

Câu 40. [2H3-2.7-4] (THPT Kinh Môn-Hải Dương lần 1 năm 2017-2018) Trong không gian $Oxyz$ cho các mặt phẳng $(P): x - y + 2z + 1 = 0$, $(Q): 2x + y + z - 1 = 0$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm thuộc trục hoành, đồng thời (S) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 2 và (S) cắt mặt phẳng (Q) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng r . Xác định r sao cho chỉ có đúng một mặt cầu (S) thỏa yêu cầu.

- A. $r = \sqrt{3}$. B. $r = \sqrt{\frac{3}{2}}$. C. $r = \sqrt{2}$. D. $r = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn D.

Gọi $I(m; 0; 0)$ là tâm mặt cầu có bán kính R , d_1 , d_2 là các khoảng cách từ I đến (P) và (Q) . Ta có $d_1 = \frac{|m+1|}{\sqrt{6}}$ và $d_2 = \frac{|2m-1|}{\sqrt{6}}$

$$\text{Theo đề ta có } \sqrt{d_1^2 + 4} = \sqrt{d_2^2 + r^2} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{m^2 + 2m + 1}{6} + 4} = \sqrt{\frac{4m^2 - 4m + 1}{6} + r^2}$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2m + 2r^2 - 8 = 0 \quad (1)$$

Yêu cầu bài toán tương đương phương trình (1) có đúng một nghiệm $m \Leftrightarrow 1 - (2r^2 - 8) = 0$

$$\Leftrightarrow r^2 = \frac{9}{2} \Leftrightarrow r = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Câu 48. [2H3-2.7-4] (SGD Phú Thọ – lần 1 - năm 2017 – 2018) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9$ và điểm $A(1; 1; -1)$. Ba mặt phẳng thay đổi đi qua điểm A và đôi một vuông góc với nhau, cắt (S) theo giao tuyến là ba đường tròn. Tổng diện tích của hình tròn đó bằng

- A. 12π . B. 3π . C. 22π . D. 11π .

Lời giải

Chọn C.

Ba mặt phẳng $(P): x = 1$, $(Q): y = 1$ và $(R): z = -1$ đều đi qua điểm A và đôi một vuông góc với nhau, cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến lần lượt là các đường tròn $(C_1), (C_2)$ và (C_3) .

Trong mặt phẳng (P) , đường tròn $(C_1): (y-1)^2 + (z+2)^2 = 5 \Rightarrow R_1 = \sqrt{5}$

Trong mặt phẳng (Q) , đường tròn $(C_2): (x+1)^2 + (z+2)^2 = 9 \Rightarrow R_2 = 3$

Trong mặt phẳng (R) , đường tròn $(C_3): (x+1)^2 + (y-1)^2 = 8 \Rightarrow R_3 = 2\sqrt{2}$

Tổng diện tích ba hình tròn (C_1) , (C_2) và (C_3) là $S = \pi(R_1^2 + R_2^2 + R_3^2) = 22\pi$.

Câu 43: [2H3-2.7-4] (THPT Đặng Thúc Hứa – Nghệ An - năm 2017-2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; -1)$, $B(2; 0; 1)$, $C(-2; 2; 3)$. Đường thẳng Δ qua trục

tâm H của tam giác ABC và nằm trong mặt phẳng (ABC) cùng tạo với các đường thẳng AB, AC một góc $\alpha < 45^\circ$ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}(a;b;c)$ với c là một số nguyên tố. Giá trị của biểu thức $ab+bc+ca$ bằng

A. -67 .

B. 23 .

C. -33 .

D. -37 .

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\vec{AB} = (1; -2; 2)$, $\vec{AC} = (-3; 0; 4)$.

(ABC) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = [\vec{AB}, \vec{AC}] = (8; 10; 6) = 2(4; 5; 3)$

$\Rightarrow (ABC): 4x + 5y + 3z - 11 = 0$.

Do $\Delta \subset (ABC) \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow 4a + 5b + 3c = 0$.

Ta có $\cos \alpha = \frac{|a - 2b + 2c|}{3\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|-3a + 4c|}{5\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \Leftrightarrow 5|a - 2b + 2c| = 3|-3a + 4c|$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5a - 10b + 10c = -9a + 12c \\ 5a - 10b + 10c = 9a - 12c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7a - 5b - c = 0 \\ 2a + 5b - 11c = 0 \end{cases}$$

TH1: $\begin{cases} 7a - 5b - c = 0 \\ 4a + 5b + 3c = 0 \end{cases} \Rightarrow 11a + 2c = 0 \Rightarrow c = -\frac{11a}{2}$, do c là số nguyên tố nên chọn $a = -2$, $c = 11$, $b = -5 \Rightarrow ab + bc + ca = 10 - 55 - 22 = -67$.

TH2: $\begin{cases} 2a + 5b - 11c = 0 \\ 4a + 5b + 3c = 0 \end{cases} \Rightarrow 2a + 14c = 0 \Rightarrow c = -\frac{a}{7}$, do c là số nguyên tố nên chọn

$$a = -14, c = 2, b = 10 \text{ (loại) do } \cos \alpha = \frac{|a - 2b + 2c|}{3\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{30}{3 \cdot 10\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha > 45^\circ.$$

Câu 47: [2H3-2.7-4] (CHUYÊN LAM SƠN THANH HÓA-LẦN 2-2018) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho các điểm $A(1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 3)$, $D(2; -2; 0)$. Có tất cả bao nhiêu mặt phẳng phân biệt đi qua 3 trong 5 điểm O, A, B, C, D ?

A. 7.

B. 5.

C. 6.

D. 10.

Lời giải

Chọn B

Ta thấy A, B, C lần lượt thuộc các trục tọa độ Ox, Oy, Oz . Phương trình mặt phẳng

(ABC) là: $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$. Rõ ràng $D \in (ABC)$.

Ta cũng có $\vec{AB} = (-1; 2; 0)$ và $\vec{AD} = (1; -2; 0)$ nên $\vec{AB} = -\vec{AD}$, suy ra D nằm trên đường thẳng AB .

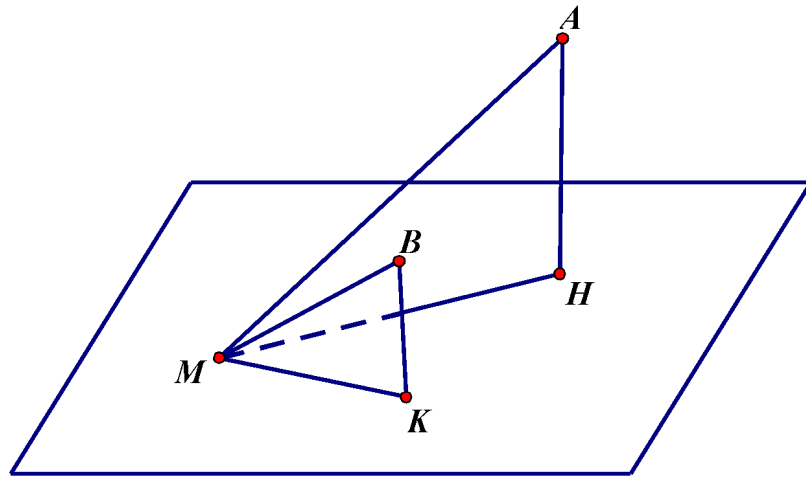
Bởi vậy, có 5 mặt phẳng phân biệt đi qua 3 trong 5 điểm O, A, B, C, D là (OAB) , (OBC) , (OAC) , (ABC) và (OCD) .

Câu 47: [2H3-2.7-4] (CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH -LẦN 1-2018) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(10;6;-2)$, $B(5;10;-9)$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x+2y+z-12=0$. Điểm M di động trên (α) sao cho MA , MB luôn tạo với (α) các góc bằng nhau. Biết rằng M luôn thuộc một đường tròn D cố định. Hoành độ của tâm đường tròn (ω) bằng

- A. -4 . B. $\frac{9}{2}$. C. 2 . D. 10 .

Lời giải

Chọn C.



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B trên mặt phẳng (α) , khi đó:

$$AH = d(A; (\alpha)) = \frac{|2 \cdot 10 + 2 \cdot 6 + (-2) - 12|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = 6;$$

$$BK = d(B; (\alpha)) = \frac{|2 \cdot 5 + 2 \cdot 10 + (-9) - 12|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = 3.$$

Vì MA , MB với (α) các góc bằng nhau nên $\angle AMH = \angle BMK$. Từ $AH = 2BK$ suy ra $MA = 2MB$.

Gọi $M(x; y; z)$, ta có:

$$MA = 2MB \Leftrightarrow MA^2 = 4MB^2$$

$$\Leftrightarrow (x-10)^2 + (y-6)^2 + (z+2)^2 = 4[(x-5)^2 + (y-10)^2 + (z+9)^2]$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - \frac{20}{3}x - \frac{68}{3}y + \frac{68}{3}z + 228 = 0.$$

Như vậy, điểm M nằm trên mặt cầu (S) có tâm $I\left(\frac{10}{3}; \frac{34}{3}; -\frac{34}{3}\right)$ và bán kính $R = 2\sqrt{10}$.

Do đó, đường tròn D là giao của mặt cầu (S) và mặt phẳng (α) , nên tâm J của đường tròn D là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng (α) .

Phương trình đường thẳng d đi qua I và vuông góc với mặt phẳng (α) là:

$$\begin{cases} x = \frac{10}{3} + 2t \\ y = \frac{34}{3} + 2t \\ z = -\frac{34}{3} + t \end{cases}$$

Tọa độ điểm J là nghiệm $(x; y; z)$ của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = \frac{10}{3} + 2t \\ y = \frac{34}{3} + 2t \\ z = -\frac{34}{3} + t \\ 2x + 2y + z - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 10 \\ z = -\frac{38}{3} \\ t = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Vậy $J = \left(2; 10; -\frac{38}{3}\right)$.

- Câu 45:** [2H3-2.7-4] (SỞ GD-ĐT HÀ NỘI -2018) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S_1) có tâm $I(2;1;1)$ có bán kính bằng 4 và mặt cầu (S_2) có tâm $J(2;1;5)$ có bán kính bằng 2. (P) là mặt phẳng thay đổi tiếp xúc với hai mặt cầu (S_1) , (S_2) . Đặt M , m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của khoảng cách từ điểm O đến (P) . Giá trị $M + m$ bằng
- A. $\sqrt{15}$. B. $8\sqrt{3}$. C. 9 . D. 8 .

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Giả sử (P) tiếp xúc với (S_1) , (S_2) lần lượt tại A và B .

Gọi $IJ \cap (P) = M$. Do $\frac{IA}{JB} = \frac{MI}{MJ} = 2$ nên J là trung điểm của IM . Suy ra $M(2;1;9)$.

Gọi $\vec{n} = (a; b; c)$ với $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ là vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

Ta có: $(P): a(x-2) + b(y-1) + c(z-9) = 0$.

Và: $\begin{cases} d(I, (P)) = R_1 \\ d(J, (P)) = R_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 3c^2 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 3 \quad (1)$.

Ta có: $d(O, (P)) = \frac{|2a + b + 9c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|2a + b + 9c|}{2|c|} = \frac{1}{2} \left| \frac{2a}{c} + \frac{b}{c} + 9 \right|$.

Đặt $t = \frac{2a}{c} + \frac{b}{c} \Leftrightarrow \frac{b}{c} = t - \frac{2a}{c}$. Ta có: $d(O, (P)) = \frac{1}{2} |t + 9|$.

Thay $\frac{b}{c} = t - \frac{2a}{c}$ vào (1), ta được $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(t - \frac{2a}{c}\right)^2 = 3 \Leftrightarrow 5\left(\frac{a}{c}\right)^2 - 4\frac{a}{c}t + t^2 - 3 = 0$.

Để phương trình có nghiệm với ẩn $\frac{a}{c}$ thì $4t^2 - 5t^2 + 15 \geq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{15} \leq t \leq \sqrt{15}$

$$\Leftrightarrow 0 < 9 - \sqrt{15} \leq t + 9 \leq 9 + \sqrt{15} \Rightarrow \frac{9 - \sqrt{15}}{2} \leq d(O, (P)) \leq \frac{9 + \sqrt{15}}{2}.$$

$$\Rightarrow M = \frac{9 + \sqrt{15}}{2} \quad \text{và} \quad m = \frac{9 - \sqrt{15}}{2}. \text{ Vậy } M + m = 9.$$