Câu 40. **[2H3-2.7-4] (THPT Kinh Môn-Hải Dương lần 1 năm 2017-2018)** Trong không gian $Oxyz$ cho các mặt phẳng $(P): x-y+2z+1=0$, $(Q): 2x+y+z-1=0$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm thuộc trục hoành, đồng thời (S) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 2 và (S) cắt mặt phẳng (Q) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng r. Xác định r sao cho chỉ có đúng một mặt cầu (S) thỏa yêu cầu.

A. $r=\sqrt{3}$. **B.** $r=\sqrt{\frac{3}{2}}$. **C.** $r=\sqrt{2}$. **D.** $r=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn D.

Gọi $I(m;0;0)$ là tâm mặt cầu có bán kính R, d_1, d_2 là các khoảng cách từ I đến (P) và (Q). Ta có $d_1=\frac{|m+1|}{\sqrt{6}}$ và $d_2=\frac{|2m-1|}{\sqrt{6}}$

Theo đề ta có $\sqrt{d_1^2+4}=\sqrt{d_2^2+r^2} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{m^2+2m+1}{6}+4}=\sqrt{\frac{4m^2-4m+1}{6}+r^2}$

$\Leftrightarrow m^2-2m+2r^2-8=0$ (1).

Yêu cầu bài toán tương đương phương trình (1) có đúng một nghiệm m $\Leftrightarrow 1-(2r^2-8)=0$

$\Leftrightarrow r^2=\frac{9}{2} \Leftrightarrow r=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 48. **[2H3-2.7-4] (SGD Phú Thọ – lần 1 - năm 2017 – 2018)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=9$ và điểm $A(1;1;-1)$. Ba mặt phẳng thay đổi đi qua điểm A và đôi một vuông góc với nhau, cắt (S) theo giao tuyến là ba đường tròn. Tổng diện tích của hình tròn đó bằng

A. 12π. **B.** 3π. **C.** 22π. **D.** 11π.

Lời giải

Chọn C.

Ba mặt phẳng $(P): x=1$, $(Q): y=1$ và $(R): z=-1$ đều đi qua điểm A và đôi một vuông góc với nhau, cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến lần lượt là các đường tròn $(C_1),(C_2)$ và (C_3).

Trong mặt phẳng (P), đường tròn $(C_1):(y-1)^2+(z+2)^2=5 \Rightarrow R_1=\sqrt{5}$

Trong mặt phẳng (Q), đường tròn $(C_2):(x+1)^2+(z+2)^2=9 \Rightarrow R_2=3$

Trong mặt phẳng (R), đường tròn $(C_3):(x+1)^2+(y-1)^2=8 \Rightarrow R_3=2\sqrt{2}$

Tổng diện tích ba hình tròn (C_1), (C_2) và (C_3) là $S=\pi(R_1^2+R_2^2+R_3^2)=22\pi$.

Câu 43: **[2H3-2.7-4] (THPT Đặng Thúc Hứa – Nghệ An - năm 2017-2018)** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;0;1)$, $C(-2;2;3)$. Đường thẳng Δ qua trực

tâm H của tam giác ABC và nằm trong mặt phẳng (ABC) cùng tạo với các đường thẳng AB, AC một góc $\alpha < 45^\circ$ có một véctơ chỉ phương là $\vec{u}(a;b;c)$ với c là một số nguyên tố. Giá trị của biểu thức $ab+bc+ca$ bằng

A. -67. **B.** 23. **C.** -33. **D.** -37.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-2;2)$, $\overrightarrow{AC}=(-3;0;4)$.

(ABC) có véctơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(8;10;6)=2(4;5;3)$

$\Rightarrow (ABC)$: $4x+5y+3z-11=0$.

Do $\Delta \subset (ABC) \Rightarrow \vec{u}.\vec{n}=0 \Rightarrow 4a+5b+3c=0$.

Ta có $\cos\alpha=\dfrac{|a-2b+2c|}{3.\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\dfrac{|-3a+4c|}{5.\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \Leftrightarrow 5|a-2b+2c|=3|-3a+4c|$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}5a-10b+10c=-9a+12c\\5a-10b+10c=9a-12c\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}7a-5b-c=0\\2a+5b-11c=0\end{array}\right.$

TH1: $\begin{cases}7a-5b-c=0\\4a+5b+3c=0\end{cases} \Rightarrow 11a+2c=0 \Rightarrow c=-\dfrac{11a}{2}$, do c là số nguyên tố nên chọn $a=-2$, $c=11$, $b=-5 \Rightarrow ab+bc+ca=10-55-22=-67$.

TH2: $\begin{cases}2a+5b-11c=0\\4a+5b+3c=0\end{cases} \Rightarrow 2a+14c=0 \Rightarrow c=-\dfrac{a}{7}$, do c là số nguyên tố nên chọn $a=-14$, $c=2$, $b=10$ (loại) do $\cos\alpha=\dfrac{|a-2b+2c|}{3.\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\dfrac{30}{3.10\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha > 45^\circ$.

Câu 47: **[2H3-2.7-4] (CHUYÊN LAM SƠN THANH HÓA-LẦN 2-2018)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho các điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;3)$, $D(2;-2;0)$. Có tất cả bao nhiêu mặt phẳng phân biệt đi qua 3 trong 5 điểm O, A, B, C, D?

A. 7. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 10.

Lời giải

Chọn B

Ta thấy A, B, C lần lượt thuộc các trục tọa độ Ox, Oy, Oz. Phương trình mặt phẳng (ABC) là: $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=1$. Rõ ràng $D \in (ABC)$.

Ta cũng có $\overrightarrow{AB}=(-1;2;0)$ và $\overrightarrow{AD}=(1;-2;0)$ nên $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AD}$, suy ra D nằm trên đường thẳng AB.

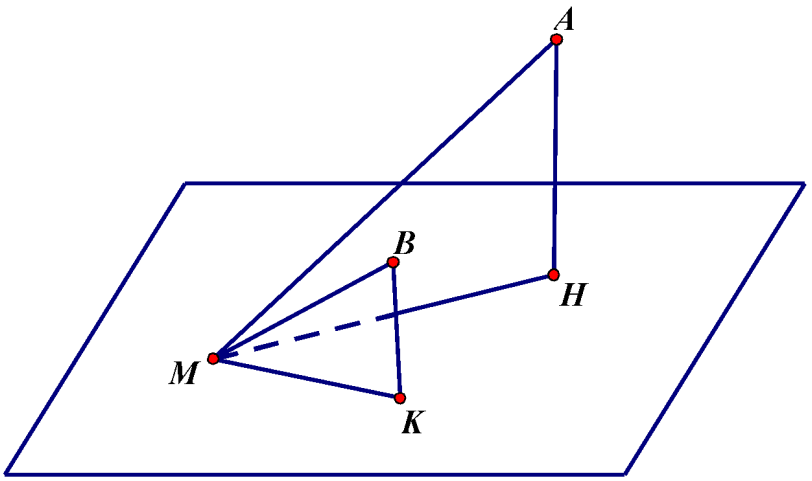
Bởi vậy, có 5 mặt phẳng phân biệt đi qua 3 trong 5 điểm O, A, B, C, D là (OAB), (OBC), (OAC), (ABC) và (OCD).

Câu 47: **[2H3-2.7-4] (CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH -LẦN 1-2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(10;6;-2)$, $B(5;10;-9)$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x+2y+z-12=0$. Điểm M di động trên (α) sao cho MA, MB luôn tạo với (α) các góc bằng nhau. Biết rằng M luôn thuộc một đường tròn D cố định. Hoành độ của tâm đường tròn (ω) bằng

A. -4. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** 2. **D.** 10.

Lời giải

Chọn C.



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B trên mặt phẳng (α), khi đó:

$$AH = d(A;(\alpha)) = \frac{|2.10+2.6+(-2)-12|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = 6;$$

$$BK = d(B;(\alpha)) = \frac{|2.5+2.10+(-9)-12|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = 3.$$

Vì MA, MB với (α) các góc bằng nhau nên $\widehat{AMH} = \widehat{BMK}$. Từ $AH = 2BK$ suy ra $MA = 2MB$.

Gọi $M(x;y;z)$, ta có:

$MA = 2MB \Leftrightarrow MA^2 = 4MB^2$

$\Leftrightarrow (x-10)^2+(y-6)^2+(z+2)^2 = 4\left[(x-5)^2+(y-10)^2+(z+9)^2\right]$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-\frac{20}{3}x-\frac{68}{3}y+\frac{68}{3}z+228=0$.

Như vậy, điểm M nằm trên mặt cầu (S) có tâm $I\left(\frac{10}{3};\frac{34}{3};-\frac{34}{3}\right)$ và bán kính $R = 2\sqrt{10}$.

Do đó, đường tròn D là giao của mặt cầu (S) và mặt phẳng (α), nên tâm J của đường tròn D là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng (α).

Phương trình đường thẳng d đi qua I và vuông góc với mặt phẳng (α) là: $\begin{cases} x=\frac{10}{3}+2t \\ y=\frac{34}{3}+2t \\ z=-\frac{34}{3}+t \end{cases}$.

Tọa độ điểm J là nghiệm $(x;y;z)$ của hệ phương trình: $\begin{cases} x=\frac{10}{3}+2t \\ y=\frac{34}{3}+2t \\ z=-\frac{34}{3}+t \\ 2x+2y+z-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=10 \\ z=-\frac{38}{3} \\ t=-\frac{2}{3} \end{cases}$.

Vậy $J=\left(2;10;-\frac{38}{3}\right)$.

Câu 45: **[2H3-2.7-4] (SỞ GD-ĐT HÀ NỘI -2018)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S_1) có tâm $I(2;1;1)$ có bán kính bằng 4 và mặt cầu (S_2) có tâm $J(2;1;5)$ có bán kính bằng 2. (P) là mặt phẳng thay đổi tiếp xúc với hai mặt cầu (S_1), (S_2). Đặt M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của khoảng cách từ điểm O đến (P). Giá trị $M+m$ bằng

A. $\sqrt{15}$. **B.** $8\sqrt{3}$. **C.** 9. **D.** 8.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Giả sử (P) tiếp xúc với (S_1), (S_2) lần lượt tại A và B.

Gọi $IJ\cap(P)=M$. Do $\frac{IA}{JB}=\frac{MI}{MJ}=2$ nên J là trung điểm của IM. Suy ra $M(2;1;9)$.

Gọi $\vec{n}=(a;b;c)$ với $a^2+b^2+c^2\neq 0$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

Ta có: $(P): a(x-2)+b(y-1)+c(z-9)=0$.

Và: $\begin{cases} d(I,(P))=R_1 \\ d(J,(P))=R_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow a^2+b^2=3c^2 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=3 \quad (1)$.

Ta có: $d(O,(P))=\frac{|2a+b+9c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|2a+b+9c|}{2|c|}=\frac{1}{2}\left|\frac{2a}{c}+\frac{b}{c}+9\right|$.

Đặt $t=\frac{2a}{c}+\frac{b}{c} \Leftrightarrow \frac{b}{c}=t-\frac{2a}{c}$. Ta có: $d(O,(P))=\frac{1}{2}|t+9|$.

Thay $\frac{b}{c}=t-\frac{2a}{c}$ vào (1), ta được $\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(t-\frac{2a}{c}\right)^2=3 \Leftrightarrow 5\left(\frac{a}{c}\right)^2-4.\frac{a}{c}.t+t^2-3=0$.

Để phương trình có nghiệm với ẩn $\frac{a}{c}$ thì $4t^2-5t^2+15\ge 0 \Leftrightarrow -\sqrt{15}\le t\le \sqrt{15}$

$\Leftrightarrow 0<9-\sqrt{15}\le t+9\le 9+\sqrt{15} \Rightarrow \frac{9-\sqrt{15}}{2}\le d\left(O,(P)\right)\le \frac{9+\sqrt{15}}{2}$.

$\Rightarrow M=\frac{9+\sqrt{15}}{2}$ và $m=\frac{9-\sqrt{15}}{2}$. Vậy $M+m=9$.