\lambda}\tan\varphi\right) = -\lim_{\lambda\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)\tan\varphi\right] = -\tan\varphi \Rightarrow \theta \to 180^\circ - \varphi$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\tan\theta = \lim_{\lambda\to\infty}\left(-\frac{\lambda+1}{\lambda}\tan\varphi\right) = -\lim_{\lambda\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)\tan\varphi\right] = -\tan\varphi \Rightarrow \theta \to 180^\circ - \varphi$$

$$\lim_{\lambda\to 0}\tan\theta = \lim_{\lambda\to 0}\left(-\frac{\lambda+1}{\lambda}\tan\varphi\right) = -\lim_{\lambda\to 0}\left[\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)\tan\varphi\right] = -\infty \Rightarrow \theta \to 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

$$\lim_{\varphi\to 0}\tan\theta = \lim_{\varphi\to 0}\left(-\frac{\lambda+1}{\lambda}\tan\varphi\right) = 0 \Rightarrow \theta \to 0^\circ$$

$$\lim_{\varphi\to 90^\circ}\tan\theta = \lim_{\varphi\to 90^\circ}\left(-\frac{\lambda+1}{\lambda}\tan\varphi\right) = -\infty \Rightarrow \theta \to 90^\circ$$



Σχήμα 5: Η συνάρτηση $\theta = \theta(\varphi)$ για κάθε τιμή του λ είναι φθίνουσα, δηλ. καθώς η φ αυξάνεται η $\tan\theta$ γίνεται αρνητικότερη, οπότε η θ ως αμβλεία θα μικραίνει. Ο ρόλος του λ όπως φαίνεται δεν είναι ιδιαίτερα σημαντικός για κάθε γωνία φ (η αύξηση του λ οδηγεί σε μικρή αύξηση της θ).

Η Εξίσωση Της Τροχιάς Του Σώματος (Βλέπε Και Σελίδα 39)

Θα είναι της μορφής (Σχήμα 6):

$$y_2 = \tan\left(180^0 - \theta\right)\cdot x_2 = -\tan\theta \cdot x_2 = \left(\frac{\lambda+1}{\lambda}\tan\varphi\right)x_2 \to x_2 = -\cot\theta \cdot y_2 = \left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\cot\varphi\right)\cdot y_2$$

$$x_2 = \left(\frac{\lambda\cot\varphi}{\lambda+1}\right)\cdot y_2$$

$$y_2 = \left(\frac{\lambda+1}{\lambda}\tan\varphi\right)\cdot x_2,\ \left(x_2 > 0 \to +, y > 0 + \downarrow\right), y_2 \in \left[0,\ y_{2,\max} = h\right],\ x_2 \in \left[0,\ \frac{\lambda\cot\varphi}{\lambda+1}h\right]$$

$$\upsilon_{2,x} = -\lambda\upsilon_1 \to x_2 = -\lambda x_1 \to x_1 = -\frac{1}{\lambda}x_2 = -\frac{1}{\lambda}\frac{\lambda\cot\varphi}{\lambda+1}y_2 \to x_1 = \left(-\frac{\cot\varphi}{\lambda+1}\right)\cdot y_2$$

$$x_2 = x_{2/1} + x_1 \to x_{2/1} = x_2 - x_1 \to x_{2/1} = y_2\cot\varphi$$

$$|x_1| + x_2 = y_2\cot\varphi \to y_2 = \left(|x_1| + x_2\right)\tan\varphi = (\lambda+1)|x_1|\tan\varphi$$ [4]

[4] Στις εξαρτήσεις των διαφόρων μεταβλητών της κίνησης ως εξηρτημένη μεταβλητή θεωρείται η κατακόρυφη μετατόπιση του σώματος με παραμέτρους τα φ και λ.

Συμπεράσματα

Γενικά σε κάθε οριζόντια μετατόπιση προς τα αριστερά της σφήνας αντιστοιχεί λ- πλάσια του σώματος σε αντίθετη κατεύθυνση ισχύοντας η $y_2 = \left(|x_1| + x_2\right)\tan\varphi = (\lambda+1)|x_1|\tan\varphi$ και το άθροισμά τους $|x_1| + x_2$ είναι ίσο με την τρίτη οριζόντια πλευρά του σχηματιζόμενου κάθε φορά ορθογώνιου τριγώνου που ορίζεται από τη θέση του σώματος πάνω στη σφήνα που το μήκος της θα ισούται με $|x_1| + x_2 = y\cot\varphi$.

Εφαρμογές (εξίσωση τροχιάς)

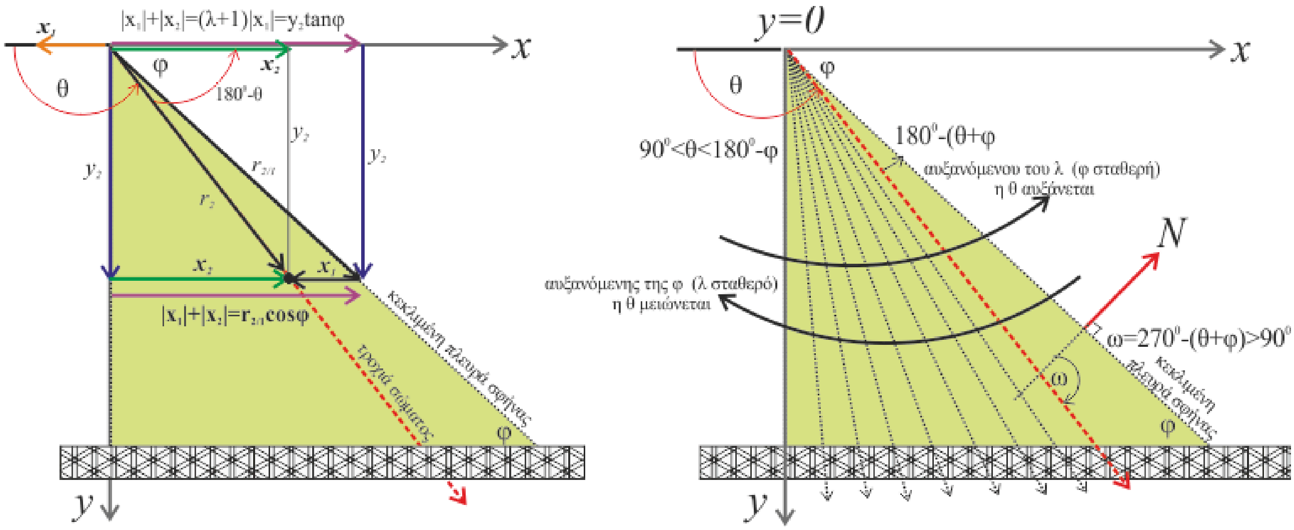
$$\lambda = 3 \rightarrow \tan\theta = -\frac{4}{3}\tan\varphi \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = -\dfrac{\cot\varphi}{4}\cdot y_2 \\ x_2 = \dfrac{3\cot\varphi}{4}\cdot y_2 \\ y_2 = \left(\dfrac{4}{3}\tan\varphi\right)\cdot x_2 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi = 30^\circ \rightarrow \tan\theta = -\dfrac{4}{3}\tan 30^\circ = -\dfrac{4\sqrt{3}}{9} \rightarrow \theta = 180^\circ\text{-}37{,}6^\circ\text{=}142{,}4^\circ \\ \left(\begin{array}{l} x_1 = -0{,}43\cdot y_2 \\ x_2 = 1{,}30\cdot y_2 \\ y_2 = 0{,}77\cdot x_2 \end{array} \right) \xrightarrow{y_{\max}=1{,}4m} \left(\begin{array}{l} x_{1,\max} = -0{,}43\cdot 1{,}4\ m = -0{,}60\ m \\ x_{2,\max} = 1{,}30\cdot 1{,}4\ m = 1{,}82\ m \\ y_{2,\max} = 0{,}77\cdot x_{2,\max} = 0{,}77\cdot 1{,}82\ m = 1{,}4\ m = \left(|x_{1,\max}| + x_{2,\max}\right)\tan 30^\circ \end{array} \right) \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi = 45^\circ \rightarrow \tan\theta = -\dfrac{4}{3}\cdot\tan 45^\circ = -\dfrac{4}{3} \rightarrow \theta = 180^\circ\text{-}53^\circ\text{=}127^\circ \\ \left(\begin{array}{l} x_1 = -\dfrac{1}{4}\cdot y_2 \\ x_2 = \dfrac{3}{4}\cdot y_2 \\ y_2 = \dfrac{4}{3}\cdot x_2 \end{array} \right) \xrightarrow{y_{\max}=1{,}4m} \left(\begin{array}{l} x_{1,\max} = -\dfrac{1}{4}1{,}4\ m = -0{,}35\ m \\ x_2 = \dfrac{3}{4}1{,}4\ m = 1{,}05\ m \\ y_{2,\max} = \dfrac{4}{3}\cdot x_{2,\max} = \dfrac{4}{3}1{,}05\ m = 1{,}4 = \left(|x_{1,\max}| + x_{2,\max}\right)\tan 45^\circ \end{array} \right) \end{array} \right\}$$

Αν $\lambda = 3$, τότε το μέτρο της μετατόπισης του σώματος είναι τριπλάσια του μέτρου της μετατόπισης της σφήνας και αυτό ανεξαρτήτως της φ.

Αν $\varphi = 45^\circ$ με $\tan 45^\circ = 1$, τότε για κάθε κατακόρυφη μετατόπιση y_2 του σώματος αντιστοιχεί $\frac{3}{4} y_2$ οριζόντια μετατόπισή του και $-\frac{1}{4} y_2$ της σφήνας. Στην ολοκλήρωση της κίνησης κατά $y_{2,\max} = 1{,}4\ m$ αντιστοιχεί $1{,}05\ m$ σε οριζόντια προς τα δεξιά μετατόπιση του σώματος και $0{,}35\ m$ προς τα αριστερά της σφήνας. Σύνολο όσο είναι το ύψος της σφήνας (και αυτό για κάθε y_2) με $\varphi = 45^\circ$.



Σχήμα 6: Δυνατές απόλυτες κινήσεις του σώματος (διακεκομμένες). Καθώς το λ μεγαλώνει (για ίδιο φ) η κίνηση γίνεται όλο και πιο πλάγια. Καθώς η φ μεγαλώνει (για ίδιο λ) η κίνηση γίνεται όλο και πιο όρθια. Η N σχηματίζει γωνία ω μεγαλύτερη της ορθής με τη μετατόπιση του σώματος. Η οριζόντια πλευρά του σχηματιζόμενου ορθογώνιου τριγώνου καθώς το σώμα κινείται κατά μήκος της κεκλιμένης πλευράς της μετακινούμενης προς τα αριστερά σφήνας ισούται με το άθροισμα των μέτρων των οριζόντιων μετατοπίσεων των δύο σωμάτων

Αν απαιτήσουμε το σώμα να έχει μια κατακόρυφη πορεία, δηλ. $\theta = 90^0$ τότε:

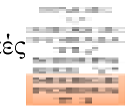
$$\sin\theta = 1 = \sin\varphi \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2\lambda+1}{(\lambda+1)^2}\cos^2\varphi}} \to 1 - \frac{2\lambda+1}{(\lambda+1)^2}\cos^2\varphi = \sin^2\varphi \to 1 - \sin^2\varphi = \frac{2\lambda+1}{(\lambda+1)^2}\cos^2\varphi$$

$$\to \frac{2\lambda+1}{(\lambda+1)^2} = 1 \to 2\lambda+1 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 \to \lambda = 0$$

Δηλ. μόνο στην περίπτωση που η μάζα της σφήνας είναι αμελητέα συγκρινόμενη με τη μάζα του σώματος, τότε αυτό θα κινηθεί απολύτως σχεδόν κατακόρυφα (για κάθε γωνία φ).

Διατήρηση Μηχανικής Ενέργειας Του Συστήματος – Προσδιορισμός Ταχυτήτων

Κατά τη διάρκεια του φαινομένου η μοναδική δύναμη που παράγει έργο επί του συστήματος είναι η δύναμη του βάρους του κατερχόμενου σώματος μέσω του οποίου η απώλεια της δυναμικής του ενέργειας,



λόγω αντίστοιχης μείωσης του ύψους, μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια των δύο σωμάτων. Οι εσωτερικές δυνάμεις $\left(\vec{N},\ -\vec{N}\right)$ παράγουν έργο η κάθε μια στα ξεχωριστά σώματα που ασκούνται, με μηδενικό συνολικό άθροισμα. Η $\vec{N}$ που είναι κάθετη στην κεκλιμένη πλευρά της σφήνας, αλλά όχι στη μετατόπιση του σώματος (βλέπε Σχήμα 6), σχηματίζοντας γωνία μεγαλύτερη της ορθής με τη μετατόπιση του σώματος, παράγει συνολικά αρνητικό έργο σε αυτό, ενώ η αντίδρασή της $-\vec{N}$ επί της σφήνας θετικό έργο. Με άλλα λόγια η ενέργεια που αποσπάται από τη δυναμική ενέργεια του σώματος, μέσω του έργου της $\vec{N}+\vec{w}_2$ μετασχηματίζεται σε κινητική του σώματος και μέσω του έργου της $-\vec{N}$ μεταβιβάζεται στη σφήνα ως κινητική ενέργεια (στην οριζόντια κίνησή του).

$$d\vec{r}_2 = d\vec{r}_1 + d\vec{r}_{2/1} \rightarrow \vec{N}\cdot d\vec{r}_2 = \vec{N}\cdot\left(d\vec{r}_1 + d\vec{r}_{2/1}\right) = \vec{N}\cdot d\vec{r}_1 + \vec{N}\cdot d\vec{r}_{2/1} = \vec{N}\cdot d\vec{r}_1 \quad \left(\vec{N}\perp d\vec{r}_{2/1}\right)$$

$$\vec{N}\cdot d\vec{r}_2 = \vec{N}\cdot d\vec{r}_1 \rightarrow \vec{N}\cdot d\vec{r}_2 + \left(-\vec{N}\right)\cdot d\vec{r}_1 = 0$$

Εφαρμόζοντας την ΑΔΜΕ για το σύστημα, μετά από κατακόρυφη μετατόπιση (πτώση) του σώματος κατά y παίρνουμε για την ταχύτητα της σφήνας:

$$\left|\Delta U_2\right| = K_1 + K_2 \rightarrow mgy = \tfrac{1}{2}\lambda m\upsilon_1^2 + \tfrac{1}{2}m\upsilon_2^2 \rightarrow$$

$$2gy = \lambda\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 = \left[\lambda + \frac{(\lambda+1)^2 - (2\lambda+1)\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi}\right]\upsilon_1^2 = \left\{\frac{\lambda\cos^2\varphi + (\lambda+1)^2 - (2\lambda+1)\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi}\right\}\upsilon_1^2 =$$

$$\frac{(\lambda+1)^2 - (\lambda+1)\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi}\upsilon_1^2 = \frac{(\lambda+1)\left(\lambda+\sin^2\varphi\right)}{\cos^2\varphi}\upsilon_1^2 = (\lambda+1)\left(\frac{\lambda}{\cos^2\varphi} + \tan^2\varphi\right)\upsilon_1^2 =$$

$$(\lambda+1)\left(\frac{\lambda}{\dfrac{1}{1+\tan^2\varphi}} + \tan^2\varphi\right)\upsilon_1^2 = (\lambda+1)\left[\lambda + (\lambda+1)\tan^2\varphi\right]\upsilon_1^2$$ [5]

Ταχύτητα Σφήνας

$$\upsilon_1 = \sqrt{\frac{1}{(\lambda+1)\left[\lambda+(\lambda+1)\tan^2\varphi\right]}2gy} = \sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{(\lambda+1)\left(\lambda+\sin^2\varphi\right)}2gy} = \sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{(\lambda+1)^2 - (\lambda+1)\cos^2\varphi}2gy}$$

[5] η ταχύτητα του σώματος αν έπεφτε ελεύθερα κατά

Συμπεράσματα (ταχύτητα σφήνας)

Από τις προηγούμενες σχέσεις προκύπτει ότι η ταχύτητα της σφήνας (μετά από πτώση του σώματος κατά y) είναι:

- φθίνουσα συνάρτηση του λ (για κάθε τιμή της φ), αφού ο παρανομαστής ($2^η$ ή $3^η$ μορφή) της υπορρίζου ποσότητας είναι αύξουσα συνάρτηση του λ και το κλάσμα συνολικά μικραίνει καθώς το λ μεγαλώνει, δηλ. $\upsilon_1 = \upsilon_1(\lambda) \square\ \lambda \in R^+\ \forall \varphi \in (0^{\square}, 90^{\square})$.
- φθίνουσα συνάρτηση της φ (για κάθε τιμή του λ), αφού ($3^η$ μορφή) αυξανόμενης της φ και της εφαπτομένης της ο παρανομαστής μεγαλώνει και το κλάσμα μικραίνει, δηλ $\upsilon_1 = \upsilon_1(\varphi) \square\ \varphi \in (0^{\square}, 90^{\square}),\ \forall \lambda \in R^+$. Για $\varphi \to 0^0$ που το σώμα δεν πέφτει, οπότε με $y \to 0$ δίνει $\upsilon_1 \to 0$, ενώ για $\varphi \to 90^0$ δίνει $\upsilon_1 = 0$, αφού το σώμα πέφτει κατακόρυφα, χωρίς να επηρεάζει τη σφήνα.

Εφαρμογή (βάσει της $3^{ης}$)

$$\lambda = 1 \to \upsilon_1 = \sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{4-2\cos^2\varphi}2gy} \xrightarrow{\varphi=\pi/4} \upsilon_1 = \sqrt{\frac{1}{6}2gy} = 0,41\cdot\sqrt{2gy} \xrightarrow{y=h} \upsilon_1 = 0,41\cdot 5,29 = 2,17\ m/s$$

$$\lambda = 2 \to \upsilon_1 = \sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{9-3\cos^2\varphi}2gy} \xrightarrow{\varphi=\pi/4} \upsilon_1 = \sqrt{\frac{1}{15}2gy} = 0,26\cdot\sqrt{2gy} \xrightarrow{y=h} \upsilon_1 = 0,26\cdot 5,29 = 1,38\ m/s$$

$$\lambda = 3 \to \upsilon_1 = \sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{16-4\cos^2\varphi}2gy} \xrightarrow{\varphi=\pi/4} \upsilon_1 = \sqrt{\frac{1}{28}2gy} = 0,19\cdot\sqrt{2gy} \xrightarrow{y=h} \upsilon_1 = 0,19\cdot 5,29 = 1,00\ m/s$$

$$\lambda = 4 \to \upsilon_1 = \sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{25-5\cos^2\varphi}2gy} \xrightarrow{\varphi=\pi/4} \upsilon_1 = \sqrt{\frac{1}{45}2gy} = 0,15\cdot\sqrt{2gy} \xrightarrow{y=h} \upsilon_1 = 0,15\cdot 5,29 = 0,79\ m/s$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\upsilon_1 = \lim_{\lambda\to\infty}\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{(\lambda+1)^2-(\lambda+1)\cos^2\varphi}2gy} = \lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{\left(1+\frac{2}{\lambda}+\frac{1}{\lambda^2}\right)-\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda^2}\right)\cos^2\varphi}2gy} = 0$$

$$\lim_{\varphi\to\pi/2}\upsilon_1 = \lim_{\varphi\to\pi/2}\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{(\lambda+1)^2-(\lambda+1)\cos^2\varphi}2gy} = 0$$

Ταχύτητα του σώματος

$$\upsilon_2 = \left(\frac{\sqrt{\lambda^2 + (\lambda+1)^2 \tan^2\varphi}}{\dfrac{\sqrt{\lambda^2+(2\lambda+1)\sin^2\varphi}}{\cos\varphi}} \over \dfrac{\sqrt{(\lambda+1)^2-(2\lambda+1)\cos^2\varphi}}{\cos\varphi} \right) \cdot \upsilon_1 = \left(\frac{\sqrt{\lambda^2 + (\lambda+1)^2 \tan^2\varphi}}{\dfrac{\sqrt{\lambda^2+(2\lambda+1)\sin^2\varphi}}{\cos\varphi}} \over \dfrac{\sqrt{(\lambda+1)^2-(2\lambda+1)\cos^2\varphi}}{\cos\varphi} \right) \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{(\lambda+1)\left[\lambda+(\lambda+1)\tan^2\varphi\right]}2gy} \over {\sqrt{\dfrac{\cos^2\varphi}{(\lambda+1)(\lambda+\sin^2\varphi)}2gy} \over \sqrt{\dfrac{\cos^2\varphi}{(\lambda+1)^2-(\lambda+1)\cos^2\varphi}2gy}} \right)$$

Συμπεράσματα

$$\upsilon_2 = \sqrt{\frac{\lambda^2+(\lambda+1)^2\tan^2\varphi}{(\lambda+1)\left[\lambda+(\lambda+1)\tan^2\varphi\right]}2gy} = \sqrt{\frac{\lambda^2+(2\lambda+1)\sin^2\varphi}{(\lambda+1)(\lambda+\sin^2\varphi)}2gy} = \sqrt{\frac{(\lambda+1)^2-(2\lambda+1)\cos^2\varphi}{(\lambda+1)^2-(\lambda+1)\cos^2\varphi}2gy}$$

Από τις σχέσεις υπολογισμού της ταχύτητας του σώματος προκύπτει ότι:

- είναι αύξουσα συνάρτηση της φ, $\upsilon_2 = \upsilon_2(\varphi)\nearrow\ ,\ \varphi \in \left(0,\ 90^{\circ}\right)\ \forall\lambda \in R^+$, αφού η πρώτη παράγωγος (2ης μορφής, βλέπε παρακάτω απόδειξη 1) ως προς φ είναι θετική. Για $\varphi \to 0^0$ που το σώμα δεν πέφτει, οπότε με $y \to 0$ δίνει $\upsilon_2 \to 0$, ενώ για $\varphi \to 90^0$ δίνει $\upsilon_2 \to \sqrt{2gy}$, αφού το σώμα πέφτει κατακόρυφα.
- Είναι φθίνουσα συνάρτηση του λ για τιμές του $\lambda < \sin\varphi$, ενώ για μεγαλύτερες τιμές αύξουσα και στην τιμή $\lambda = \sin\varphi$ παρουσιάζει ελάχιστο ίσο με $\dfrac{2\lambda}{\lambda+1} = \dfrac{2\sin\varphi}{1+\sin\varphi}$, αφού η παραγωγός της ως προς λ (3η μορφή, βλέπε παρακάτω απόδειξη 2) είναι αρνητική για τιμές $\lambda < \sin\varphi$ και θετική για μεγαλύτερες.

Έτσι $\upsilon_2 = \upsilon_2(\lambda) : \left(0 \searrow\ \lambda = \sin\varphi < 1 \nearrow\ \infty\right),\ \forall\varphi \in \left(0^{\circ},\ 90^{\circ}\right)$. Το ελάχιστο $\dfrac{2\sin\varphi}{\sin\varphi+1} = \dfrac{2}{1+\dfrac{1}{\sin\varphi}}$ αυξάνεται καθώς η γωνία φ μεγαλώνει (η κοιλάδα της καμπύλης γίνεται μικρότερου βάθους). Για παράδειγμα για

$$\varphi=\frac{\pi}{6}\rightarrow\left(\frac{\upsilon_2^2}{2gy}\right)_{\min}\ \text{για}\ \lambda=\sin\frac{\pi}{6}=0,50\rightarrow\left(\frac{\upsilon_2^2}{2gy}\right)_{\min}=\frac{2\lambda}{\lambda+1}=\frac{1}{1,5}=0,67$$

$$\varphi=\frac{\pi}{4}\rightarrow\left(\frac{\upsilon_2^2}{2gy}\right)_{\min}\ \text{για}\ \lambda=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}=0,70\rightarrow\left(\frac{\upsilon_2^2}{2gy}\right)_{\min}=\frac{2\lambda}{\lambda+1}=\frac{1,4}{1,7}=0,82$$

$$\varphi=\frac{\pi}{3}\rightarrow\left(\frac{\upsilon_2^2}{2gy}\right)_{\min}\ \text{για}\ \lambda=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}=0,87\rightarrow\left(\frac{\upsilon_2^2}{2gy}\right)_{\min}=\frac{2\lambda}{\lambda+1}=\frac{1,74}{1,87}=0,93$$

Απόδειξη 1

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\upsilon_2^2}{2gy}\right)=\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{\lambda^2+(2\lambda+1)\sin^2\varphi}{\lambda^2+\lambda+(\lambda+1)\sin^2\varphi}\right]=$$

$$\frac{\left[(2\lambda+1)2\sin\varphi\cos\varphi\right]\left[\lambda^2+\lambda+(\lambda+1)\sin^2\varphi\right]-\left[\lambda^2+(2\lambda+1)\sin^2\varphi\right](\lambda+1)2\sin\varphi\cos\varphi}{\left[\lambda^2+\lambda+(\lambda+1)\sin^2\varphi\right]^2}=$$

$$\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{\left[\lambda^2+\lambda+(\lambda+1)\sin^2\varphi\right]^2}(2\lambda+1)\left[\lambda^2+\lambda+(\lambda+1)\sin^2\varphi\right]-(\lambda+1)\left[\lambda^2+(2\lambda+1)\sin^2\varphi\right]=$$

$$\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{\left[\lambda^2+\lambda+(\lambda+1)\sin^2\varphi\right]^2}\left[2\lambda^3+2\lambda^2+2\lambda(\lambda+1)\sin^2\varphi+\lambda^2+\lambda+(\lambda+1)\sin^2\varphi-\lambda^3-\lambda^2-(\lambda+1)(2\lambda+1)\sin^2\varphi\right]=$$

$$\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{\left[\lambda^2+\lambda+(\lambda+1)\sin^2\varphi\right]^2}\left[\lambda^3+2\lambda^2+\lambda+\sin^2\varphi\left[2\lambda(\lambda+1)+(\lambda+1)-(\lambda+1)(2\lambda+1)\right]\right]=$$

$$\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{\left[\lambda^2+\lambda+(\lambda+1)\sin^2\varphi\right]^2}\left[\lambda^3+2\lambda^2+\lambda+\sin^2\varphi\left[2\lambda^2+2\lambda+\lambda+1-2\lambda^2-\lambda-2\lambda-1\right]\right]=$$

$$\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{\left[\lambda^2+\lambda+(\lambda+1)\sin^2\varphi\right]^2}\left[\lambda^3+2\lambda^2+\lambda\right]>0\rightarrow\upsilon_2=\upsilon_2(\varphi)\uparrow\ ,\ \varphi\in\left(0,\ 90^{\circ}\right)\ \forall\lambda\in R^+$$

Ίσως πιο εύκολα με παραγώγιση της 1ης μορφής

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\upsilon_2^2}{2gy}\right)=\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{\lambda^2+(\lambda+1)^2\tan^2\varphi}{(\lambda+1)\left[\lambda+(\lambda+1)\tan^2\varphi\right]}\right]=$$

$$\frac{(\lambda+1)^2\,2\tan\varphi\frac{1}{\cos^2\varphi}(\lambda+1)\left[\lambda+(\lambda+1)\tan^2\varphi\right]-\left[\lambda^2+(\lambda+1)^2\tan^2\varphi\right](\lambda+1)(\lambda+1)2\tan\varphi\frac{1}{\cos^2\varphi}}{(\lambda+1)^2\left[\lambda+(\lambda+1)\tan^2\varphi\right]^2}=$$

$$=\frac{2\tan\varphi}{\cos^2\varphi}\frac{(\lambda+1)\left[\lambda+(\lambda+1)\tan^2\varphi\right]-\left[\lambda^2+(\lambda+1)^2\tan^2\varphi\right]}{\left[\lambda+(\lambda+1)\tan^2\varphi\right]^2}=$$

$$\frac{2\tan\varphi}{\cos^2\varphi}\frac{\lambda(\lambda+1)+(\lambda+1)^2\tan^2\varphi^2-\lambda^2-(\lambda+1)^2\tan^2\varphi}{\left[\lambda+(\lambda+1)\tan^2\varphi\right]^2}$$

$$=\frac{2\lambda\tan\varphi}{\cos^2\varphi\left[\lambda+(\lambda+1)\tan^2\varphi\right]^2}>0\rightarrow\frac{\upsilon_2^2}{2gy}=f(\varphi)\,\square$$

Απόδειξη 2

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\upsilon_2^2}{2gy}\right)=\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\frac{(\lambda+1)^2-(2\lambda+1)\cos^2\varphi}{(\lambda+1)^2-(\lambda+1)\cos^2\varphi}\right]=$$

$$\frac{\left[2(\lambda+1)-2\cos^2\varphi\right]\left[(\lambda+1)^2-(\lambda+1)\cos^2\varphi\right]-\left[(\lambda+1)^2-(2\lambda+1)\cos^2\varphi\right]\left[2(\lambda+1)-\cos^2\varphi\right]}{\left[(\lambda+1)^2-(\lambda+1)\cos^2\varphi\right]^2}=$$

$$\frac{(2\lambda+2\sin^2\varphi)(\lambda+1)(\lambda+\sin^2\varphi)-\left[\lambda^2+(2\lambda+1)\sin^2\varphi\right](2\lambda+1+\sin^2\varphi)}{\left[(\lambda+1)^2-(\lambda+1)\cos^2\varphi\right]^2}=$$

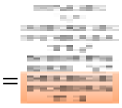
$$\frac{2(\lambda+\sin^2\varphi)^2(\lambda+1)-\left[\lambda^2+(2\lambda+1)\sin^2\varphi\right](2\lambda+1+\sin^2\varphi)}{\left[(\lambda+1)^2-(\lambda+1)\cos^2\varphi\right]^2}=$$

$$\frac{2\lambda^3+2\lambda^2+(4\lambda^2+4\lambda)\sin^2\varphi+(2\lambda+2)\sin^4\varphi-2\lambda^3-\lambda^2-(5\lambda^2+4\lambda+1)\sin^2\varphi-(2\lambda+1)\sin^4\varphi}{\left[(\lambda+1)^2-(\lambda+1)\cos^2\varphi\right]^2}=$$

$$\frac{\lambda^2-\lambda^2\sin^2\varphi-\sin^2\varphi+\sin^4\varphi}{\left[(\lambda+1)^2-(\lambda+1)\cos^2\varphi\right]^2}=\frac{\lambda^2\cos^2\varphi-\sin^2\varphi(1-\sin^2\varphi)}{\left[(\lambda+1)^2-(\lambda+1)\cos^2\varphi\right]^2}=\frac{\lambda^2\cos^2\varphi-\sin^2\varphi c\,os^2\varphi}{\left[(\lambda+1)^2-(\lambda+1)\cos^2\varphi\right]^2}=$$

$$\frac{\cos^2\varphi(\lambda^2-\sin^2\varphi)}{\left[(\lambda+1)^2-(\lambda+1)\cos^2\varphi\right]^2}=\frac{\cos^2\varphi(\lambda^2-\sin^2\varphi)}{(\lambda+1)(\lambda+\sin^2\varphi)^2}\Rightarrow\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\upsilon_2^2}{2gy}\right)\begin{matrix}\le \mu\varepsilon\quad\lambda\le\sin\varphi\\ >\mu\varepsilon\quad\lambda>\sin\varphi\end{matrix}\Rightarrow$$

$$\upsilon_2=\upsilon_2(\lambda):\left(0\,\square\quad\lambda=\sin\varphi<1\,\square\quad\infty\right)$$



$$\left[\frac{(\lambda+1)^2-(2\lambda+1)\cos^2\varphi}{(\lambda+1)^2-(\lambda+1)\cos^2\varphi}\right]_{\min}=\frac{(\lambda+1)^2-(2\lambda+1)(1-\lambda^2)}{(\lambda+1)^2-(\lambda+1)(1-\lambda^2)}=\frac{(\lambda+1)+(2\lambda+1)(\lambda-1)}{\lambda+1+\lambda^2-1}=\frac{\lambda+1+2\lambda^2-2\lambda+\lambda-1}{\lambda^2+\lambda}=$$

$$\frac{2\lambda^2}{\lambda^2+\lambda}=\frac{2\lambda}{\lambda+1}=\frac{2\sin\varphi}{1+\sin\varphi}$$

Εφαρμογή (βάσει της $3^{ης}$)

$$\lambda=1\rightarrow\upsilon_2=\sqrt{\frac{4-3\cos^2\varphi}{4-2\cos^2\varphi}2gy}\xrightarrow{\varphi=\pi/4}\upsilon_2=\sqrt{0,83\cdot 2gy}=0,91\sqrt{2gy}\xrightarrow{y=h}\upsilon_2=0,91\cdot 5,29=4,82\ m/s$$

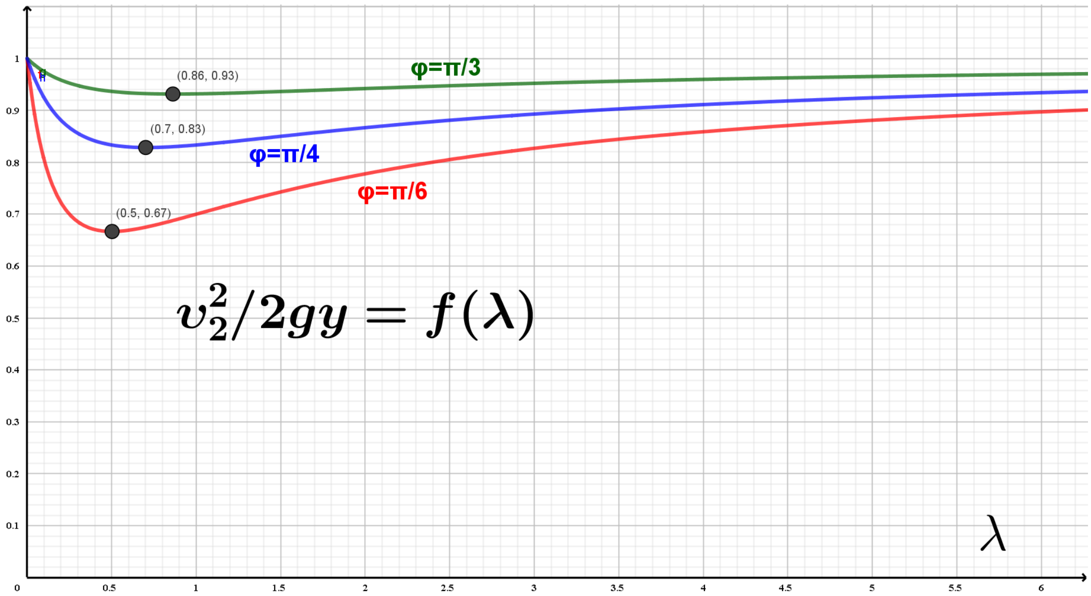
$$\lambda=2\rightarrow\upsilon_2=\sqrt{\frac{9-5\cos^2\varphi}{9-3\cos^2\varphi}2gy}\xrightarrow{\varphi=\pi/4}\upsilon_2=\sqrt{0,87\cdot 2gy}=0,93\sqrt{2gy}\xrightarrow{y=h}\upsilon_2=0,93\cdot 5,29=4,92\ m/s$$

$$\lambda=3\rightarrow\upsilon_2=\sqrt{\frac{16-7\cos^2\varphi}{16-4\cos^2\varphi}2gy}\xrightarrow{\varphi=\pi/4}\upsilon_2=\sqrt{0,89\cdot 2gy}=0,94\sqrt{2gy}\xrightarrow{y=h}\upsilon_2=0,94\cdot 5,29=5,00\ m/s$$

$$\lambda=4\rightarrow\upsilon_2=\sqrt{\frac{25-9\cos^2\varphi}{25-5\cos^2\varphi}2gy}\xrightarrow{\varphi=\pi/4}\upsilon_2=\sqrt{0,91\cdot 2gy}=0,95\sqrt{2gy}\xrightarrow{y=h}\upsilon_2=0,95\cdot 5,29=5,05\ m/s$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\upsilon_2=\lim_{\lambda\to\infty}\sqrt{\frac{(\lambda+1)^2-(2\lambda+1)\cos^2\varphi}{(\lambda+1)^2-(\lambda+1)\cos^2\varphi}2gy}=\lim_{\lambda\to\infty}\sqrt{\frac{1-\frac{2\lambda+1}{(\lambda+1)^2}\cos^2\varphi}{1-\frac{1}{\lambda+1}\cos^2\varphi}2gy}=\sqrt{2gy}$$

$$\lim_{\varphi\to\pi/2}\upsilon_2=\lim_{\varphi\to\pi/2}\upsilon_2\sqrt{\frac{(\lambda+1)^2-(2\lambda+1)\cdot 0}{(\lambda+1)^2-(\lambda+1)\cdot 0}2gy}=\sqrt{2gy}$$



Σχήμα 7: Η ταχύτητα (έχει επιλεγεί το τετράγωνό της για καλύτερο διαχωρισμό των καμπύλων) του σώματος σε συνάρτηση του λ. Για κάθε κλίση φ υπάρχει μια τιμή του λ, η $\lambda=\sin\varphi$, στην οποία η ταχύτητα του σώματος παρουσιάζει ελάχιστο. Για παράδειγμα για $\varphi=\pi/6$ η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο στην τιμή $\lambda=\sin(\pi/6)=0,5$. Για μεγαλύτερες γωνίες (μεγαλύτερο ημίτονο) το ελάχιστο θα είναι για μεγαλύτερο λ.

Σχετική Ταχύτητα

$$\upsilon_{2/1}=\frac{\lambda+1}{\cos\varphi}\upsilon_1=\frac{\lambda+1}{\cos\varphi}\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{(\lambda+1)^2-(\lambda+1)\cos^2\varphi}2gy}=\sqrt{\frac{(\lambda+1)^2}{(\lambda+1)^2-(\lambda+1)\cos^2\varphi}2gy}=\sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda+\sin^2\varphi}2gy}$$

$$\upsilon_{2/1}=\sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda+\sin^2\varphi}2gy}$$

Συμπεράσματα

Από την προηγούμενη σχέση προκύπτει ότι η σχετική ταχύτητα είναι:

- Φθίνουσα συνάρτηση της κλίσης φ, $\upsilon_{2/1}=\upsilon_{2/1}(\varphi)\quad \lambda\forall\varphi\in(0^{\circ},\ 90^{\circ}),\quad \in R^{+}$, αφού καθώς η γωνία μεγαλώνει, όπως και το ημίτονό της, μεγαλώνει ο παρανομαστής, οπότε το κλάσμα της υπορρίζου ποσότητας μικραίνει. Για $\varphi\to 90^{\circ}\Rightarrow\upsilon_{2/1}\to\sqrt{2gy}$ αναμενόμενο μιας και θα πρόκειται για ελεύθερη πτώση του σώματος, ενώ για $\varphi\to 0^{\circ}\Rightarrow\upsilon_{2/1}\to\sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda}2g0}=0$ μιας και δεν υπάρχει κατακόρυφη μετατόπιση του σώματος. Και με παραγώγους

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\upsilon_{2/1}^2}{2gy}\right)=\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\lambda+1}{\lambda+\sin^2\varphi}\right)=\frac{0-(\lambda+1)2\sin\varphi\cos\varphi}{(\lambda+\sin^2\varphi)^2}<0\to\upsilon_{2/1}=\upsilon_{2/1}(\varphi)\downarrow$$

- Φθίνουσα συνάρτηση του λ, αφού η παραγωγός της ως προς λ είναι αρνητική.

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\upsilon_{2/1}^2}{2gy}\right)=\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\lambda+1}{\lambda+\sin^2\varphi}\right)=\frac{\lambda+\sin^2\varphi-(\lambda+1)}{(\lambda+\sin^2\varphi)^2}=\frac{\sin^2\varphi-1}{(\lambda+\sin^2\varphi)^2}=-\frac{\cos^2\varphi}{(\lambda+\sin^2\varphi)^2}<0$$

$$\to\upsilon_{2/1}=\upsilon_{2/1}(\lambda)\downarrow\ \forall\lambda\in R^+,\ \varphi\in(0,90^\circ)$$

Εφαρμογή

$$\lambda=1\to\upsilon_{2/1}=\sqrt{\frac{2}{1+\sin^2\varphi}2gy}\xrightarrow{\varphi=\pi/4}\upsilon_{2/1}=\sqrt{\frac{4}{3}2gy}=1{,}15\sqrt{2gy}\xrightarrow{y=h}\upsilon_{2/1}=1{,}15\cdot5{,}29=6{,}11\ m/s$$

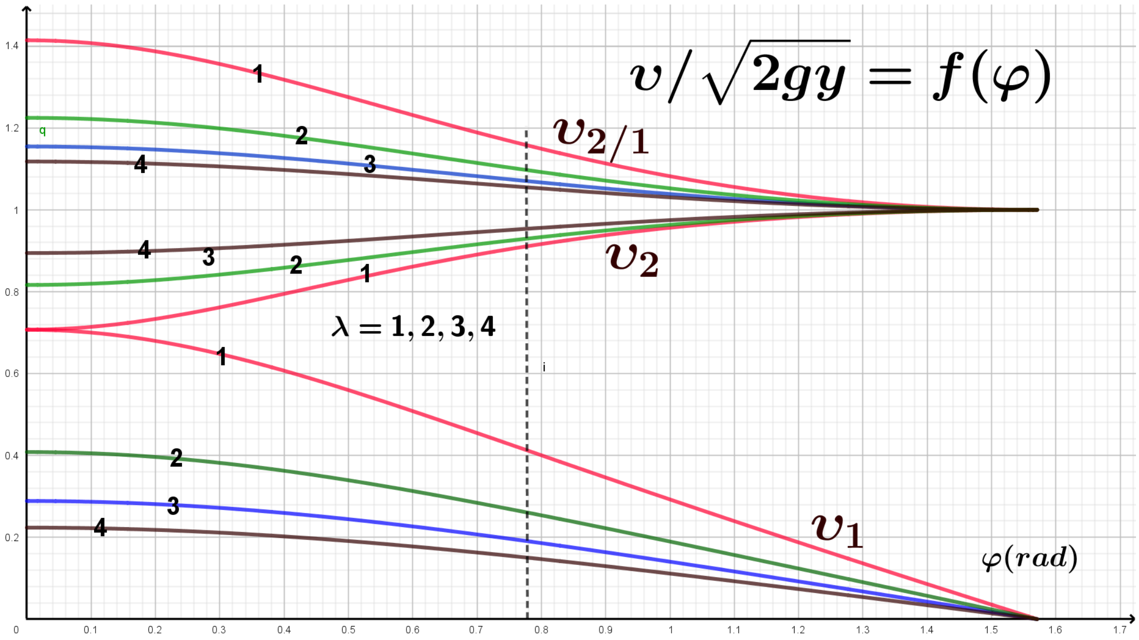
$$\lambda=2\to\upsilon_{2/1}=\sqrt{\frac{3}{2+\sin^2\varphi}2gy}\xrightarrow{\varphi=\pi/4}\upsilon_{2/1}=\sqrt{\frac{6}{5}2gy}=1{,}09\sqrt{2gy}\xrightarrow{y=h}\upsilon_{2/1}=1{,}09\cdot5{,}29=5{,}79\ m/s$$

$$\lambda=3\to\upsilon_{2/1}=\sqrt{\frac{4}{3+\sin^2\varphi}2gy}\xrightarrow{\varphi=\pi/4}\upsilon_{2/1}=\sqrt{\frac{8}{7}2gy}=1{,}07\sqrt{2gy}\xrightarrow{y=h}\upsilon_{2/1}=1{,}07\cdot5{,}29=5{,}65\ m/s$$

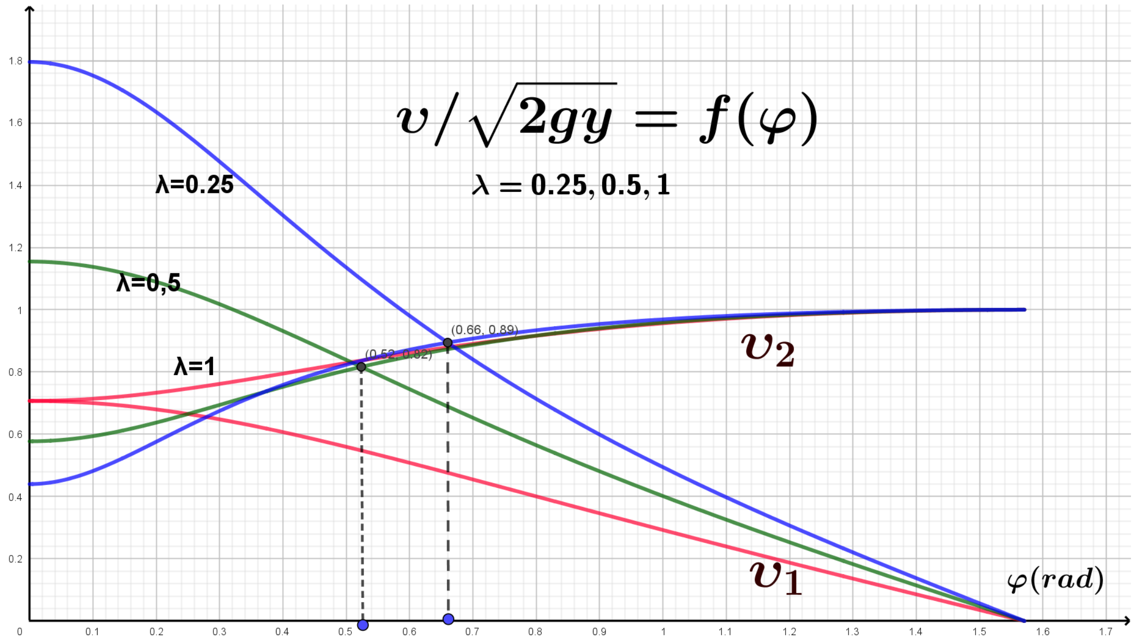
$$\lambda=4\to\upsilon_{2/1}=\sqrt{\frac{5}{4+\sin^2\varphi}2gy}\xrightarrow{\varphi=\pi/4}\upsilon_{2/1}=\sqrt{\frac{10}{9}2gy}=1{,}05\sqrt{2gy}\xrightarrow{y=h}\upsilon_{2/1}=1{,}05\cdot5{,}29=5{,}58\ m/s$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\upsilon_{2/1}=\lim_{\lambda\to\infty}\sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda+\sin^2\varphi}2gy}=\lim_{\lambda\to\infty}\sqrt{\frac{1+\frac{1}{\lambda}}{1+\frac{\sin^2\varphi}{\lambda}}2gy}=\sqrt{2gy}$$

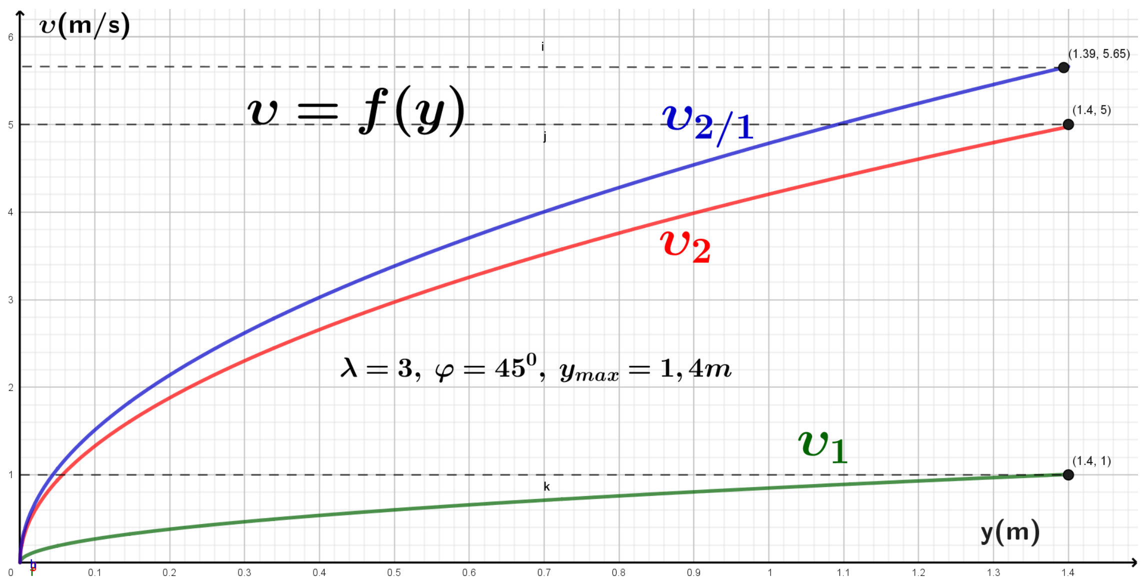
$$\lim_{\varphi\to\pi/2}\upsilon_{2/1}=\lim_{\varphi\to\pi/2}\sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda+\sin^2\varphi}2gy}=\sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda+1}2gy}=\sqrt{2gy}$$



Σχήμα 8: Γραφικές παραστάσεις των πηλίκων των μέτρων των ταχυτήτων που αποκτούν τα σώματα μετά από κατακόρυφη πτώση κατά τυχαίο y προς την ποσότητα $\sqrt{2gy}$ που είναι η ταχύτητα του σώματος αν έπεφτε ελεύθερα κατά y σε συνάρτηση της κλίσης φ για τιμές του λ=1, 2, 3, 4. Η πρώτη δέσμη καμπύλων ψηλά αντιστοιχούν στη σχετική ταχύτητα, η μεσαία στην ταχύτητα του σώματος και η κατώτερη στην ταχύτητα της σφήνας. Οι καμπύλες ομοίου χρώματος αντιστοιχούν στο ίδιο λ, πχ το κόκκινο σε λ=1. Και από τις γραφικές παραστάσεις προκύπτει ότι για κάθε κατακόρυφη μετατόπιση του σώματος κατά y (1) η ταχύτητα της σφήνας για κάθε λ είναι φθίνουσα συνάρτηση της φ και ομοίως φθίνουσα συνάρτηση του λ για κάθε φ (2) η σχετική ταχύτητα είναι φθίνουσα συνάρτηση της φ για κάθε λ και φθίνουσα συνάρτηση του λ για κάθε φ και (3) η ταχύτητα του σώματος είναι αύξουσα συνάρτηση της φ για κάθε λ και αύξουσα συνάρτηση του λ για κάθε φ. Εννοείται ότι για μηδενική γωνία και οι τρεις ταχύτητες είναι μηδενικές εφόσον το σώμα δεν κινείται, ενώ για ορθή γωνία η ταχύτητα του σώματος και η σχετική του ως προς τη σφήνα συμπίπτουν εφόσον, η σφήνα δεν έχει λόγο να κινηθεί (παραμένει ακίνητη)



Σχήμα 9: Για λ<1 η ταχύτητα της σφήνας είναι μεγαλύτερη της του σώματος για κλίσεις φ μικρότερες από μια τιμή που εξαρτάται από την τιμή του λ (πχ $\lambda = 0,5 \rightarrow \varphi = \tan^{-1}\sqrt{\dfrac{0,50}{1,50}} = 0,52\ rad$). Καμπύλες ίδιου χρώματος αντιστοιχούν στο ίδιο λ.



Σχήμα 10: Η εξέλιξη των ταχυτήτων, απολύτων και σχετικής, των σφήνα – σώμα σε συνάρτηση της πτώσης του σώματος κατά y για $\left(\lambda = 3,\ \varphi = 45^0,\ y_{max} = 1,4\ m\right)$.

Κατανομή Ενέργειας

Υπολογίζουμε τον τρόπο (ποσοστά) με τον οποίο η απολεσθείσα δυναμική του σώματος mgy κατανέμεται ως κινητική στα δύο σώματα.

Σφήνα

$$\frac{K_1}{mgy}=\frac{\frac{1}{2}\lambda m\upsilon_1^2}{mgy}=\frac{\lambda\upsilon_1^2}{2gy}=\frac{\frac{1}{2}\lambda m\left[\frac{\cos^2\varphi}{(\lambda+1)^2-(\lambda+1)\cos^2\varphi}\text{ ή }\frac{\cos^2\varphi}{(\lambda+1)(\lambda+\sin^2\varphi)}\text{ ή }\frac{1}{(\lambda+1)\left[\lambda+(\lambda+1)\tan^2\varphi\right]}\right]2gy}{mgy}$$

$$\frac{K_1}{mgy}=\frac{\lambda\cos^2\varphi}{(\lambda+1)^2-(\lambda+1)\cos^2\varphi}=\frac{\lambda\cos^2\varphi}{(\lambda+1)(\lambda+\sin^2\varphi)}=\frac{\lambda}{(\lambda+1)\left[\lambda+(\lambda+1)\tan^2\varphi\right]}$$

Συμπεράσματα

Από τις σχέσεις προκύπτουν ότι το ποσοστό της δυναμικής που εμφανίζεται ως κινητική της σφήνας $\frac{K_1}{mgy}=\lambda\frac{\upsilon_1^2}{2gy}$ είναι (έχει αποδειχτεί ότι το πηλίκο $\frac{\upsilon_1^2}{2gy}$ είναι φθίνουσα συνάρτηση και του λ και της φ).

- φθίνουσα συνάρτηση του φ (για κάθε λ) (ή στην 3η μορφή αυξανόμενης της φ αυξάνεται ο παρανομαστής, χωρίς να επηρεάζεται ο αριθμητής), δηλ. $\frac{K_1}{mgy}=f(\varphi)$. Ή με παράγωγο (βλέπε παρακάτω απόδειξη 1).
- αύξουσα (για κάθε κλίση φ) αν $\lambda<\sin\varphi\le 1$ και φθίνουσα αν για $\lambda>\sin\varphi$ εμφανίζοντας (βλέπε παρακάτω παραγώγιση απόδειξη 2) μέγιστο για την τιμή $\lambda=\sin\varphi$, δηλ. $\frac{K_1}{mgy}=f(\lambda),\ (0 \quad \lambda=\sin\varphi \quad \infty)$

Απόδειξη 1

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\lambda\frac{\upsilon_1^2}{2gy}\right)=\lambda\overbrace{\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\upsilon_1^2}{2gy}\right)}^{<0}<0$$

Απόδειξη 2

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{K_1}{mgy}\right)=\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\frac{\lambda\cos^2\varphi}{(\lambda+1)(\lambda+\sin^2\varphi)}\right]=\frac{\cos^2\varphi\cdot(\lambda+1)(\lambda+\sin^2\varphi)-\lambda\cos^2\varphi\left[\lambda+\sin^2\varphi+\lambda+1\right]}{(\lambda+1)^2(\lambda+\sin^2\varphi)^2}=$$

$$\frac{\cos^2\varphi}{(\lambda+1)^2(\lambda+\sin^2\varphi)^2}(\lambda+1)(\lambda+\sin^2\varphi)-\lambda(\lambda+\sin^2\varphi)-\lambda(\lambda+1)=$$

$$\frac{\cos^2\varphi}{(\lambda+1)^2(\lambda+\sin^2\varphi)^2}(\lambda+\sin^2\varphi)-\lambda(\lambda+1)=\frac{\cos^2\varphi}{(\lambda+1)^2(\lambda+\sin^2\varphi)^2}(\sin^2\varphi-\lambda^2)\rightarrow$$

$$\frac{K_1}{mgy}=f(\lambda),\ \left(0\searrow\ \lambda=\sin\varphi\nearrow\ \infty\right)$$

Για $(\lambda=3,\ \varphi=\pi/4)\rightarrow\frac{K_1}{mgy}=\frac{3\frac{1}{2}}{4\left(3+\frac{1}{2}\right)}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{28}{2}}=\frac{3}{28}=10,7\%$.

Κατερχόμενο Σώμα

$$\frac{K_2}{mgy}=\frac{\frac{1}{2}m\upsilon_2^2}{mgy}=\frac{\upsilon_2^2}{2gy}=\frac{\frac{1}{2}m\left[\frac{(\lambda+1)^2-(2\lambda+1)\cos^2\varphi}{(\lambda+1)^2-(\lambda+1)\cos^2\varphi}\text{ ή }\frac{\lambda^2+(2\lambda+1)\sin^2\varphi}{(\lambda+1)(\lambda+\sin^2\varphi)}\text{ ή }\frac{\lambda^2+(\lambda+1)^2\tan^2\varphi}{(\lambda+1)\left[\lambda+(\lambda+1)\right]\tan^2\varphi}\right]2gy}{mgy}$$

$$\frac{K_2}{mgy}=\frac{(\lambda+1)^2-(2\lambda+1)\cos^2\varphi}{(\lambda+1)^2-(\lambda+1)\cos^2\varphi}=\frac{\lambda^2+(2\lambda+1)\sin^2\varphi}{\lambda^2+\lambda+(\lambda+1)\sin^2\varphi}=\frac{\lambda^2+(\lambda+1)^2\tan^2\varphi}{(\lambda+1)\left[\lambda+(\lambda+1)\right]\tan^2\varphi}$$

Συμπεράσματα

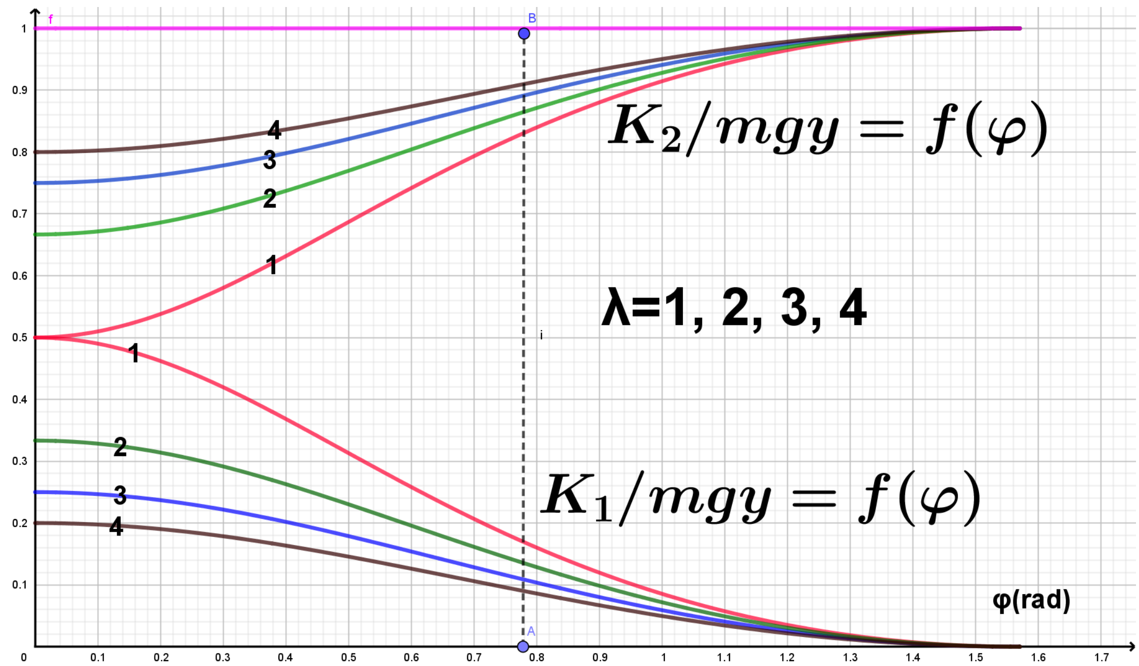
Η συμπεριφορά του ποσοστού $\frac{K_2}{mgy}$ ως συνάρτηση της φ και του λ θα είναι ακριβώς ίδια με την του πηλίκου $\frac{\upsilon_2^2}{2gy}$ που έχει μελετηθεί σε προηγούμενη παράγραφο. Έτσι το $\frac{K_2}{mgy}$ είναι

- αύξουσα συνάρτηση της φ, δηλ. $\frac{K_2}{mgy}=f(\varphi)\nearrow\ ,\ \varphi\in\left(0,\ 90^{\circ}\right)\ \forall\lambda\in R^+$.
- φθίνουσα συνάρτηση του λ (με συγκεκριμένη φ) για τιμές του λ μικρότερες της $\lambda<\sin\varphi$ στην οποία παρουσιάζει ελάχιστο και για μεγαλύτερες τιμές αύξουσα. Έτσι $\frac{K_2}{mgy}=f(\lambda):\left(0\searrow\ \lambda=\sin\varphi\nearrow\ \infty\right)$.

Για $$\left(\lambda=3,\ \varphi=\pi/4\right)\rightarrow\frac{K_2}{mgy}=\frac{\left(\lambda+1\right)^2-\left(2\lambda+1\right)\cos^2\varphi}{\left(\lambda+1\right)^2-\left(\lambda+1\right)\cos^2\varphi}=\frac{16-7\frac{1}{2}}{16-4\frac{1}{2}}=\frac{\frac{25}{2}}{14}=\frac{25}{28}=89,3\%$$.

Επιβεβαιώνουμε ότι το άθροισμα των κινητικών ενεργειών πρέπει να είναι ίσο με την απώλεια της δυναμικής ενέργειας του σώματος πέφτοντας κατακόρυφα κατά y.

$$K_1+K_2=\frac{\lambda\cos^2\varphi}{\left(\lambda+1\right)^2-\left(\lambda+1\right)\cos^2\varphi}mgy+\frac{\left(\lambda+1\right)^2-\left(2\lambda+1\right)\cos^2\varphi}{\left(\lambda+1\right)^2-\left(\lambda+1\right)\cos^2\varphi}mgy=...=mgy=\left|\Delta U\right|$$



Σχήμα 11: Τρόπος κατανομής της απώλειας της δυναμικής ενέργειας ως κινητική στα δύο σώματα (ποσοστά). Το πάνω σμήνος καμπύλων αντιστοιχεί στην κινητική ενέργεια του κατερχόμενου σώματος και το κάτω στη σφήνα. Καμπύλες όμοιου χρώματος αντιστοιχούν στο ίδιο λ. Τα «χάσμα» ανάμεσά τους διευρύνεται για μεγαλύτερες γωνίες ή για μεγαλύτερα λ. Η «μερίδα το λέοντος» μεταφέρεται στο κατερχόμενο σώμα. Ισοκατανομή μπορεί να συμβεί, όταν τα σώματα έχουν την ίδια μάζα και για πολύ μικρές κλίσεις της κεκλιμένης επιφάνειας της σφήνας.

Το Πηλίκο Των Κινητικών Ενεργειών

$$\frac{K_2}{K_1}=\frac{\upsilon_2^2}{\lambda\upsilon_1^2}\frac{\dfrac{(\lambda+1)^2-(2\lambda+1)\cos^2\varphi}{(\lambda+1)^2-(\lambda+1)\cos^2\varphi}mgy}{\dfrac{\lambda\cos^2\varphi}{(\lambda+1)^2-(\lambda+1)\cos^2\varphi}mgy}=\frac{(\lambda+1)^2-(2\lambda+1)\cos^2\varphi}{\lambda\cos^2\varphi}$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{K_2}{K_1}=\infty,\quad \lim_{\varphi\to 0}\frac{K_2}{K_1}=\lambda,\quad \lim_{\varphi\to\pi/2}\frac{K_2}{K_1}=\infty$$

Συμπεράσματα

Από τις προηγούμενες σχέσεις προκύπτει ότι το πηλίκο $\frac{K_2}{K_1}$ των κινητικών ενεργειών είναι

- Αύξουσα συνάρτηση της φ για κάθε λ, αφού αυξανόμενης της φ ο αριθμητής μεγαλώνει, ενώ ο παρανομαστής μικραίνει, δηλ. $\frac{K_2}{K_1}=f(\varphi)\square\ ,\ \forall\varphi\in(0,\ 90^\circ)$. Για μεγαλύτερες κλίσεις φ της κεκλιμένης επιφάνειας της σφήνας, υπό το ίδιο λ, το πηλίκο παίρνει μεγαλύτερες τιμές που είναι αναμενόμενο, αφού για μεγαλύτερες κλίσεις η αλληλεπίδραση των δύο σωμάτων γίνεται ασθενέστερη και μικρότερο ποσό από την απώλεια της δυναμικής ενέργειας του σώματος μεταφέρεται ως κινητική ενέργεια στη σφήνα.
- Φθίνουσα συνάρτηση του λ (για κάθε γωνία φ) για τιμές του λ μικρότερες της $\lambda=\sin\varphi$ στην οποία ελαχιστοποιείται στην τιμή $\frac{2\lambda}{1-\lambda}(\lambda<1)$ και αύξουσα για μεγαλύτερες τιμές, δηλ. $\frac{K_2}{K_1}=f(\lambda),\ (0\square\ \ \lambda=\sin\varphi\le 1\square\ \ \infty)$ (βλέπε παρακάτω απόδειξη 1 με παράγωγο). Για παράδειγμα για $\varphi=\pi/6$ με $\sin\pi/6=0,5$ καθώς το λ μεγαλώνει από μηδενική τιμή το πηλίκο μικραίνει μέχρι την τιμή $\frac{2\lambda}{1-\lambda}=\frac{2\cdot 0,5}{1-0,5}=2$ που το λ θα γίνε ίσο με 0,5. Για μεγαλύτερες τιμές αυξάνεται.
- Είναι δυνατόν να είναι μικρότερο της μονάδος με την προϋπόθεση ότι $\lambda\le 1$ και $\cos^2\varphi\ge\frac{8}{9}\to\varphi\le 19,5^\circ$. Στην τιμή αυτή της φ αντιστοιχεί $\lambda=0,33$ (βλέπε παρακάτω απόδειξη 2)

και $\dfrac{K_2}{K_1}=1$ (ισοκατανομή ενέργειας). Έτσι για πολύ μικρές γωνίες φ και μικρά λ είναι δυνατόν η δυναμική ενέργεια να ισοκατανέμεται ως κινητική στα δύο σώματα.

- Για πολύ μεγάλες φ ή μεγάλα λ η ενέργεια τείνει να εμφανίζεται αποκλειστικά ως κινητική του σώματος (με τη σφήνα να κινείται με σχεδόν μηδενική ταχύτητα).

Απόδειξη 1

$$\left(\frac{K_2}{K_1}\right)'_\lambda=\left[\frac{(\lambda+1)^2-(2\lambda+1)\cos^2\varphi}{\lambda\cos^2\varphi}\right]'_\lambda=\frac{\left[2(\lambda+1)-2\cos^2\varphi\right]\lambda\cos^2\varphi-\left[(\lambda+1)^2-(2\lambda+1)\cos^2\varphi\right]\cos^2\varphi}{\lambda^2\cos^4\varphi}=$$

$$\frac{2\lambda(\lambda+1)-2\lambda\cos^2\varphi-(\lambda+1)^2+(2\lambda+1)\cos^2\varphi}{\lambda^2\cos^2\varphi}=\frac{(\lambda-1)(\lambda+1)+\cos^2\varphi}{\lambda^2\cos^2\varphi}=\frac{\lambda^2-1+\cos^2\varphi}{\lambda^2\cos^2\varphi}=$$

$$\frac{\lambda^2-\sin^2\varphi}{\lambda^2\cos^2\varphi}\begin{pmatrix}\geq 0\ \mu\varepsilon\ \lambda\geq\sin\varphi\\ <0\ \mu\varepsilon\ \lambda<\sin\varphi\end{pmatrix}\Leftrightarrow\frac{K_2}{K_1}=f(\lambda),\ \left(0\ \square\ \lambda=\sin\varphi\ \square\ \infty\right)$$

$$\left(\frac{K_2}{K_1}\right)_{\min}=\frac{(\lambda+1)^2-(2\lambda+1)(1-\sin^2\varphi)}{\lambda(1-\sin^2\varphi)}=\frac{(\lambda+1)^2-(2\lambda+1)(1-\lambda^2)}{\lambda(1-\lambda^2)}=\frac{2\lambda}{1-\lambda}$$

Απόδειξη 2

$$(\lambda+1)^2-(2\lambda+1)\cos^2\varphi\leq\lambda\cos^2\varphi\to\ldots\to 1\geq\cos^2\varphi\geq\frac{(\lambda+1)^2}{3\lambda+1}\to$$

$$\frac{(\lambda+1)^2}{3\lambda+1}\leq 1\to\lambda^2-\lambda\leq 0\to\lambda(\lambda-1)\leq 0\to\lambda\leq 1$$

$$(\lambda+1)^2-(2\lambda+1)\cos^2\varphi=\lambda\cos^2\varphi\to\ldots\to\lambda^2+\left(2-3\cos^2\varphi\right)\lambda+\sin^2\varphi=0$$

$$\Delta=\left(2-3\cos^2\varphi\right)^2-4\sin^2\varphi\geq 0\to\ldots\to\cos^2\varphi\geq\frac{8}{9}=0,89\to\varphi\leq\cos^{-1}\sqrt{0,89}\approx 19,5^\circ$$

$$\lambda=\frac{-\left(2-3\cos^2\varphi\right)\pm\sqrt{\left(2-3\cos^2\varphi\right)^2-4\sin^2\varphi}}{2}=\frac{-2+3\cos^2\varphi}{2}=-1+1,5\frac{8}{9}=0,33$$

Προφανώς δεν ισχύει η ισότητα $K_2=K_1+K_{2/1}$, ενώ ισχύει η

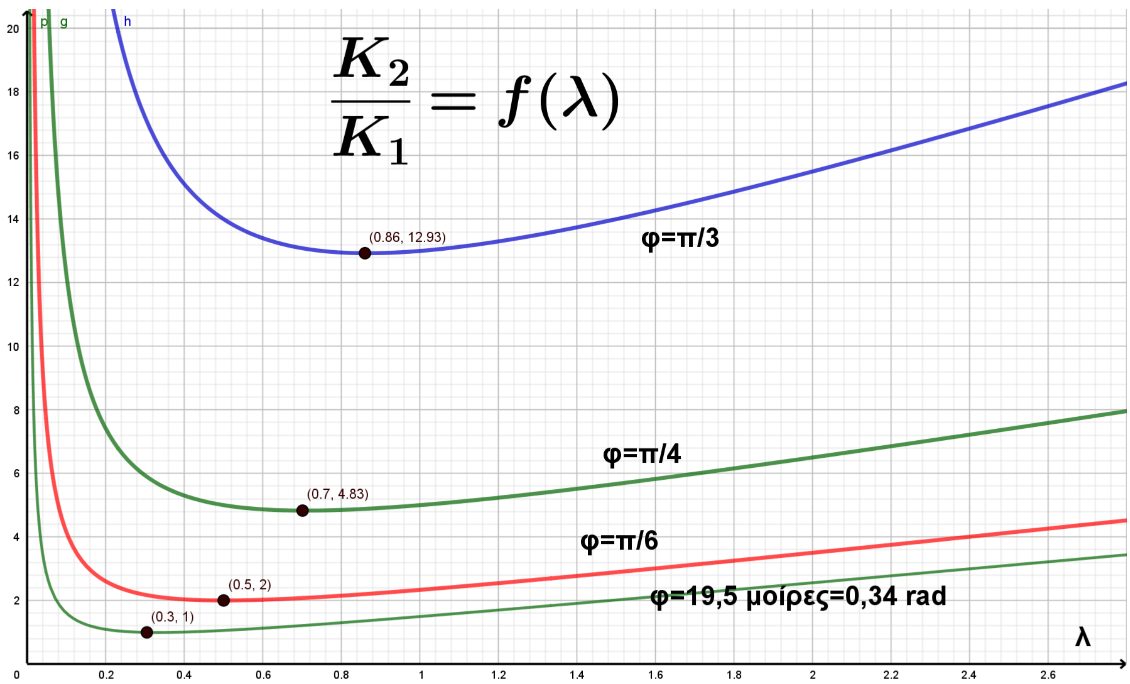
$$K_2 = K_{2,x} + K_{2,y} \to \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}m\left(\upsilon_1 - \upsilon_{2/1,x}\right)^2 + \frac{1}{2}m\upsilon_{2/1,y}^2,\ \left(\upsilon_{2/1,y}^2 = \upsilon_{2,y}^2,\ \upsilon_{2/1,x} = \upsilon_{2/1}\cos\varphi\right)$$

$$K_{2,x} = \frac{1}{2}m\left(\upsilon_1 - \upsilon_{2/1,x}\right)^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m\upsilon_{2/1,x}^2 - \frac{1}{2}m2\upsilon_1\upsilon_{2/1,x},\ K_{2,y} = \frac{1}{2}m\upsilon_{2/1,y}^2$$

$$K_2 = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m\upsilon_{2/1,x}^2 - \frac{1}{2}m2\upsilon_1\upsilon_{2/1,x} + \frac{1}{2}m\upsilon_{2/1,y}^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m\left(\upsilon_{2/1,x}^2 + \upsilon_{2/1,y}^2\right) - \frac{1}{2}m2\upsilon_1\upsilon_{2/1}\cos\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m\upsilon_{2/1}^2 - \frac{1}{2}m2\upsilon_1\upsilon_{2/1}\cos\varphi = \frac{K_1}{\lambda} + K_{2/1} - m\sqrt{\frac{2K_1}{\lambda m}}\sqrt{\frac{2K_{2/1}}{m}}\cos\varphi \to$$

$$K_2 = \frac{K_1}{\lambda} + K_{2/1} - 2\sqrt{\frac{K_1 K_{2/1}}{\lambda}}\cos\varphi$$



Σχήμα 12: Στο διάγραμμα φαίνεται ότι το πηλίκο των δύο κινητικών ενεργειών είναι φθίνουσα συνάρτηση του λ μέχρι την τιμή του λ που εξισώνεται με το ημίτονο της γωνίας. Για παράδειγμα με $\varphi=\pi/6$ και $\lambda=0,5$ η κινητική του σώματος είναι διπλάσια της κινητικής της σφήνας). Το πηλίκο αποκτά την τιμή 1 (εξίσωση ενεργειών) αν $\lambda=0,33$ και $\varphi=19,5^0$.

Επιταχύνσεις – μετατοπίσεις - χρόνος

Υποθέτουμε ότι όλες οι κινήσεις, απόλυτες και σχετικές, είναι ευθύγραμες ομαλά επιταχυνόμενες και εκτός των γνωστών σχέσεων θα χρησιμοποιηθεί και η $\upsilon^2 = 2ax$ (προκύπτει με απαλοιφή του χρόνου από τις γνωστές) και συνδέει την ταχύτητα με την αντίστοιχη επιτάχυνση και μετατόπιση.

Σχετική επιτάχυνση

Υπολογίζουμε την (σχετική) επιτάχυνση κατά μήκος της κεκλιμένης πλευράς και το χρόνο για κατακόρυφη μετατόπιση κατά y.

$$\upsilon_{2/1}^2 = 2a_{2/1}x_{2/1} \rightarrow a_{2/1} = \frac{\upsilon_{2/1}^2}{2x_{2/1}} = \frac{\upsilon_{2/1}^2}{2\dfrac{y}{\sin\varphi}} = \frac{\upsilon_{2/1}^2\sin\varphi}{2y} = \frac{\dfrac{\lambda+1}{\lambda+\sin^2\varphi}2gy\sin\varphi}{2y} \rightarrow \boxed{a_{2/1} = \frac{\lambda+1}{\lambda+\sin^2\varphi}g\sin\varphi}$$

$g\sin\varphi$ επιτάχυνση του σώματος με τη σφήνα ακίνητη κατά μήκος της κεκλιμένης πλευράς

Συμπεράσματα

Παραγωγίζοντας ως προς λ και ως προς φ (βλέπε παρακάτω αποδείξεις 1 και 2) την προηγούμενη σχέση συμπεραίνουμε ότι η σχετική επιτάχυνση του σώματος είναι

- Φθίνουσα συνάρτηση του λ για κάθε γωνία φ, δηλ. $\dfrac{a_{2/1}}{g} = f(\lambda)\downarrow \quad \forall\lambda\in R^+$.
- Αύξουσα συνάρτηση της φ για αν $\lambda \geq 1$, δηλ. $\dfrac{a_{2/1}}{g} = f(\varphi)\uparrow \quad \forall\varphi\in(0^\circ,\ 90^\circ)$. Αν $\lambda < 1$ τότε είναι αύξουσα μέχρι την $\varphi < \sin^{-1}\sqrt{\lambda}$ στην οποία μεγιστοποιείται και στη συνέχεια φθίνουσα. Για παράδειγμα με $\lambda = 0,5$ είναι αύξουσα μέχρι τη φ με $\varphi = \sin^{-1}\sqrt{0,5} = 45^\circ = 0,78\ rad$ και στη συνέχεια φθίνουσα. Το μέγιστο είναι $\dfrac{(\lambda+1)\sqrt{\lambda}}{2\lambda} = \dfrac{1,5\sqrt{0,5}}{1} = 1,06!!!$

Απόδειξη 1

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{a_{2/1}}{g}\right) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\frac{(\lambda+1)\sin\varphi}{\lambda+\sin^2\varphi}\right] = \frac{\sin\varphi(\lambda+\sin^2\varphi)-(\lambda+1)\sin\varphi}{(\lambda+\sin^2\varphi)^2} = \ldots = \frac{\sin^3\varphi-\sin\varphi}{(\lambda+\sin^2\varphi)^2} = -\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{(\lambda+\sin^2\varphi)^2} < 0$$

$$\frac{a_{2/1}}{g} = f(\lambda)\downarrow \quad \forall\lambda\in R^+$$

Απόδειξη 2

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{a_{2/1}}{g}\right)=\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{(\lambda+1)\sin\varphi}{\lambda+\sin^2\varphi}\right]=\frac{(\lambda+1)\cos\varphi\left(\lambda+\sin^2\varphi\right)-(\lambda+1)\sin\varphi\cdot 2\sin\varphi\cos\varphi}{\left(\lambda+\sin^2\varphi\right)^2}=$$

$$\frac{(\lambda+1)\cos\varphi\left(\lambda+\sin^2\varphi-2\sin^2\varphi\right)}{\left(\lambda+\sin^2\varphi\right)^2}=\frac{(\lambda+1)\cos\varphi\left(\lambda-\sin^2\varphi\right)}{\left(\lambda+\sin^2\varphi\right)^2}\geq 0\Leftrightarrow \lambda-\sin^2\varphi\geq 0\Leftrightarrow \sin\varphi\leq\sqrt{\lambda}$$

$\frac{a_{2/1}}{g}=f(\varphi)$ μέγιστο, $\left(0^\circ < \varphi=\sin^{-1}\sqrt{\lambda} < 90^\circ\right)$ $\qquad \left(\frac{a_{2/1}}{g}\right)_{\max}=\frac{(\lambda+1)\sqrt{\lambda}}{2\lambda}$

$\frac{a_{2/1}}{g}=f(\varphi)$ μέγιστο $\left(0^\circ, 90^\circ\right)$

Εφαρμογή

$$\lambda=1\rightarrow a_{2/1}=\frac{2\sin\varphi}{1+\sin^2\varphi}g\xrightarrow{\varphi=\pi/4}a_{2/1}=\frac{2\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{1}{2}}g=\frac{2\sqrt{2}}{3}g=0{,}94g=9{,}4\ m/s^2$$

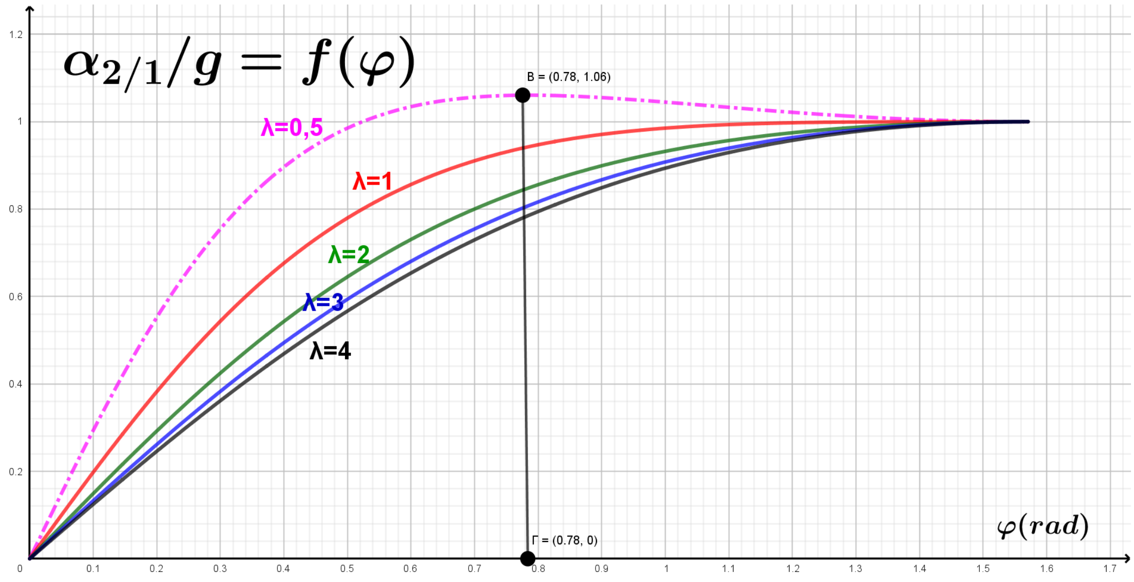
$$\lambda=2\rightarrow a_{2/1}=\frac{3\sin\varphi}{2+\sin^2\varphi}g\xrightarrow{\varphi=\pi/4}a_{2/1}=\frac{3\frac{\sqrt{2}}{2}}{2+\frac{1}{2}}g=\frac{3\sqrt{2}}{5}g=0{,}84g=8{,}4\ m/s^2$$

$$\lambda=3\rightarrow a_{2/1}=\frac{4\sin\varphi}{3+\sin^2\varphi}g\xrightarrow{\varphi=\pi/4}a_{2/1}=\frac{4\frac{\sqrt{2}}{2}}{3+\frac{1}{2}}g=\frac{4\sqrt{2}}{7}g=0{,}81g=8{,}1\ m/s^2$$

$$\lambda=4\rightarrow a_{2/1}=\frac{5\sin\varphi}{4+\sin^2\varphi}g\xrightarrow{\varphi=\pi/4}a_{2/1}=\frac{5\frac{\sqrt{2}}{2}}{4+\frac{1}{2}}g=\frac{5\sqrt{2}}{9}g=0{,}78g=7{,}8\ m/s^2$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}a_{2/1}=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{(\lambda+1)\sin\varphi}{\lambda+\sin^2\varphi}g=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)\sin\varphi}{1+\frac{\sin^2\varphi}{\lambda}}g=g\sin\varphi$$ (ακίνητο κεκλιμένο επίπεδο)

$$\lim_{\varphi\to\pi/2}a_{2/1}=\lim_{\varphi\to\pi/2}\frac{(\lambda+1)\sin\varphi}{\lambda+\sin^2\varphi}g=\frac{\lambda+1}{\lambda+1}g=g$$ (ελεύθερη πτώση)



Σχήμα 13: Η σχετική επιτάχυνση του σώματος ως συνάρτηση της φ για διάφορες τιμές του λ

Χρόνος Κίνησης Μετά Από Πτώση Κατά Υ Του Σώματος

$$t = \frac{\upsilon_{2/1}}{a_{2/1}} = \frac{\sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda+\sin^2\varphi}2gy}}{\frac{(\lambda+1)\sin\varphi}{\lambda+\sin^2\varphi}g} \rightarrow \boxed{t = \sqrt{\frac{\lambda+\sin^2\varphi}{(\lambda+1)\sin^2\varphi}}\sqrt{\frac{2y}{g}}}\ \sqrt{\frac{2y}{g}} =$$ χρόνος ελεύθερης πτώσης από ύψος y

Συμπεράσματα

Από την προηγούμενη σχέση συμπεραίνουμε ότι ο χρόνος κίνησης του σώματος μέχρι να έχει κατέβει κατακόρυφα κατά y είναι

- Φθίνουσα συνάρτηση της φ (με παραγώγιση ως προς φ, βλέπε παρακάτω απόδειξη 1) για κάθε λ (αναμενόμενο, αφού μεγαλύτερη κλίση σημαίνει πιο γρήγορη κίνηση και άρα μικρότερος χρόνος). Δηλ. $t = t(\varphi)\downarrow\ ,\ \varphi \in (0^\circ,\ 90^\circ)\ \forall\lambda$
- Αύξουσα συνάρτηση του λ (με παραγώγιση ως προς λ, βλέπε παρακάτω απόδειξη 2). Δηλ. $t = t(\lambda)\uparrow\ ,\ \lambda \in R^+$.

Απόδειξη 1

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\lambda+\sin^2\varphi}{(\lambda+1)\sin^2\varphi}\right)=\frac{2\sin\cos\varphi(\lambda+1)\sin^2\varphi-(\lambda+\sin^2\varphi)(\lambda+1)2\sin\cos\varphi}{\left[(\lambda+1)\sin^2\varphi\right]^2}=$$

$$\frac{2\sin\cos\varphi(\lambda+1)}{\left[(\lambda+1)\sin^2\varphi\right]^2}\left[\sin^2\varphi-\lambda-\sin^2\varphi\right]=\frac{2\sin\cos\varphi(\lambda+1)}{\left[(\lambda+1)\sin^2\varphi\right]^2}(-\lambda)<0\rightarrow$$

$$\frac{t}{\sqrt{2y/g}}=\sqrt{\frac{\lambda+\sin^2\varphi}{(\lambda+1)\sin^2\varphi}}=f(\varphi)\ ,\ \varphi\in\left(0^{\circ},\ 90^{\circ}\right)$$

Απόδειξη 2

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\frac{\lambda+\sin^2\varphi}{(\lambda+1)\sin^2\varphi}\right]=\frac{(\lambda+1)\sin^2\varphi-(\lambda+\sin^2\varphi)\sin^2\varphi}{\left[(\lambda+1)\sin^2\varphi\right]^2}=\frac{\lambda+1-\lambda-\sin^2\varphi}{(\lambda+1)^2\sin^2\varphi}=\frac{\cos^2\varphi}{(\lambda+1)^2\sin^2\varphi}=\frac{\cot^2\varphi}{(\lambda+1)^2}>0$$

$$\rightarrow t=t(\lambda)\ ,\ \lambda\in R^+$$

Εφαρμογή

$$\lambda=1\rightarrow t=\sqrt{\frac{1+\sin^2\varphi}{2\sin^2\varphi}}\sqrt{\frac{2y}{g}}\xrightarrow{\varphi=\pi/4}t=1,22\sqrt{\frac{2y}{g}}\xrightarrow{y=h=1,4\ m}t=1,22\cdot0,53=0,65\ s$$

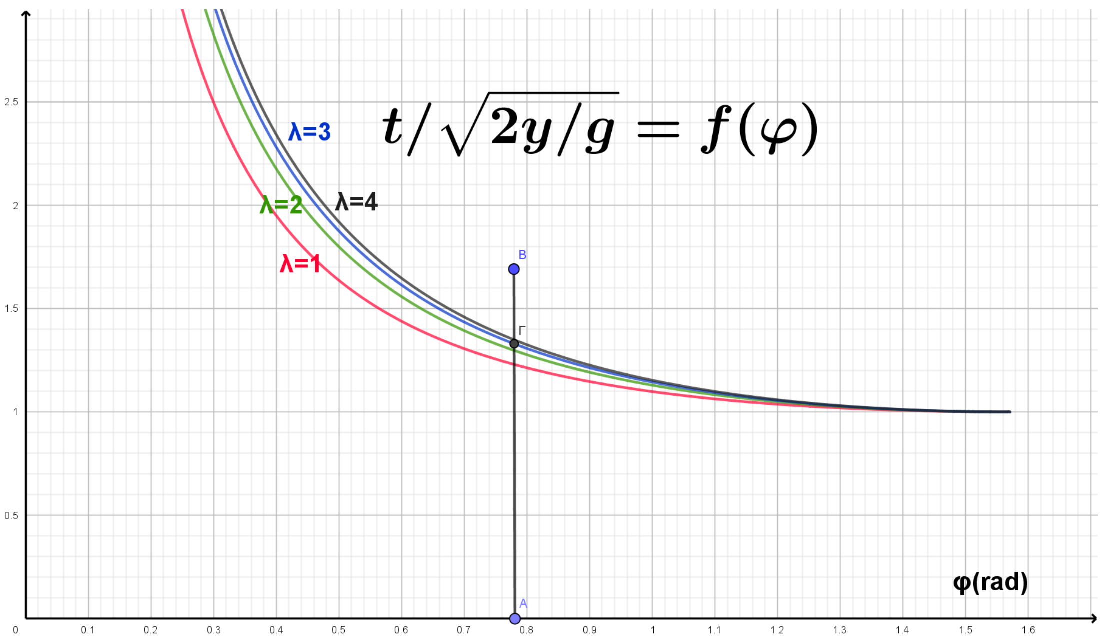
$$\lambda=2\rightarrow t=\sqrt{\frac{2+\sin^2\varphi}{3\sin^2\varphi}}\sqrt{\frac{2y}{g}}\xrightarrow{\varphi=\pi/4}t=1,29\sqrt{\frac{2y}{g}}\xrightarrow{y=h=1,4\ m}t=1,29\cdot0,53=0,68\ s$$

$$\lambda=3\rightarrow t=\sqrt{\frac{3+\sin^2\varphi}{4\sin^2\varphi}}\sqrt{\frac{2y}{g}}\xrightarrow{\varphi=\pi/4}t=1,32\sqrt{\frac{2y}{g}}\xrightarrow{y=h=1,4\ m}t=1,32\cdot0,53=0,70\ s$$

$$\lambda=4\rightarrow t=\sqrt{\frac{4+\sin^2\varphi}{5\sin^2\varphi}}\sqrt{\frac{2y}{g}}\xrightarrow{\varphi=\pi/4}t=1,34\sqrt{\frac{2y}{g}}\xrightarrow{y=h=1,4\ m}t=1,34\cdot0,53=0,71\ s$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}t=\lim_{\lambda\to\infty}\sqrt{\frac{\lambda+\sin^2\varphi}{(\lambda+1)\sin^2\varphi}}\sqrt{\frac{2y}{g}}=\lim_{\lambda\to\infty}\sqrt{\frac{1+\frac{\sin^2\varphi}{\lambda}}{\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)\sin^2\varphi}}\sqrt{\frac{2y}{g}}=\frac{1}{\sin\varphi}\sqrt{\frac{2y}{g}}\ \left(\text{σχεδόν ακίνητη η σφήνα}\right)$$

$$\lim_{\varphi\to\pi/2}t=\lim_{\varphi\to\pi/2}\sqrt{\frac{\lambda+\sin^2\varphi}{(\lambda+1)\sin^2\varphi}}\sqrt{\frac{2y}{g}}=\sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda+1}}\sqrt{\frac{2y}{g}}=\sqrt{\frac{2y}{g}}\ \left(\text{ελεύθερη πτώση}\right)\xrightarrow{y=h}t=0,53\ s$$



Σχήμα 14: Για κάθε λ ο χρόνος για κατακόρυφη μετατόπιση κατά y είναι φθίνουσα συνάρτηση της φ και για κάθε φ είναι αύξουσα συνάρτηση του λ. Πάντως ο χρόνος επηρεάζεται λίγο από το λ για την ίδια φ

Επιτάχυνση Σφήνας

$$a_1 = \frac{\upsilon_1}{t} = \frac{\sqrt{\dfrac{\cos^2\varphi}{(\lambda+1)(\lambda+\sin^2\varphi)}2gy}}{\sqrt{\dfrac{\lambda+\sin^2\varphi}{(\lambda+1)\sin^2\varphi}\dfrac{2y}{g}}} = \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\lambda+\sin^2\varphi}g \rightarrow a_1 = \left(\frac{\cos\varphi}{\lambda+\sin^2\varphi}\right)g\sin\varphi = \frac{\sin 2\varphi}{2(\lambda+\sin^2\varphi)}g$$

Συμπεράσματα

Από την προηγούμενη σχέση συμπεραίνουμε ότι η επιτάχυνση της σφήνας είναι:

- Φθίνουσα συνάρτηση του λ, διότι αυξανόμενου του λ του παρανομαστή η τιμή της επιτάχυνσης μικραίνει. Δηλ. $\frac{a_1}{g} = f(\lambda) \quad \forall\lambda \in R^+$
- Αύξουσα συνάρτηση (παράγωγος της συνάρτησης ως προς φ, βλέπε παρακάτω απόδειξη) της φ μέχρι την τιμή $\varphi = \tan^{-1}\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda+1}}$ στην οποία παρουσιάζει μέγιστο με τιμή $\frac{1}{2\sqrt{\lambda(\lambda+1)}}$ και φθίνουσα στη συνέχεια. Δηλ. $\frac{a_1}{g} = f(\varphi), \left(0^{\circ} \quad \varphi = \tan^{-1}\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda+1}} \quad 90^{\circ}\right), \forall\lambda \in R^+$.

Απόδειξη

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{a_1}{g}\right)=\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\lambda+\sin^2\varphi}\right)=\frac{\left(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi\right)\left(\lambda+\sin^2\varphi\right)-2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\left(\lambda+\sin^2\varphi\right)^2}=$$

$$\frac{\lambda\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\cos^2\varphi-\lambda\sin^2\varphi-\sin^4\varphi-2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\left(\lambda+\sin^2\varphi\right)^2}=$$

$$\frac{\lambda\left(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi\right)-\sin^2\varphi\left(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\right)}{\left(\lambda+\sin^2\varphi\right)^2}=\frac{\lambda\left(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi\right)-\sin^2\varphi}{\left(\lambda+\sin^2\varphi\right)^2}=\frac{\lambda\cos^2\varphi-\left(\lambda+1\right)\sin^2\varphi}{\left(\lambda+\sin^2\varphi\right)^2}\ge 0$$

$$\lambda\cos^2\varphi-\left(\lambda+1\right)\sin^2\varphi\ge 0\rightarrow\lambda\cos^2\varphi\ge\left(\lambda+1\right)\sin^2\varphi\rightarrow\tan\varphi\le\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda+1}}$$

$$\frac{a_1}{g}=f\left(\varphi\right),\left(0^\circ<\varphi=\tan^{-1}\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda+1}}<90^\circ\right),\ \sin^2\varphi=\frac{\lambda}{2\lambda+1},\ \cos^2\varphi=\frac{\lambda+1}{2\lambda+1},\ \left(\frac{a_1}{g}\right)_{\max}=\frac{1}{2\sqrt{\lambda\left(\lambda+1\right)}}$$

Εφαρμογή 1

$$\lambda=1\rightarrow a_1=\frac{\sin 2\varphi}{2\left(1+\sin^2\varphi\right)}g\xrightarrow{\varphi=\pi/4}a_1=\frac{1}{2\left(1+\frac{1}{2}\right)}g=\frac{1}{3}g=3,33\ m/s^2$$

$$\lambda=2\rightarrow a_1=\frac{\sin 2\varphi}{2\left(2+\sin^2\varphi\right)}g\xrightarrow{\varphi=\pi/4}a_1=\frac{1}{2\left(2+\frac{1}{2}\right)}g=\frac{1}{5}g=2,00\ m/s^2$$

$$\lambda=3\rightarrow a_1=\frac{\sin 2\varphi}{2\left(3+\sin^2\varphi\right)}g\xrightarrow{\varphi=\pi/4}a_1=\frac{1}{2\left(3+\frac{1}{2}\right)}g=\frac{1}{7}g=1,43\ m/s^2$$

$$\lambda=4\rightarrow a_1=\frac{\sin 2\varphi}{2\left(4+\sin^2\varphi\right)}g\xrightarrow{\varphi=\pi/4}a_1=\frac{1}{2\left(4+\frac{1}{2}\right)}g=\frac{1}{9}g=1,11\ m/s^2$$

$$\lim_{\lambda\to\infty}a_1=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\lambda+\sin^2\varphi}g=0$$

$$\lim_{\varphi\to\pi/2}a_1=\lim_{\varphi\to\pi/2}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\lambda+\sin^2\varphi}g=0$$

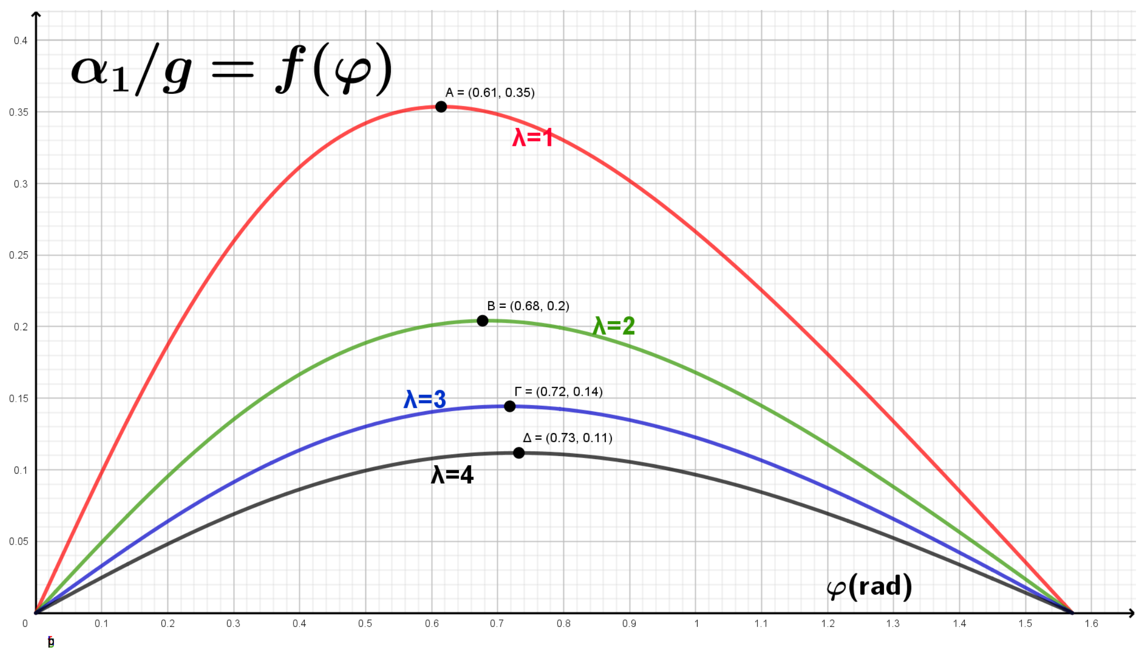
Εφαρμογή 2

$$\lambda = 1 \rightarrow \tan\varphi = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0,71 \rightarrow \varphi = \arctan 0,71 = 35,4^0 \approx 0,62\ rad \rightarrow a_{1,\max} = 0,35g$$

$$\lambda = 2 \rightarrow \tan\varphi = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0,82 \rightarrow \varphi = \arctan 0,82 = 39,3^0 \approx 0,69\ rad \rightarrow a_{1,\max} = 0,20g$$

$$\lambda = 3 \rightarrow \tan\varphi = \sqrt{\frac{3}{4}} = 0,87 \rightarrow \varphi = \arctan 0,87 = 41,0^0 \approx 0,72\ rad \rightarrow a_{1,\max} = 0,14g$$

$$\lambda = 4 \rightarrow \tan\varphi = \sqrt{\frac{4}{5}} = 0,89 \rightarrow \varphi = \arctan 0,89 = 41,7^0 \approx 0,73\ rad \rightarrow a_{1,\max} = 0,11g$$



Σχήμα 15: Η επιτάχυνση της σφήνας για κάθε λ παρουσιάζει μέγιστο για κάποια γωνία φ που είναι μεγαλύτερο για μικρότερα λ αλλά το παρουσιάζει σε μικρότερη. Για παράδειγμα όταν οι μάζες είναι ίσες (λ=1) το μέγιστο της η επιτάχυνσης είναι 0,35g και επιτυγχάνεται για γωνία 0,61 rad (35 μοίρες)

Επιτάχυνση Σώματος

$$a_2 = \frac{\upsilon_2}{t} = \frac{\sqrt{\frac{\lambda^2 + (2\lambda+1)\sin^2\varphi}{(\lambda+1)(\lambda+\sin^2\varphi)} 2gy}}{\sqrt{\frac{\lambda+\sin^2\varphi}{(\lambda+1)\sin^2\varphi}\frac{2y}{g}}} \rightarrow a_2 = \frac{\sqrt{\lambda^2 + (2\lambda+1)\sin^2\varphi}}{\lambda+\sin^2\varphi} g\sin\varphi$$

Συμπεράσματα

Από την προηγούμενη σχέση προκύπτει ότι η ταχύτητα του σώματος είναι

- Φθίνουσα συνάρτηση του λ (για κάθε γωνία φ), αφού η 1η παράγωγό της είναι αρνητική (βλέπε παρακάτω απόδειξη 1), δηλ. $\frac{a_2}{g}=f\left(\lambda\right)\boxtimes$. Η επίδραση του λ είναι άξια λόγου στις μεσαίες γωνίες (45^0), όπως φαίνεται στο διάγραμμα.
- Αύξουσα συνάρτηση της φ (για κάθε λ), αφού η 1η παράγωγό της (βλέπε παρακάτω απόδειξη 2) είναι θετική, δηλ. $\frac{a_2}{g}=f\left(\varphi\right)\boxtimes$.

Απόδειξη 1

$$\frac{a_2}{g}=\frac{\sin\varphi\sqrt{\lambda^2+\left(2\lambda+1\right)\sin^2\varphi}}{\lambda+\sin^2\varphi}\geq 0\rightarrow\left(\frac{a_2}{g}\right)^2=\frac{\sin^2\varphi\left[\lambda^2+\left(2\lambda+1\right)\sin^2\varphi\right]}{\left(\lambda+\sin^2\varphi\right)^2}\rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\left(\frac{a_2}{g}\right)^2\right]=\frac{\partial}{\partial\lambda}\left\{\frac{\sin^2\varphi\left[\lambda^2+\left(2\lambda+1\right)\sin^2\varphi\right]}{\left(\lambda+\sin^2\varphi\right)^2}\right\}=$$

$$\frac{\sin^2\varphi\left[2\lambda+2\sin^2\varphi\right]\left(\lambda+\sin^2\varphi\right)^2-\sin^2\varphi\left[\lambda^2+\left(2\lambda+1\right)\sin^2\varphi\right]2\left(\lambda+\sin^2\varphi\right)}{\left(\lambda+\sin^2\varphi\right)^4}=$$

$$\frac{\sin^2\varphi}{\left(\lambda+\sin^2\varphi\right)^3}\left\{\left[2\lambda+2\sin^2\varphi\right]\left(\lambda+\sin^2\varphi\right)-2\left[\lambda^2+\left(2\lambda+1\right)\sin^2\varphi\right]\right\}=$$

$$\frac{\sin^2\varphi}{\left(\lambda+\sin^2\varphi\right)^3}\left[2\lambda^2+2\lambda\sin^2\varphi+2\lambda\sin^2\varphi+2\sin^4\varphi-2\lambda^2-4\lambda\sin^2\varphi-2\sin^2\varphi\right]=$$

$$\frac{\sin^2\varphi}{\left(\lambda+\sin^2\varphi\right)^3}\left[2\sin^4\varphi-2\sin^2\varphi\right]=\frac{2\sin^4\varphi}{\left(\lambda+\sin^2\varphi\right)^3}\left[\sin^2\varphi-1\right]=-\frac{2\sin^4\varphi\cos^2\varphi}{\left(\lambda+\sin^2\varphi\right)^3}\leq 0\rightarrow\frac{a_2}{g}=f\left(\lambda\right)\boxtimes$$

Απόδειξη 2

$$\frac{a_2}{g}=\frac{\sin\varphi\sqrt{\lambda^2+(2\lambda+1)\sin^2\varphi}}{\lambda+\sin^2\varphi}\geq 0\rightarrow\left(\frac{a_2}{g}\right)^2=\frac{\sin^2\varphi\left[\lambda^2+(2\lambda+1)\sin^2\varphi\right]}{\left(\lambda+\sin^2\varphi\right)^2}\rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\left(\frac{a_2}{g}\right)^2\right]=\frac{\partial}{\partial\varphi}\left\{\frac{\sin^2\varphi\left[\lambda^2+(2\lambda+1)\sin^2\varphi\right]}{\left(\lambda+\sin^2\varphi\right)^2}\right\}=$$

$$\frac{\left\{2\sin\varphi\cos\varphi\left[\lambda^2+(2\lambda+1)\sin^2\varphi\right]+\sin^2\varphi\left[(2\lambda+1)2\sin\varphi\cos\varphi\right]\right\}\cdot\left(\lambda+\sin^2\varphi\right)^2-\sin^2\varphi\left[\lambda^2+(2\lambda+1)\sin^2\varphi\right]2\left(\lambda+\sin^2\varphi\right)2\sin\varphi\cos\varphi}{\left(\lambda+\sin^2\varphi\right)^4}=$$

$$\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{\left(\lambda+\sin^2\varphi\right)^3}\frac{\left\{\left[\lambda^2+(2\lambda+1)\sin^2\varphi\right]+\sin^2\varphi\left[(2\lambda+1)\right]\right\}\cdot\left(\lambda+\sin^2\varphi\right)-2\sin^2\varphi\left[\lambda^2+(2\lambda+1)\sin^2\varphi\right]}{\left(\lambda+\sin^2\varphi\right)^4}=$$

$$\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{\left(\lambda+\sin^2\varphi\right)^3}\frac{\left[\lambda^2+2(2\lambda+1)\sin^2\varphi\right]\cdot\left(\lambda+\sin^2\varphi\right)-2\sin^2\varphi\left[\lambda^2+(2\lambda+1)\sin^2\varphi\right]}{\left(\lambda+\sin^2\varphi\right)^4}=$$

$$\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{\left(\lambda+\sin^2\varphi\right)^3}\frac{\lambda^3+\lambda^2\sin^2\varphi+2(2\lambda+1)\lambda\sin^2\varphi+2(2\lambda+1)\sin^4\varphi-2\lambda^2\sin^2\varphi-2(2\lambda+1)\sin^4\varphi}{\left(\lambda+\sin^2\varphi\right)^4}=$$

$$\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{\left(\lambda+\sin^2\varphi\right)^3}\frac{\lambda^3+\lambda^2\sin^2\varphi+2(2\lambda+1)\lambda\sin^2\varphi-2\lambda^2\sin^2\varphi}{\left(\lambda+\sin^2\varphi\right)^4}=\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{\left(\lambda+\sin^2\varphi\right)^3}\frac{\lambda^3+\lambda^2\sin^2\varphi+4\lambda^2\sin^2\varphi+2\lambda\sin^2\varphi-2\lambda^2\sin^2\varphi}{\left(\lambda+\sin^2\varphi\right)^4}=$$

$$\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{\left(\lambda+\sin^2\varphi\right)^3}\frac{\lambda^3+3\lambda^2\sin^2\varphi+2\lambda\sin^2\varphi}{\left(\lambda+\sin^2\varphi\right)^4}>0\rightarrow\frac{a_2}{g}=f(\varphi)\,\square$$

Εφαρμογή 1

$$\lambda=1\rightarrow a_2=\frac{\sin\varphi\sqrt{1+3\sin^2\varphi}}{1+\sin^2\varphi}g\xrightarrow{\varphi=\pi/4}a_2=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+3\cdot\frac{1}{2}}}{1+\frac{1}{2}}g=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}}{\frac{3}{2}}g=\frac{\sqrt{5}}{3}g=0,745g=7,45\ m/s^2$$

$$\lambda=2\rightarrow a_2=\frac{\sin\varphi\sqrt{4+5\sin^2\varphi}}{2+\sin^2\varphi}g\xrightarrow{\varphi=\pi/4}a_2=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{4+5\cdot\frac{1}{2}}}{2+\frac{1}{2}}g=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{13}{2}}}{\frac{5}{2}}g=\frac{\sqrt{13}}{5}g=0,721g=7,21\ m/s^2$$

$$\lambda=3\rightarrow a_2=\frac{\sin\varphi\sqrt{9+7\sin^2\varphi}}{3+\sin^2\varphi}g\xrightarrow{\varphi=\pi/4}a_2=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{9+7\cdot\frac{1}{2}}}{3+\frac{1}{2}}g=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{25}{2}}}{\frac{7}{2}}g=\frac{\sqrt{25}}{7}g=0,714g=7,14\ m/s^2$$

$$\lambda=4\rightarrow a_2=\frac{\sin\varphi\sqrt{16+9\sin^2\varphi}}{4+\sin^2\varphi}g\xrightarrow{\varphi=\pi/4}a_2=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{16+9\cdot\frac{1}{2}}}{4+\frac{1}{2}}g=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{41}{2}}}{\frac{9}{2}}g=\frac{\sqrt{41}}{9}g=0,711g=7,11\ m/s^2$$

$$\lim_{\lambda\to\infty} a_2 = \lim_{\lambda\to\infty}\frac{\sin\varphi\sqrt{\lambda^2+(2\lambda+1)\sin^2\varphi}}{\lambda+\sin^2\varphi}g = \lim_{\lambda\to\infty}\frac{\sin\varphi\sqrt{1+\left(\frac{2}{\lambda}+\frac{1}{\lambda^2}\right)\sin^2\varphi}}{1+\frac{\sin^2\varphi}{\lambda}}g = g\sin\varphi \quad (\text{ακίνητη σφήνα})$$

$$\lim_{\varphi\to\pi/2} a_2 = \lim_{\varphi\to\pi/2}\frac{\sin\varphi\sqrt{\lambda^2+(2\lambda+1)\sin^2\varphi}}{\lambda+\sin^2\varphi}g = \frac{\sqrt{\lambda^2+(2\lambda+1)}}{\lambda+1}g = \frac{\lambda+1}{\lambda+1}g = g \quad (\text{ελεύθερη πτώση})$$

Επαλήθευση

$$a_2 = \sqrt{a_1^2 + a_{2/1}^2 + 2a_1a_{2/1}\cos\left(180^0-\varphi\right)} =$$

$$\sqrt{\left(\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\lambda+\sin^2\varphi}g\right)^2 + \left[\frac{(\lambda+1)\sin\varphi}{\lambda+\sin^2\varphi}g\right]^2 - 2\left(\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\lambda+\sin^2\varphi}g\right)\frac{(\lambda+1)\sin\varphi}{\lambda+\sin^2\varphi}g\cos\varphi} =$$

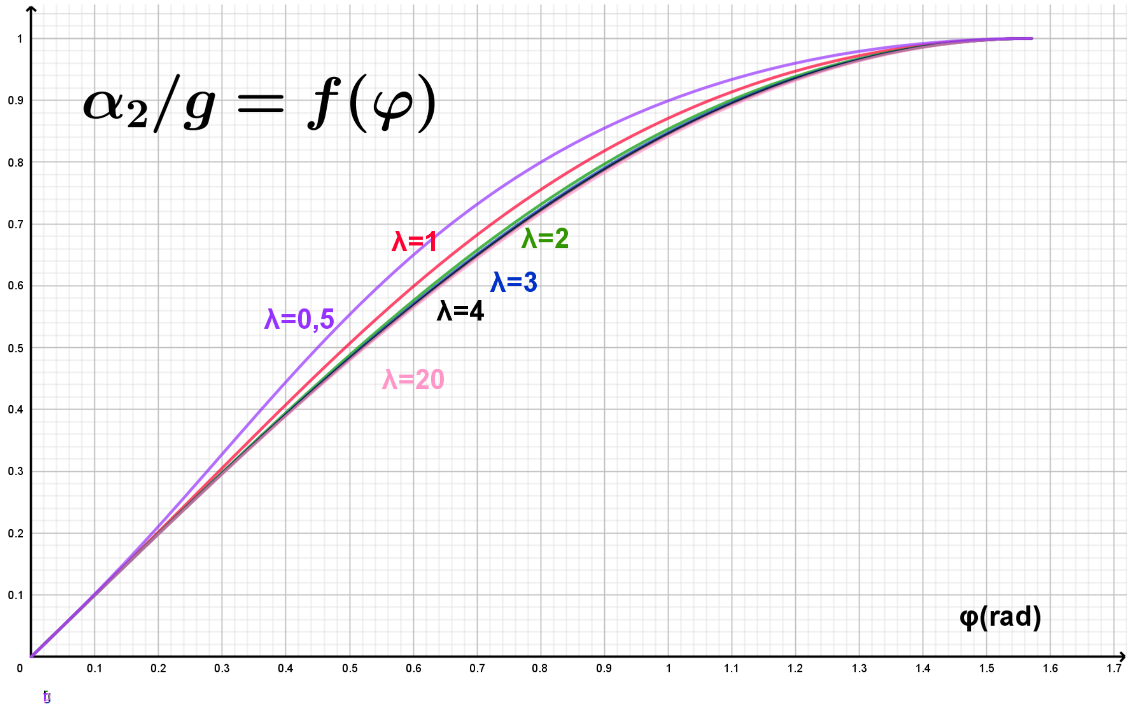
$$\frac{g\sin\varphi}{\lambda+\sin^2\varphi}\sqrt{\cos^2\varphi+(\lambda+1)^2-2(\lambda+1)\cos^2\varphi} = \frac{g\sin\varphi}{\lambda+\sin^2\varphi}\sqrt{(\lambda+1)^2-(2\lambda+1)\cos^2\varphi} =$$

$$\frac{g\sin\varphi}{\lambda+\sin^2\varphi}\sqrt{(\lambda+1)^2-(2\lambda+1)(1-\sin^2\varphi)} = \sqrt{(\lambda+1)^2-(2\lambda+1)+(2\lambda+1)\sin^2\varphi}$$

$$\frac{g\sin\varphi}{\lambda+\sin^2\varphi}\sqrt{\lambda^2+(2\lambda+1)\sin^2\varphi} \ \surd$$

Εφαρμογή

$$a_2 = \sqrt{a_1^2 + a_{2/1}^2 + 2a_1a_{2/1}\cos\left(180^0-\varphi\right)} = \sqrt{a_1^2+32a_1^2-2a_1 4\sqrt{2}a_1\cos\varphi} = a_1\sqrt{33-8\sqrt{2}\cos\varphi} = 5a_1 = 7{,}15\ m/s^2$$



Σχήμα 16: Η συνάρτηση $a_2 = f(\varphi)$ είναι αύξουσα, δηλ. για μεγαλύτερες γωνίες φ θα έχουμε και μεγαλύτερες επιταχύνσεις και αυτό για κάθε λ. Η συνάρτηση $a_2 = f(\lambda)$, είναι ελαφρώς φθίνουσα, δηλ. για διαφορετικά λ υπό την ίδια γωνία η επιτάχυνση του σώματος θα είναι περίπου η ίδια (η σχέση μαζών φαίνεται να μην παίζει ιδιαίτερο ρόλο στην επιτάχυνση του σώματος). Οι καμπύλες για λ>1, σχεδόν, συμπίπτουν.

Διάταξη Επιταχύνσεων

Η διάταξη των επιταχύνσεων δε μπορεί παρά να είναι ο ίδια με την αντίστοιχη των ταχυτήτων, αφού έχουν προκύψει με διαίρεση των ταχυτήτων με τον ίδιο χρόνο. Αλλά ας την προσδιορίσουμε.

$$a_1 : a_2 : a_{2/1} = \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\lambda+\sin^2\varphi} g : \frac{\sin\varphi\sqrt{\lambda^2+(2\lambda+1)\sin^2\varphi}}{\lambda+\sin^2\varphi} g : \frac{(\lambda+1)\sin\varphi}{\lambda+\sin^2\varphi} g \to$$

$$a_1 : a_2 : a_{2/1} = \cos\varphi : \sqrt{\lambda^2+(2\lambda+1)\sin^2\varphi} : \lambda+1$$

$$\frac{\lambda^2+(2\lambda+1)\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} \geq \lambda^2+(2\lambda+1)\sin^2\varphi \geq 1 \; \mu\varepsilon \left(\begin{array}{c} \lambda \geq 1 \\ \text{ή} \\ \sin\varphi \geq \sqrt{\dfrac{1-\lambda^2}{2\lambda+1}} \end{array} \right)$$

$$(\lambda+1)^2 \geq ; \lambda^2+(2\lambda+1)\sin^2\varphi \Leftrightarrow \lambda^2+2\lambda+1 \geq ; \lambda^2+(2\lambda+1)\sin^2\varphi \Leftrightarrow$$

$$2\lambda+1 \geq ; (2\lambda+1)\sin^2\varphi \to \sin^2\varphi \leq 1 \; (\text{ισχύει}) \to a_{2/1} \geq a_2$$

$$a_1 < a_2 < a_{2/1} \;\; (\lambda \geq 1)$$

Εφαρμογή

$$\left\{\lambda=3,\ \varphi=\frac{\pi}{4}\right\}\rightarrow a_1:a_2:a_{2/1}=\frac{\sqrt{2}}{2}:\sqrt{9+3,5}:4=0,71:3,54:4$$

$$\text{αν } a_1=1,43\ m/s^2\rightarrow\left(a_2=\frac{3,54}{0,71}a_1=4,98a_1=7,12\ \ m/s^2,\ a_{2/1}=\frac{4}{0,71}a_1=5,63a_1=8,05\ m/s^2\right)$$

Μετατοπίσεις Μετά Από Πτώση Του Σώματος Κατά Υ – Επιβεβαιώσεις Σχέσεων

$$r_{2/1}=\frac{y_2}{\sin\varphi}$$

$$x_{2/1}=r_{2/1}\cos\varphi=\frac{y_2}{\sin\varphi}\cos\varphi=y_2\cot\varphi\rightarrow x_{2/1}=y_2\cot\varphi$$

$$x_1=-\tfrac{1}{2}a_1t^2=-\tfrac{1}{2}\upsilon_1t=-\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{(\lambda+1)(\lambda+\sin^2\varphi)}2gy_2}\sqrt{\frac{\lambda+\sin^2\varphi}{(\lambda+1)\sin^2\varphi}\frac{2y_2}{g}}\rightarrow x_1=-\frac{\cot\varphi}{\lambda+1}y_2=-\frac{1}{\lambda+1}x_{2/1}$$

$$x_2=x_1+x_{2/1}=-\frac{\cot\varphi}{\lambda+1}y_2+y_2\cot\varphi=y_2\cot\varphi\left(1-\frac{1}{\lambda+1}\right)=\frac{\lambda\cot\varphi}{\lambda+1}y_2\rightarrow x_2=\frac{\lambda\cot\varphi}{\lambda+1}y_2=\frac{\lambda}{\lambda+1}x_{2/1}$$

$$x_2+|x_1|=\frac{\lambda\cot\varphi}{\lambda+1}y_2+\frac{\cot\varphi}{\lambda+1}y_2=y_2\cot\varphi$$

$$\frac{x_2}{|x_1|}=\frac{\frac{\lambda\cot\varphi}{\lambda+1}y}{\frac{\cot\varphi}{\lambda+1}y}=\lambda\rightarrow\frac{x_2}{|x_1|}=\lambda\ (\text{ανεξάρτητο της κλίσης φ})$$

Συμπεράσματα

Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι το πηλίκο $\frac{x_2}{|x_1|}=\lambda$ (οριζόντια και προς τα δεξιά μέτρο της μετατόπισης του σώματος προς το μέτρο της οριζόντιας προς τα αριστερά μετατόπισης της σφήνας) εξαρτάται αποκλειστικά από τη σχέση των μαζών, δηλ. το λ (δεν εξαρτάται από τη γωνία κλίσης φ ή την κατακόρυφη y_2 μετατόπιση του σώματος). Έτσι $x_2=\lambda|x_1|$. Το άθροισμα $x_{2/1}=y_2\cot\varphi$ των μέτρων των μετατοπίσεων $x_2=\frac{\lambda}{\lambda+1}x_{2/1}$ και $|x_1|=\frac{1}{\lambda+1}x_{2/1}$ ισούται με το μήκος της βάσης του σχηματιζόμενου κάθε φορά ορθογώνιου τριγώνου με κορυφές την ψηλότερη και των τομών του οριζόντιου τμήματος που διέρχεται από τις διαδοχικές θέσεις του σώματος με τις πλευρές του τριγώνου που επηρεάζεται από την κάθοδο y_2 και τη γωνία φ.

Εφαρμογή

$$\left(\varphi=\pi/4,\ y=h=1,4\ m\right)\rightarrow\left\{\begin{array}{l} x_{2/1}=\dfrac{1,4}{\sqrt{2}/2}=1,98\ m \quad x_{2/1}=\frac{1}{2}a_{2/1}t^2=1,98\,t= \qquad m \\ x_{2/1}=1,40\ m \\ x_1=-\dfrac{1}{4}y=-0,35\ m \\ x_2=\dfrac{3}{4}y=1,05\ m\ \left(x_2=x_1+x_{2/1}=-0,35+1,40=1,05\ m\right) \\ \dfrac{x_2}{|x_1|}=3 \end{array}\right\}$$

Αν η σφήνα έχει σχήμα ισοσκελούς ορθογωνίου, τότε το άθροισμα των μέτρων των μετατοπίσεων ισούται και με την υψομετρική κάθοδο του σώματος. Για λ=3 το μέτρο της οριζόντιας προς τα δεξιά μετατόπισής του σώματος $\frac{3}{4}y_2\cot\varphi$ είναι τριπλάσιο του μέτρου της αντίστοιχης προς τα αριστερά της σφήνας $\frac{1}{4}y_2\cot\varphi$ και αυτό για κάθε y_2 και για οποιαδήποτε γωνία φ της σφήνας.

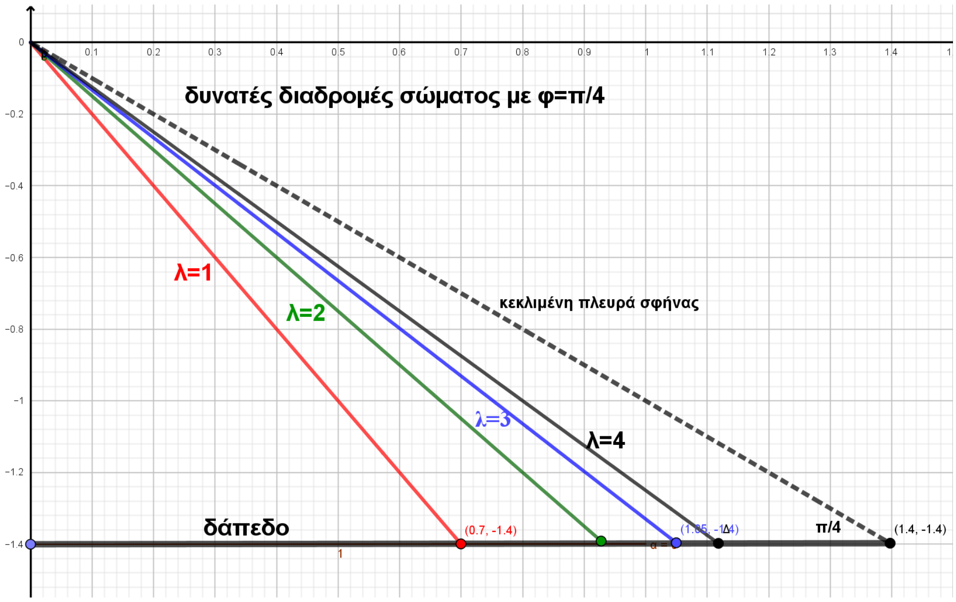
Εξίσωση (Ευθύγραμμης) Τροχιάς Σώματος

Από τα προηγούμενα μπορεί να προκύψει η σχέση που συνδέει τις συντεταγμένες του σώματος.

$$x_2=\frac{\lambda}{\lambda+1}x_{2/1}=\frac{\lambda}{\lambda+1}y_2\cot\varphi\rightarrow y_2=\frac{\lambda+1}{\lambda}\tan\varphi\cdot x_2\rightarrow$$

$$y_2=\frac{\lambda+1}{\lambda}\tan\varphi\cdot x_2,\ x_2\in\left[0,\ \frac{\lambda\cot\varphi}{\lambda+1}y_{\max}\right]$$

$$\left(\varphi=\frac{\pi}{4},\ y_{\max}=h=1,4\ m\right)\rightarrow y_2=\frac{\lambda+1}{\lambda}\cdot x_2\xrightarrow{\lambda=3}y_2=\frac{4}{3}\cdot x_2,\ 0\le x_2\le\frac{3\cdot 1,4}{4}=1,05\ m$$



Σχήμα 17: Γραφικές παραστάσεις των εξισώσεων των δυνατών τροχιών του σώματος για διάφορες τιμές του λ αν $\varphi = 45^0$

Δυνάμεις Και Επιταχύνσεις

Από το Σχήμα 2 έχουμε:

$\vec{a}_2 = \vec{a}_1 + \vec{a}_{2/1}$ ($\vec{a}_1$ οριζόντιο αριστερά, $\vec{a}_{2/1}$ κατά μήκος της κεκλιμένης επιφάνειας)

$$\left\{\begin{array}{l} \text{σώμα 1:}\begin{pmatrix} N\sin\varphi = \lambda m a_1 \,(1) \\ \lambda m g - N' = 0 \end{pmatrix} \\ \text{σώμα 2:}\begin{pmatrix} N\sin\varphi = m a_{2,x} \,(2) \\ mg - N\cos\varphi = m a_{2,y} \,(3) \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{1,2} \lambda m a_1 = m a_{2,x} = m\left(a_{2/1,x} - a_1\right) \rightarrow (\lambda+1)a_1 = a_{2/1,x} = a_{2/1}\cos\varphi \rightarrow (\lambda+1)a_1 = a_{2/1}\cos\varphi \,(4)$$

$$\xrightarrow{1,3,4} mg - \frac{\lambda m a_1}{\sin\varphi}\cos\varphi = m a_{2,y} = m a_{2/1}\sin\varphi \rightarrow g - \lambda a_1 \cot\varphi = a_{2/1}\sin\varphi \,(5)$$

$$\xrightarrow{4,5} g - \lambda a_1 \cot\varphi = \frac{(\lambda+1)a_1}{\cos\varphi}\sin\varphi \rightarrow g - \frac{\lambda}{\tan\varphi}a_1 = (\lambda+1)a_1\tan\varphi \rightarrow g\tan\varphi - \lambda a_1 = (\lambda+1)a_1\tan^2\varphi$$

$$\boxed{a_1=\frac{\tan\varphi}{\lambda+(\lambda+1)\tan^2\varphi}g=\ldots=\frac{\cos\varphi}{\lambda+\sin^2\varphi}g\sin\varphi}\rightarrow$$

$$a_{2/1}=\frac{\lambda+1}{\cos\varphi}a_1=\frac{\lambda+1}{\cos\varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\lambda+\sin^2\varphi}g\rightarrow\boxed{a_{2/1}=\frac{(\lambda+1)}{\lambda+\sin^2\varphi}g\sin\varphi}$$

$$a_{2,x}=a_{2/1,x}-a_1=\frac{(\lambda+1)\sin\varphi}{\lambda+\sin^2\varphi}g\cos\varphi-\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\lambda+\sin^2\varphi}g=\frac{\lambda\sin\varphi\cos\varphi}{\lambda+\sin^2\varphi}g,\ a_{2,y}=a_{2/1}\sin\varphi=\frac{(\lambda+1)\sin^2\varphi}{\lambda+\sin^2\varphi}g$$

$$a_2=\sqrt{a_{2,x}^2+a_{2,y}^2}=\sqrt{\left(\frac{\lambda\sin\varphi\cos\varphi}{\lambda+\sin^2\varphi}g\right)^2+\left[\frac{(\lambda+1)\sin^2\varphi}{\lambda+\sin^2\varphi}g\right]^2}\rightarrow\boxed{a_2=\frac{\sqrt{\lambda^2+(2\lambda+1)\sin^2\varphi}}{\lambda+\sin^2\varphi}g\sin\varphi}$$

$$N=\frac{\lambda m a_1}{\sin\varphi}=\frac{\lambda m}{\sin\varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\lambda+\sin^2\varphi}g\rightarrow\boxed{N=\frac{\lambda\cos\varphi}{\lambda+\sin^2\varphi}mg}$$

$$\tan\theta=\tan\left(90^{\circ}+\omega\right)=-\cot\omega=-\frac{a_{2,y}}{a_{2,x}}=-\frac{\frac{(\lambda+1)\sin^2\varphi}{\lambda+\sin^2\varphi}g}{\frac{\lambda\sin\varphi\cos\varphi}{\lambda+\sin^2\varphi}g}=-\frac{(\lambda+1)\sin^2\varphi}{\lambda\sin\varphi\cos\varphi}=-\frac{\lambda+1}{\lambda}\tan\varphi$$ [6]

Συμπεράσματα

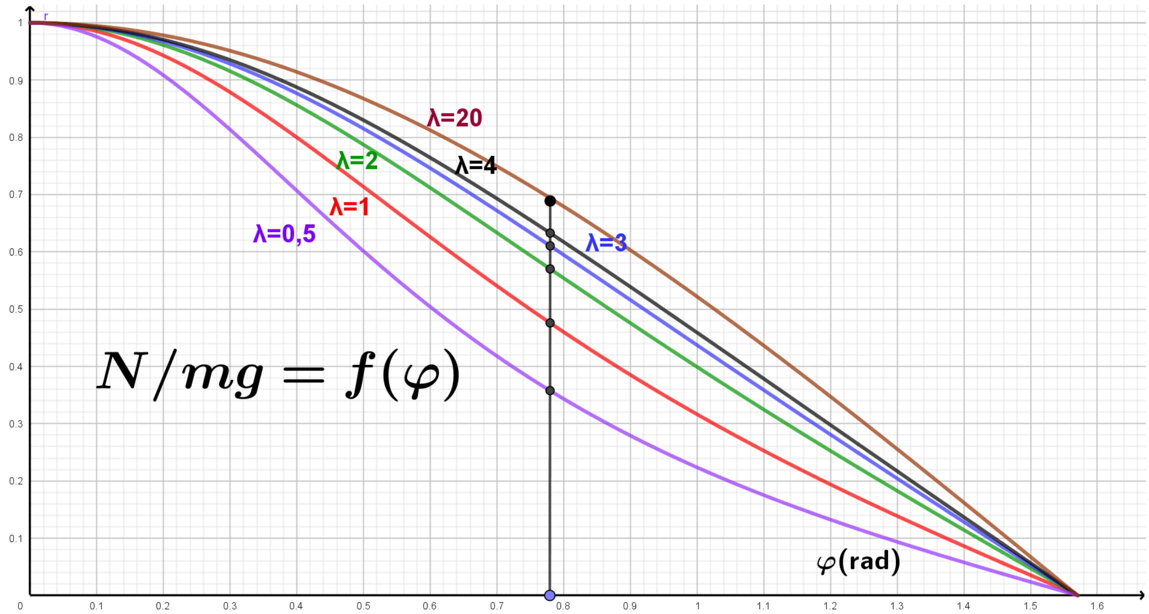
Από τις προηγούμενες σχέσεις προκύπτει ότι η δύναμη αλληλεπίδρασης ανάμεσα στα δύο σώματα είναι

- Φθίνουσα συνάρτηση της φ (για κάθε λ), αφού αυξανόμενης της φ ο αριθμητής μειώνεται, ενώ ο παρανομαστής αυξάνεται, δηλ. $N/mg=f(\varphi)\searrow$.
- Αύξουσα συνάρτηση του λ (για κάθε φ), αφού η πρώτη παράγωγός της είναι θετική (βλέπε απόδειξη 1), δηλ. $N/mg=f(\lambda)\nearrow$

Απόδειξη 1

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\lambda\cos\varphi}{\lambda+\sin^2\varphi}\right)=\frac{\cos\varphi\left(\lambda+\sin^2\varphi\right)-\lambda\cos\varphi}{\left(\lambda+\sin^2\varphi\right)^2}=\frac{\cos\varphi\sin^2\varphi}{\left(\lambda+\sin^2\varphi\right)^2}>0$$

[6] Η ω είναι η γωνία μεταξύ της διεύθυνσης της επιτάχυνσης του σώματος και της κατακόρυφου



Σχήμα 18: Η δύναμη αλληλεπίδρασης ανάμεσα στα δύο σώματα είναι φθίνουσα συνάρτηση της κλίσης φ για κάθε τιμή του λ και αύξουσα συνάρτηση του λ για κάθε γωνία φ

Με Θεωρία Του Κέντρου Μάζας

Από τον ορισμό του και με παραγώγιση ως προς το χρόνο έχουμε (Σχήμα 2):

$$(\lambda+1)m\vec{r}_{cm} = \lambda m\vec{r}_1 + m\vec{r}_2 \rightarrow (\lambda+1)\vec{r}_{cm} = \lambda\vec{r}_1 + \vec{r}_2 \rightarrow (\lambda+1)\vec{\upsilon}_{cm} = \lambda\vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2 \rightarrow (\lambda+1)\vec{a}_{cm} = \lambda\vec{a}_1 + \vec{a}_2$$

$$\begin{bmatrix}(\lambda+1)\vec{x}_{cm} = \lambda\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \\ (\lambda+1)\vec{y}_{cm} = \lambda\vec{y}_1 + \vec{y}_2\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}(\lambda+1)\vec{\upsilon}_{cm,x} = \lambda\vec{\upsilon}_{1,x} + \vec{\upsilon}_{2,x} \\ (\lambda+1)\vec{\upsilon}_{cm,y} = \lambda\vec{\upsilon}_{1,y} + \vec{\upsilon}_{2,y}\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}(\lambda+1)\vec{a}_{cm,x} = \lambda\vec{a}_{1,x} + \vec{a}_{2,x} \\ (\lambda+1)\vec{a}_{cm,y} = \lambda\vec{a}_{1,y} + \vec{a}_{2,y}\end{bmatrix}$$

και με αλγεβρική μορφή

$$\begin{bmatrix}(\lambda+1)x_{cm} = \lambda x_1 + x_2 \\ (\lambda+1)y_{cm} = \lambda y_1 + y_2\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}(\lambda+1)\upsilon_{cm,x} = \lambda\upsilon_{1,,x} + \upsilon_{2,x} \\ (\lambda+1)\upsilon_{cm,y} = \lambda\upsilon_{1,,y} + \upsilon_{2,y}\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}(\lambda+1)a_{cm,x} = \lambda a_{1,x} + a_{2,x} \\ (\lambda+1)a_{cm,y} = \lambda a_{1,y} + a_{2,y}\end{bmatrix}$$

Με εφαρμογή του $2^{ου}$ νευτωνικού νόμου για το κέντρο μάζας έχουμε:

Για τον οριζόντιο άξονα x $(+\rightarrow)$ (δεν ασκούνται στο σύστημα οριζόντιες εξωτερικές δυνάμεις):

$$\sum\vec{F}_{x,\varepsilon\xi.} = (\lambda+1)m\vec{a}_{cm,x} = 0 \rightarrow \vec{a}_{cm,x} = 0 \rightarrow \lambda\vec{a}_{1,x} + \vec{a}_{2,x} = 0 \rightarrow \lambda a_{1,x} + a_{2,x} = 0$$

Στον κατακόρυφο άξονα y $(+\downarrow)$ ασκούνται τα βάρη των δύο σωμάτων και η κάθετη δύναμη N' από το δάπεδο στη σφήνα.

$$\sum\vec{F}_{y,\varepsilon\xi.} = (\lambda+1)m\vec{g} + \vec{N}' = (\lambda+1)m\vec{a}_{cm,y} \rightarrow (\lambda+1)m\vec{g} + \vec{N}' = m\vec{a}_{2,y} \rightarrow (\lambda+1)mg + N' = ma_{cm,y}$$

Άρα, το κέντρο μάζας των δύο σωμάτων

- στην οριζόντια διεύθυνση δεν επιταχύνεται και δεν κινείται, εφόσον ήταν αρχικά ακίνητο, οπότε η x_{cm} συντεταγμένη (τετμημένη) του θα παραμένει σταθερή. Έτσι προκύπτουν οι επόμενες σχέσεις

$$a_{cm,x} = \sigma\tau\alpha\theta.\ \upsilon_{cm,x} = 0 \to x_{cm} = 0, \qquad \to \left\{ \begin{array}{ll} \lambda a_1 + a_{2,x} = 0, & \left(a_{1,x} = a_1\right) \\ \lambda \upsilon_1 + \upsilon_{2,x} = & \left(\upsilon_{1,x} = \upsilon_1\right) \\ \lambda x_1 + x_2 = 0 & \end{array} \right\}$$

Η $x_{cm} = \sigma\tau\alpha\theta. \to \lambda x_1 + x_2 = 0$ δηλοί ότι μια μετατόπιση της σφήνας προς τα αριστερά θα «αντισταθμίζεται» από μια λ-πλάσια μετατόπιση του σώματος προς τα δεξιά ή κάθε βήμα οριζόντιας μετατόπισης της σφήνας προς τα αριστερά θα συνοδεύεται από λ όμοια βήματα του σώματος προς τα δεξιά. **Ένα οριζόντιο βήμα της σφήνας αντιστοιχεί σε λ όμοια βήματα του σώματος σε αντίθετη κατεύθυνση,** δηλ ένα οριζόντιο βήμα της σφήνας προς τα αριστερά «εξουδετερώνεται» από λ όμοια βήματα του σώματος προς τα δεξιά (για να παραμένει σταθερή η οριζόντια θέση του κέντρου μάζας). Πιο αναλυτικά η σφήνα μετατοπιζόμενη, μαζί με το σώμα που συμμετέχει στην κίνησή της, κατά ένα βήμα οριζόντια και προς τα αριστερά, ενώ το σώμα ταυτόχρονα, λόγω της σχετικής κίνησής του πάνω στη σφήνα, μετατοπίζεται κατά λ+1 βήματα (ίδιου μήκους) προς τα δεξιά και τελικώς (απολύτως) λ βήματα προς τα δεξιά.

Το $y\cot\varphi$ είναι ίσο με την οριζόντια πλευρά του ορθογώνιου τριγώνου που ορίζεται από την κάθε φορά θέση της υψηλότερης κορυφής του και της θέσης του σώματος επί της κεκλιμένης επιφάνειας και το άθροισμα των μέτρων των οριζόντιων μετατοπίσεων των δύο σωμάτων ισούται με αυτή την πλευρά του τριγώνου και αυτό για κάθε y, όπου y η κατακόρυφη μετατόπιση του σώματος. Έτσι

$$0 = \lambda x_1 + x_2 = \lambda x_1 + \left(x_1 + x_{2/1}\right) \to \left(\lambda+1\right)x_1 + x_{2/1}\cos\varphi = 0 \to \left(\lambda+1\right)x_1 + \frac{y_2}{\sin\varphi}\cos\varphi = 0$$

$$\left(\lambda+1\right)x_1 + y_2\cot\varphi = 0 \to x_1 = -\frac{\cot\varphi}{\lambda+1}y_2$$

$$\lambda\left|x_1\right| = \left|x_2\right| \to \left|x_1\right| + \left|x_2\right| = \left|x_1\right| + \lambda\left|x_1\right| = \left(\lambda+1\right)\left|x_1\right| = \left(\lambda+1\right)\frac{y_2}{\lambda+1}\cot\varphi = y_2\cot\varphi$$

- στην κατακόρυφη διεύθυνση θα κινείται και θα επιταχύνεται προς τα κάτω (που θα οφείλεται αποκλειστικά στην κίνηση του σώματος) και άρα η y_{cm} συντεταγμένη (τεταγμένη) του θα αυξάνεται (θετικά y προς τα κάτω), καθώς το σώμα κινείται προς τα κάτω.
- συνολικά θα κινείται κατακόρυφα προς τα κάτω (από την αρχική του θέση).

Από τα προηγούμενα και λαμβάνοντας υπόψη τα της σχετικής κίνησης προκύπτουν οι σχέσεις

$$(\lambda+1)\vec{\upsilon}_{cm,x}=\lambda\vec{\upsilon}_1+\vec{\upsilon}_{2,x}\rightarrow\vec{\upsilon}_{cm,x}=\frac{1}{\lambda+1}\left(\lambda\vec{\upsilon}_1+\vec{\upsilon}_{2,x}\right)\rightarrow\upsilon_{cm,x}=\frac{1}{\lambda+1}\left[\upsilon_1+\upsilon_2\cos\left(180^{\circ}-\theta\right)\right]=$$

$$\frac{1}{\lambda+1}\left(\lambda\upsilon_1-\upsilon_2\cos\theta\right)=\frac{1}{\lambda+1}\left(-\lambda\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{(\lambda+1)\left(\lambda+\sin^2\varphi\right)}2gy}+\sqrt{\frac{\lambda^2+(2\lambda+1)\sin^2\varphi}{(\lambda+1)\left(\lambda+\sin^2\varphi\right)}2gy}\,\frac{\lambda\cos\varphi}{\sqrt{\lambda^2+(2\lambda+1)\sin^2\varphi}}\right)=$$

$$\upsilon_{cm,x}=0\;(\text{αναμενόμενο})$$

$$(\lambda+1)\vec{a}_{cm,x}=\lambda\vec{a}_1+\vec{a}_{2,x}\rightarrow\vec{a}_{cm,x}=\frac{1}{\lambda+1}\left(\lambda\vec{a}_1+\vec{a}_{2,x}\right)\rightarrow a_{cm,x}=\frac{1}{\lambda+1}\left[a_1+a_2\cos\left(180^{\circ}-\theta\right)\right]=$$

$$\frac{1}{\lambda+1}\left(\lambda a_1-a_2\cos\theta\right)=\frac{1}{\lambda+1}\left(-\lambda\frac{\cos\varphi}{\lambda+\sin^2\varphi}g\sin\varphi+\frac{\sqrt{\lambda^2+(2\lambda+1)\sin^2\varphi}}{\lambda+\sin^2\varphi}g\sin\varphi\frac{\lambda\cos\varphi}{\sqrt{\lambda^2+(2\lambda+1)\sin^2\varphi}}\right)$$

$$a_{cm,x}=0\;(\text{αναμενόμενο})$$

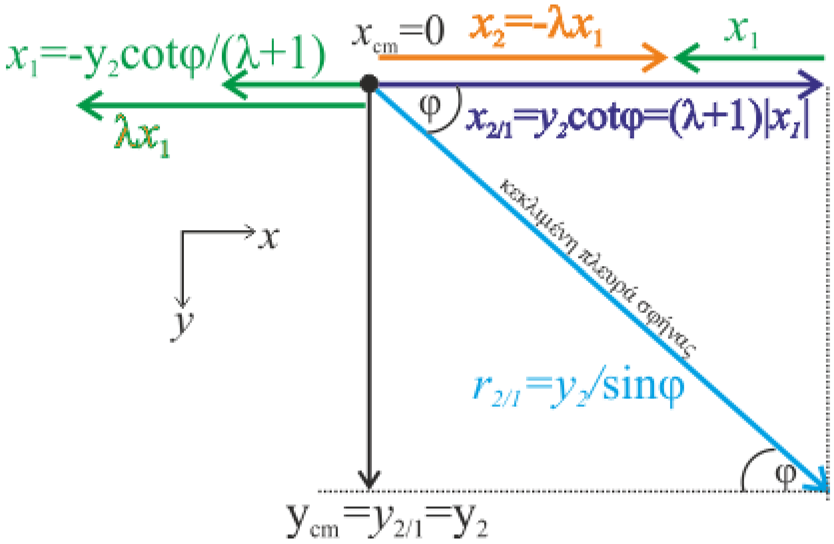
$$(\lambda+1)\vec{\upsilon}_{cm,y}=\lambda\cdot 0+\vec{\upsilon}_{2,y}\rightarrow\vec{\upsilon}_{cm,y}=\frac{1}{\lambda+1}\vec{\upsilon}_{2,y}\rightarrow\upsilon_{cm,y}=\frac{1}{\lambda+1}\upsilon_2\sin\left(180^{\circ}-\theta\right)=\frac{1}{\lambda+1}\upsilon_2\sin\theta=$$

$$=\frac{1}{\lambda+1}\frac{\sqrt{\lambda^2+(2\lambda+1)\sin^2\varphi}}{\sqrt{(\lambda+1)\left(\lambda+\sin^2\varphi\right)}}\sqrt{2gy}\,\frac{(\lambda+1)\sin\varphi}{\sqrt{\lambda^2+(2\lambda+1)\sin^2\varphi}}=\frac{\sin\varphi}{\sqrt{(\lambda+1)\left(\lambda+\sin^2\varphi\right)}}\sqrt{2gy}$$

$$\upsilon_{cm,y}=\upsilon_{2,y}=\sin\varphi\sqrt{\frac{2gy}{(\lambda+1)\left(\lambda+\sin^2\varphi\right)}}\xrightarrow{\lambda=3,\ \varphi=\pi/4,\ y=y_{max}=1,4\ m}\upsilon_{cm,y}=\upsilon_{2,y}=1\ m/s$$

$$(\lambda+1)\vec{a}_{cm,y}=\vec{a}_{1,y}+\vec{a}_{2,y}=0+\vec{a}_{2,y}\rightarrow a_{cm,y}=\frac{1}{\lambda+1}a_2\sin\left(180^{\circ}-\theta\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{\lambda^2+(2\lambda+1)\sin^2\varphi}}{\lambda+\sin^2\varphi}g\sin\varphi\frac{(\lambda+1)\sin\varphi}{\sqrt{\lambda^2+(2\lambda+1)\sin^2\varphi}}\rightarrow a_{cm,y}=\frac{\sin^2\varphi}{\lambda+\sin^2\varphi}g\xrightarrow{\lambda=3,\ \varphi=\pi/4}a_{cm,y}=\frac{1}{7}g$$



Σχήμα 19: Η κίνηση του κέντρου μάζας του συστήματος είναι κατακόρυφη με την τετμημένη του να είναι μηδέν, ενώ η τεταγμένη του ίση με την τεταγμένη του ολισθαίνοντος, πάνω στη σφήνα, σώματος

Δύναμη Στη Σφήνα Από Το Δάπεδο

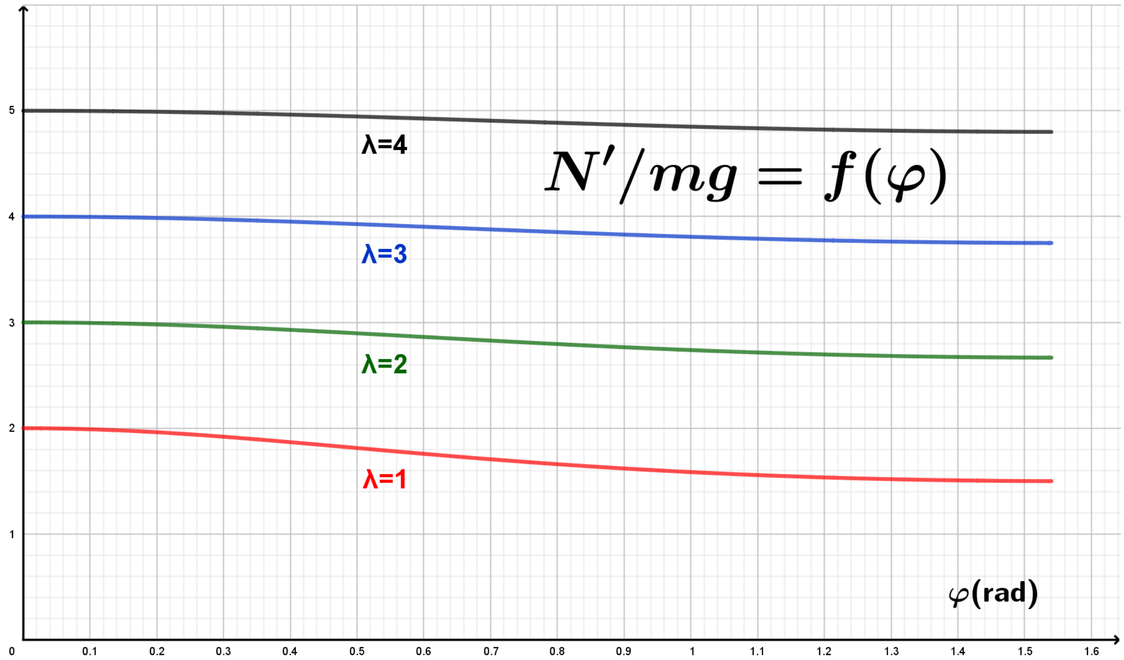
$$N' = ma_{cm,y} - (\lambda+1)mg = m\frac{1}{\lambda+1}a_{2,y} - (\lambda+1)mg = m\frac{1}{\lambda+1}a_2\sin\left(180^{\circ}-\theta\right) - (\lambda+1)mg =$$

$$= m\frac{1}{\lambda+1}\left(\frac{\sqrt{\lambda^2+(2\lambda+1)\sin^2\varphi}}{\lambda+\sin^2\varphi}g\sin\varphi\right)\left(\frac{(\lambda+1)\sin\varphi}{\sqrt{(\lambda+1)^2-(2\lambda+1)\cos^2\varphi}}\right) - (\lambda+1)mg =$$

$$= \frac{\sin^2\varphi}{\lambda+\sin^2\varphi}mg - (\lambda+1)mg = \left(\frac{\sin^2\varphi}{\lambda+\sin^2\varphi} - (\lambda+1)\right)mg = -\frac{\lambda\left[1+\left(\lambda+\sin^2\varphi\right)\right]}{\lambda+\sin^2\varphi}mg$$

$$N' = -\frac{\lambda\left[1+\left(\lambda+\sin^2\varphi\right)\right]}{\lambda+\sin^2\varphi}mg \rightarrow \frac{|N'|}{mg} = \frac{\lambda\left[1+\left(\lambda+\sin^2\varphi\right)\right]}{\lambda+\sin^2\varphi}$$

$$\lim_{\varphi\to 0}\frac{|N'|}{mg} = \frac{\lambda[\lambda+1]}{\lambda} = \begin{pmatrix} 2 \text{ αν } \lambda=1 \\ 3 \text{ αν } \lambda=2 \\ 4 \text{ αν } \lambda=3 \\ 5 \text{ αν } \lambda=4 \end{pmatrix}, \quad \lim_{\varphi\to\pi/2}\frac{|N'|}{mg} = \frac{\lambda[\lambda+2]}{\lambda+1} = \begin{pmatrix} 1,5 \text{ αν } \lambda=1 \\ 2,66 \text{ αν } \lambda=2 \\ 3,75 \text{ αν } \lambda=3 \\ 4,75 \text{ αν } \lambda=3 \end{pmatrix}$$



Σχήμα 20: Η δύναμη από τα δάπεδο στη σφήνα ως συνάρτηση της φ για διάφορες τιμές του λ

Συντεταγμένες κέντρου μάζας σφήνας, σώματος και κέντρου μάζας συστήματος. Αν υποθέσουμε ότι η σφήνα είναι λεπτή κατακόρυφη **ομογενής** πλάκα, τότε, ως γνωστόν, το κέντρο μάζας της (βαρύκεντρο) βρίσκεται στο σημείο τομής των διαμέσων που απέχει από κάθε κορυφή τα 2/3 της διαμέσου που αντιστοιχεί στη συγκεκριμένη κορυφή. Έστω ω η γωνία μεταξύ της διαμέσου που αντιστοιχεί στην κορυφή Α και στην κατακόρυφο (Σχήμα 21, παράρτημα στο τέλος)

Θεώρημα διαμέσων: $\mathrm{A\Gamma}^2+\mathrm{AB}^2=2\mathrm{A\Delta}^2+\dfrac{\mathrm{B\Gamma}^2}{2}\rightarrow \mathrm{A\Delta}^2=\dfrac{2\mathrm{A\Gamma}^2+2\mathrm{AB}^2-\mathrm{B\Gamma}^2}{4}=$

$$=\frac{2\mathrm{A\Gamma}^2+2\dfrac{\mathrm{A\Gamma}^2}{\sin^2\varphi}-\mathrm{A\Gamma}^2\cot^2\varphi}{4}=\mathrm{A\Gamma}^2\frac{2+\dfrac{2}{\sin^2\varphi}-\dfrac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi}}{4}=\frac{\mathrm{A\Gamma}^2}{4\sin^2\varphi}\left(2\sin^2\varphi+2-\cos^2\varphi\right)=\frac{\mathrm{A\Gamma}^2}{4\sin^2\varphi}\left(3\sin^2\varphi+1\right)$$

$$\mu=(\mathrm{A\Delta})=\frac{\sqrt{1+3\sin^2\varphi}}{2\sin\varphi}h,\quad (A\Gamma=h)\rightarrow(AM)=\frac{2}{3}\mu=\frac{\sqrt{1+3\sin^2\varphi}}{3\sin\varphi}h$$

$$\tan\omega=\frac{\dfrac{\mathrm{B\Gamma}}{2}}{\mathrm{A\Gamma}}=\frac{\mathrm{B\Gamma}}{2\mathrm{A\Gamma}}=\frac{\mathrm{A\Gamma}\cot\varphi}{2\mathrm{A\Gamma}}\rightarrow\tan\omega=\frac{1}{2\tan\varphi}\rightarrow\begin{pmatrix}\sin\omega=\dfrac{1}{\sqrt{1+4\tan^2\varphi}}=\dfrac{\cos\varphi}{\sqrt{1+3\sin^2\varphi}}\\ \cos\omega=\dfrac{2\tan\varphi}{\sqrt{1+4\tan^2\varphi}}=\dfrac{2\sin\varphi}{\sqrt{1+3\sin^2\varphi}}\end{pmatrix}$$

$$m(AG)=\lambda m(MG)\rightarrow\frac{(AG)}{(MG)}=\lambda\rightarrow\frac{(AG)}{(AM)}=\frac{\lambda}{\lambda+1}\rightarrow(AG)=\frac{\lambda}{\lambda+1}(AM)=\frac{\lambda}{\lambda+1}\frac{\sqrt{1+3\sin^2\varphi}}{3\sin\varphi}h$$

Οι αρχικές συντεταγμένες είναι:

$$\left[\begin{aligned} x_1&=(AM)\sin\omega=\frac{\sqrt{1+3\sin^2\varphi}}{3\sin\varphi}h\frac{\cos\varphi}{\sqrt{1+3\sin^2\varphi}}=\frac{1}{3\tan\varphi}h\\ y_1&=(AM)\cos\omega=\frac{\sqrt{1+3\sin^2\varphi}}{3\sin\varphi}h\frac{2\sin\varphi}{\sqrt{1+3\sin^2\varphi}}=\frac{2}{3}h\end{aligned}\right]\rightarrow(x_1,\ y_1)=\left(\frac{\cot\varphi}{3}h,\ \frac{2}{3}h\right)$$

$$(x_2,\ y_2)=(0,\ 0)$$

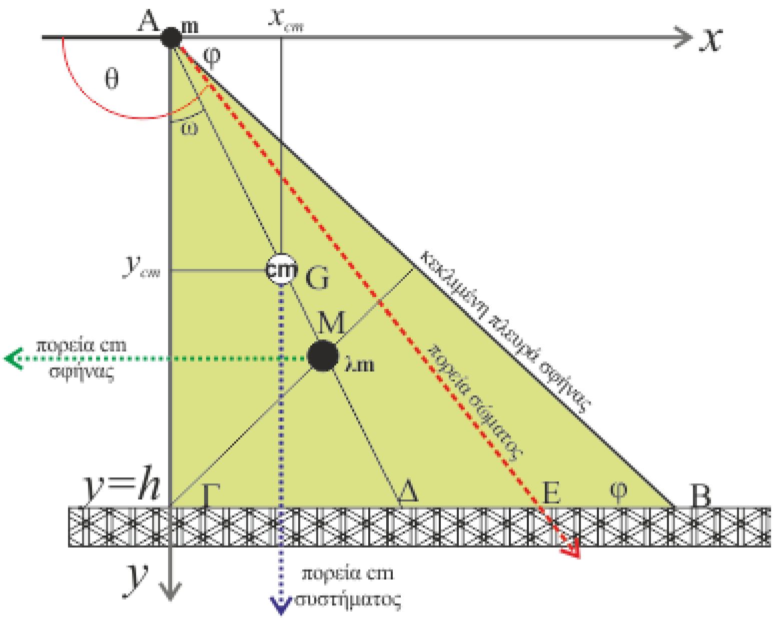
$$x_{cm}=(AG)\sin\omega=\frac{\lambda}{\lambda+1}\frac{\sqrt{1+3\sin^2\varphi}}{3\sin\varphi}h\frac{\cos\varphi}{\sqrt{1+3\sin^2\varphi}}=\frac{\lambda\cot\varphi}{3(\lambda+1)}h\rightarrow x_{cm}=\frac{\lambda\cot\varphi}{3(\lambda+1)}h$$

$$\acute{\eta}\ x_{cm}=\frac{\lambda x_1+x_2}{\lambda+1}=\frac{\lambda\frac{1}{3\tan\varphi}}{\lambda+1}=x_{cm}=\frac{\lambda\cot\varphi}{3(\lambda+1)}h$$

$$y_{cm}=(AG)\cos\omega=\frac{\lambda}{\lambda+1}\frac{\sqrt{1+3\sin^2\varphi}}{3\sin\varphi}h\frac{2\sin\varphi}{\sqrt{1+3\sin^2\varphi}}=\frac{2\lambda}{3(\lambda+1)}h\rightarrow y_{cm}=\frac{2\lambda}{3(\lambda+1)}h$$

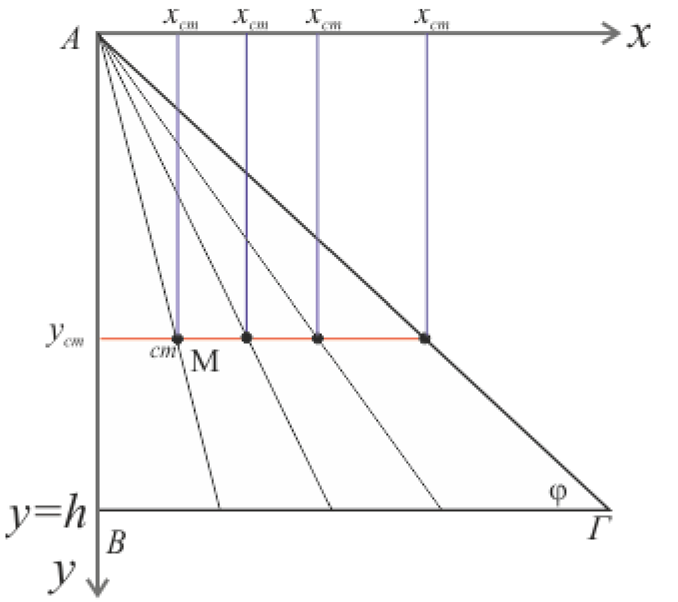
$$\acute{\eta}\ y_{cm}=\frac{\lambda y_1+y_2}{\lambda+1}=\frac{\lambda}{\lambda+1}\frac{2}{3}h=\frac{2\lambda}{3(\lambda+1)}h$$

$$(x_{cm},\ y_{cm})=\left(\frac{\lambda\cot\varphi}{3(\lambda+1)}h,\ \frac{2\lambda}{3(\lambda+1)}h\right)$$



Σχήμα 21: Η ΑΔ είναι διάμεσος του τριγώνου και αν η σφήνα είναι ομογενές σώμα το κέντρο μάζας της Μ απέχει από το Α τα $2/3$ της ΑΔ. Το κέντρο μάζας του συστήματος G απέχει από το Α τα $\lambda/(\lambda+1)$ του ΑΜ, δηλ. το $2\lambda/3(\lambda+1)$ της ΑΔ.

Από τη σχέση υπολογισμού της τεταγμένης του κέντρου μάζας $y_{cm} = \dfrac{2\lambda}{3(\lambda+1)}h$ συνεπάγεται ότι δεν εξαρτάται από την κλίση φ. Αυτό δικαιολογείται με το Θεώρημα του Θαλή. Έτσι αν (βλέπε Σχήμα 22) το Μ αποτελεί το σημείο τομής των διαμέσων ενός τριγώνου, οπότε χωρίζεται από το Μ σε λόγο 2/3, τότε οποιοδήποτε ευθύγραμμο τμήμα (δυνητικά διάμεσος τυχαίου τριγώνου) με αρχή την κορυφή Α και τέλος στην οριζόντια πλευρά του τριγώνου θα χωρίζεται από την ευθεία που φέρεται στο ύψος του Μ παράλληλα προς την οριζόντια πλευρά του τριγώνου, επίσης, σε λόγο 2/3. Η τετμημένη του $x_{cm} = \dfrac{\lambda \cot\varphi}{3(\lambda+1)}h$ επηρεάζεται από τη φ (όσο μικρότερη η φ τόσο μεγαλύτερη η τετμημένη του).



Σχήμα 22: Η τεταγμένη του κέντρου μάζας της σφήνας (σημείο τομής των διαμέσων) βρίσκεται πάντα στο ίδιο ύψος, ανεξάρτητη δηλ. της κλίσης φ. Κατ' επέκταση και το κέντρο μάζας του συστήματος, που κατ' ανάγκη είναι σημείο του πάνω τμήματος της διαμέσου και τη χωρίζει σε λόγο 1:λ, θα έχει τεταγμένη που δεν θα εξαρτάται από τη φ.

Οι συντεταγμένες όταν το σώμα θα έχει κατέλθει κατά y_2 θα είναι:

$$x_1 = \frac{\cot\varphi}{3}h - \frac{\cot\varphi}{\lambda+1}y_2 = \cot\varphi\left(\frac{h}{3} - \frac{1}{\lambda+1}y_2\right), \quad y_1 = \frac{2}{3}h$$

$$x_2 = \frac{\lambda\cot\varphi}{\lambda+1}y_2, \quad y_2$$

$$x_{cm} = \frac{\lambda x_1 + x_2}{\lambda+1} = \frac{\lambda\cot\varphi\left(\frac{h}{3} - \frac{1}{\lambda+1}y_2\right) + \frac{\lambda\cot\varphi}{\lambda+1}y_2}{\lambda+1} = \frac{\lambda\cot\varphi}{3(\lambda+1)}h = \text{σταθ.}\ (\text{αναμενόμενο})$$

$$y_{cm} = \frac{\lambda y_1 + y_2}{\lambda+1} = \frac{\frac{2}{3}\lambda h + y_2}{\lambda+1}$$

Ομοίως η y_{cm}, ως η μέση σταθμισμένη τιμή των κατακόρυφων αποστάσεων των δύο σωμάτων από τον οριζόντια άξονα των x με στατιστικό βάρος τις μάζες των δύο σωμάτων, δεν θα επηρεάζεται από τη φ κατά την κίνηση του σώματος επί της κεκλιμένης πλευράς της σφήνας (το κέντρο μάζας της σφήνας, με δεδομένο ύψος h, απέχει σταθερή απόσταση $y_1 = \frac{2}{3}h$ από τον άξονα, ενώ του σώματος y_2 αυξάνεται μέχρι την τιμή h).

Και οι τελικές τιμές (όταν $y_2 = h$) θα είναι:

$$x_1 = \cot\varphi\left(\frac{h}{3} - \frac{1}{\lambda+1}h\right) = \frac{(\lambda-2)\cot\varphi}{3(\lambda+1)}h,\ y_1 = \frac{2}{3}h$$

$$x_2 = \frac{\lambda\cot\varphi}{\lambda+1}h,\ y_2 = h$$

$$x_{cm} = \frac{\lambda\cot\varphi}{3(\lambda+1)}h = \text{σταθ.}\ (\text{αναμενόμενο}),\ y_{cm} = \frac{\frac{2}{3}\lambda h + h}{\lambda+1} = \frac{2\lambda+3}{3(\lambda+1)}h$$

Από την πρώτη σχέση της x_1 συνεπάγεται ότι αν το λ είναι μικρότερο από 2, τότε το κέντρο μάζας της σφήνας, με την ολοκλήρωση της κίνησης ($y_2 = h$), θα βρεθεί αριστερά του άξονα των y (με λ=2 θα βρεθεί πάνω στον άξονα).

Εφαρμογή

$$\lambda = 3,\ \varphi{=}45^0,\ y_2 = h \rightarrow \left\{\begin{array}{l} (x_1,\ y_1) = \left(\frac{1}{12}h,\ \frac{2}{3}h\right) \\ (x_2,\ y_2) = \left(\frac{3}{4}h,\ h\right) \\ (x_{cm},\ y_{cm}) = \left(\frac{1}{4}h,\ \frac{3}{4}h\right) \end{array}\right\}$$

Το κέντρο μάζας του συστήματος θα κινείται κατά μήκος της κατακορύφου που διέρχεται από την αρχική του θέση $G\left(x_{cm} = \frac{1}{4}h = \text{σταθ.},\ y_{cm} = \frac{1}{2}h\right)$.

Σημείωση: Ως μεταβλητή y στα προηγούμενα νοείται η τεταγμένη του σώματος y_2.

ΠΑΡΆΡΤΗΜΑ (ΚΈΝΤΡΟ ΜΆΖΑΣ ΛΕΠΤΟΎ ΤΡΙΓΩΝΙΚΟΎ ΟΜΟΓΕΝΟΎΣ ΣΤΕΡΕΟΎ)

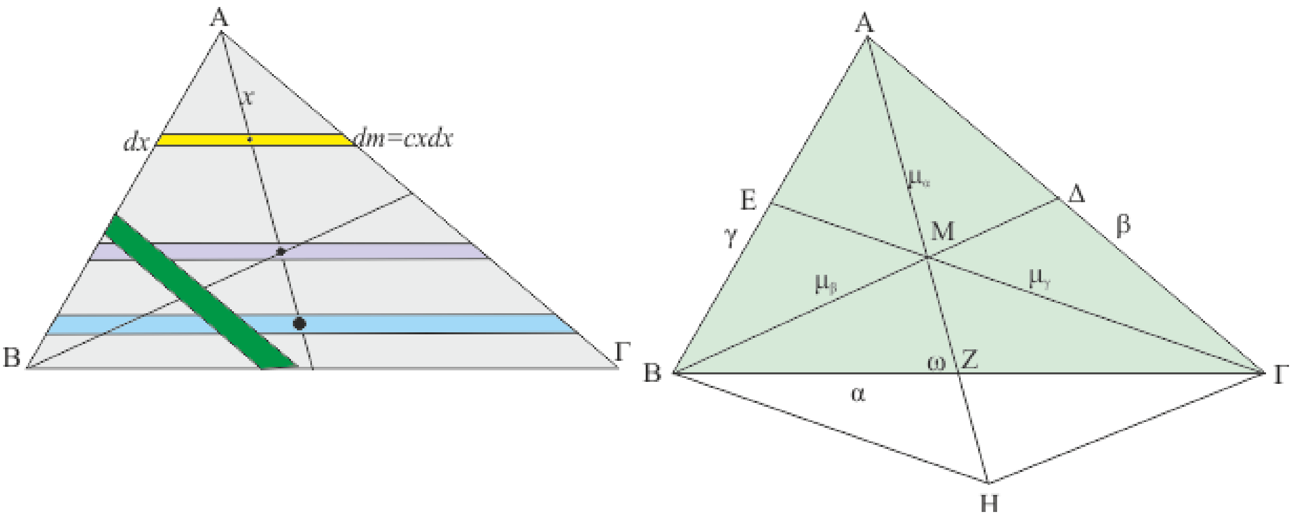
Αλγεβρικός Προσδιορισμός

Αν χωρίσουμε το τρίγωνο σε οριζόντιες λωρίδες (παράλληλες προς τη ΒΓ, Σχήμα 23 αριστερά), τότε η διάμεσος από την κορυφή Α διχοτομεί όλες της λωρίδες (Θεώρημα Θαλή), οπότε το κέντρο μάζας κάθε λωρίδας και στο σύνολο της τριγωνικής σφήνας θα βρίσκεται πάνω στη διάμεσο αυτή. Με όμοια λογική πρέπει να βρίσκεται και στη διάμεσο που αντιστοιχεί στην κορυφή Β. Συνεπώς θα είναι το σημείο τομής των διαμέσων.

Τα μήκη κάθε λωρίδας, και συνεπώς το εμβαδόν (μάζα) της με πάχος dx, θα είναι ευθέως ανάλογη του μήκους x του τμήματος της διαμέσου που την ενώνει με την κορυφή Α (ο λόγος ομοιότητας των

τριγώνων ισχύει για όλες τις αντίστοιχες πλευρές του). Έτσι το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση του κέντρου μάζας μιας ράβδου μήκους ίσο με το μήκος της διαμέσου και πυκνότητα ανάλογη της απόστασης της περιοχής της ράβδου από την μια άκρη της. Άρα:

$$M=\int_0^{\mu}dm=\int_0^{\mu}cxdx=c\frac{\mu^2}{2}\rightarrow c=\frac{2M}{\mu^2} \quad \text{και} \quad x_{cm}=\frac{\int_0^{\mu}xdm}{M}=\frac{\int_0^{\mu}x\cdot cxdx}{M}=\frac{\frac{2M}{\mu^2}}{M}\frac{\mu^3}{3}=\frac{2}{3}\mu \, .$$



Σχήμα 23: Προσδιορισμός κέντρου μάζας τριγωνικού λεπτού σώματος

Γεωμετρικός Προσδιορισμός (Βαρύκεντρο Τριγώνου)

Θεώρημα διαμέσων (Σχήμα 23 δεξιά)

- Αν ΑΔ διάμεσος, τότε από το νόμο συνημίτονων (γενίκευση πυθαγόρειου θεωρήματος) παίρνουμε

$$\left.\begin{cases} \triangle \mathrm{AB\Delta}\rightarrow \gamma^2=\mu_\alpha^2+\dfrac{\alpha^2}{4}-2\mu_\alpha\dfrac{\alpha}{2}\cos\omega \\ \triangle \mathrm{A\Gamma\Delta}\rightarrow \beta^2=\mu_\alpha^2+\dfrac{\alpha^2}{4}-2\mu_\alpha\dfrac{\alpha}{2}\cos\left(180^0-\omega\right) \end{cases}\right\}\rightarrow \beta^2+\gamma^2=2\mu_\alpha^2+\frac{\alpha^2}{2}$$

- Έστω ΒΔ και ΓΕ διάμεσοι και Μ το σημείο τομής τους. Φέρουμε την ΑΜ και την προεκτείνουμε κατά ίσο ευθύγραμμο τμήμα ΜΗ που τέμνει τη ΒΓ στο Ζ. Ενώνουμε το Η με τα Β και Γ.

  Στο τρίγωνο ΑΗΓ η ΜΔ (ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών του) είναι παράλληλη και ίση με το μισό της ΓΗ. Ομοίως και η ΜΕ με τη ΒΗ. Συνεπώς, το τετράπλευρο ΒΜΓΗ είναι παραλληλόγραμμο, οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, το Ζ είναι το μέσο της ΒΓ, οπότε η ΑΖ είναι η τρίτη διάμεσος (δηλ. περνά από το σημείο τομής των άλλων δύο) και MZ= ½ ZH= ½ AM (δηλ. το M απέχει από το A τα 2/3 της αντίστοιχης διαμέσου AZ).