

Partie I - Préliminaires

I.A - Étude de l'atmosphère

IA.1) Modèle isotherme: $dP_{\text{atm}} = -\rho g dz$ $\Rightarrow P_{\text{atm}} = P_0 \exp(-Mgz/RT_0)$

IA.2) Taylor de $P(z)$ au voisinage de z_0 :

$$P_{\text{atm}} = P_0 \exp(-Mgz_0/RT_0) + P_0(z - z_0) \left(-Mg/RT_0 \exp(-Mgz_0/RT_0) \right)_{z=z_0}$$

En posant $P_A = P_0 \exp(-Mgz_0/RT_0)$ et $\alpha = \frac{Mg}{RT_0} P_A$ on a bien $P_{\text{atm}} = P_A - \alpha(z - z_0)$

A-N: $P_A = 91 \times 10^3 \text{ Pa}$ et $\alpha = 10,7 \text{ Pa.m}^{-1}$.

I.B - Étude de l'écoulement dans un capillaire

I.B.1) équation de continuité + isovolume: $\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow v_z$ dépend seulement de r en régime stationnaire.

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad } P + \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v}$$

I.B.2a) Il s'agit plutôt de l'équation de Navier Stokes:

Or $\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} = 0 + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \mathbf{e}_z = 0$, la pesanteur est négligée, il reste: $\text{grad } P = \eta \Delta \mathbf{v}$

En projetant sur la direction radiale on obtient (1) et sur la direction axiale on obtient (2).

b) L'équation (1) indique que P n'est fonction que de z . L'équation (2) égalise donc une fonction de z avec une fonction de r . Les variables r et z étant indépendantes, ceci n'est possible que si chaque membre de

l'égalité (2) est une constante: $\frac{dP}{dz} = C^{\text{te}}$. $P(z)$ est donc une fonction affine pour laquelle la dérivée est égale

au taux d'accroissement. Soit $\frac{dP}{dz} = \frac{P_s - P_e}{L} = -\frac{\Delta P}{L}$

$$v_z(r) = -\frac{\Delta P}{L} \frac{r^2}{4\eta} + C_1 \ln r + C_2$$

c) L'équation (2) s'intègre selon :

La vitesse doit être définie partout, y compris pour $r = 0$ (sur l'axe Oz) donc il faut prendre $C_1 = 0$.

Sur la paroi fixe il faut vérifier : $v_z(a) = 0$ soit $v_z(r) = \frac{\Delta P(a^2 - r^2)}{4\eta L}$ (profil parabolique)

I.B.3) Le débit volumique s'écrit $D_V = \int_0^a v_z(r) 2\pi r dr$ ce qui donne : $D_V = \frac{\pi \Delta P a^4}{8\eta L}$ donc $\beta = \frac{\pi a^4}{8\eta L}$

A-N: $\beta = 2,65 \times 10^{-8} \text{ m}^4 \cdot \text{s} \cdot \text{kg}^{-1}$

I.B.4) Il faut calculer le nombre de Reynolds de l'écoulement donné par : $R_e = \frac{\rho v a}{\eta}$

On peut prendre pour valeur caractéristique de la vitesse la valeur sur l'axe soit $v = \frac{\Delta P a^2}{4\eta L}$

On obtient ainsi : $R_e = \frac{\rho \Delta P a^3}{4\eta^2 L}$. Pour un écoulement laminaire il faut $R_e < 2000$

La valeur maximale de la dépression est alors $\Delta P_{\text{max}} = \frac{8000\eta^2 L}{\rho a^3}$ soit $\approx 800 \text{ Pa}$.

Partie II - Variomètre à tube capillaire

II.A.1) En vol horizontal il n'y a pas d'écoulement dans le capillaire, donc $\Delta P = P_{\text{int}} - P_{\text{atm}} = 0$.

II.A.2) L'air est parfait: $n_{\text{int}} = \frac{P_{\text{int}} V_0}{RT_0}$. Donc le débit sortant vaut : $D_V = -\frac{M}{\rho} \frac{dn_{\text{int}}}{dt} = -\frac{MV_0}{\rho RT_0} \frac{dP_{\text{int}}}{dt}$.

L'énoncé indique $\Delta P = P_{\text{int}} - P_{\text{atm}}$ indépendant de t, donc en dérivant : $\frac{dP_{\text{int}}}{dt} = \frac{dP_{\text{atm}}}{dt}$

Or d'après le préliminaire $P_{\text{atm}} = P_A - \alpha(z - z_0)$ soit $\frac{dP_{\text{atm}}}{dt} = -\alpha \frac{dz}{dt} = -\alpha U_0$

On obtient ainsi la relation : $D_V = -\frac{MV_0}{\rho RT_0} \frac{dP_{\text{int}}}{dt} = -\frac{MV_0}{\rho RT_0} \frac{dP_{\text{atm}}}{dt} = \alpha \frac{MV_0}{\rho RT_0} U_0 = \frac{\alpha V_0}{P_A} U_0$

Enfin on admet encore que $D_V = \beta \Delta P$ donc $\Delta P = \frac{\alpha V_0}{\beta P_A} U_0$.

On trouve numériquement $\Delta P = 4,11 U_0$, la sensibilité est donc très médiocre, il sera difficile de mesurer la vitesse verticale qui est de l'ordre du m/s.

II.B - Variomètre mécanique

II.B.1) On a toujours l'équation $d(P_{\text{int}} - \Delta P) = -\rho g dz \Rightarrow d(P_{\text{int}} - \Delta P) = -\rho g dz$.

Dans l'hypothèse où ΔP est indépendant de t il vient : $\frac{dP_{\text{int}}}{dt} = -\rho g \frac{dz}{dt} = -\rho g U_0$

II.B.2) On a trouvé la relation $\Delta P = \frac{\alpha V_0}{\beta P_A} U_0$ donc la relation obtenue à la question précédente s'écrit encore

$$\frac{dP_{\text{int}}}{dt} = -\rho g U_0 = -\Delta P \frac{\rho g \beta P_A}{\alpha V_0} \Rightarrow \frac{dP_{\text{int}}}{dt} = -\frac{\rho g \beta P_A}{\alpha V_0} (P_{\text{int}} - P_{\text{atm}}) = -\frac{\rho g \beta P_A}{\alpha V_0} (P_{\text{int}} - P_A + \alpha(z - z_0))$$

Cette équation est de la forme voulue en posant: $\tau = \frac{\alpha V_0}{\rho g \beta P_A}$ or $\alpha = \frac{Mg}{RT_0} P_A = \rho g$ donc $\tau = \frac{V_0}{\beta P_A}$.

Puisque $z - z_0 = U_0 t$, la solution est la somme de la solution $P_{\text{int}} = A_0 \cdot \exp(-t/\tau)$ et d'une solution particulière de la forme $P_{\text{int}} = A_2 + A_3 t$.

Compte tenu des conditions initiales on trouve: $P_{\text{int}} = P_A + \alpha U_0 (\tau - t - \tau \cdot \exp(-t/\tau))$.

A-N: on calcule $\tau = 0,41$ s, la constante de temps est médiocre pour une mesure en temps réel.

a) En projetant la RFD sur l'axe Ox du mouvement: $m \ddot{x} + h \dot{x} + kx = S(P_{\text{int}} - P_{\text{atm}})$

b) A partir de : $m \ddot{x} + h \dot{x} + kx = S(P_{\text{int}} - P_{\text{atm}}) = S(P_{\text{int}} - P_A + \alpha(z(t) - z_0))$; on obtient en dérivant :

$$m \ddot{x} + h \dot{x} + kx = S \left(\frac{dP_{\text{int}}}{dt} + \alpha U_0 \right), \text{ on peut éliminer } P_{\text{int}} \text{ dans: } \frac{dP_{\text{int}}}{dt} + \frac{1}{\tau} P_{\text{int}} = \frac{1}{\tau} [P_A - \alpha(z(t) - z_0)]$$

on obtient : $m \tau \ddot{x} + (h\tau + m) \dot{x} + (k\tau + h) x = \alpha \tau S U_0$.

On peut aussi remplacer P_{atm} et P_{int} pour obtenir: $m \ddot{x} + h \dot{x} + kx = \alpha \tau S U_0 (1 - \exp(-t/\tau))$.

II.B3) a) Puisque x_{part} est une solution particulière, il suffit de rechercher la solution générale x_{gen} de: $m \ddot{x} + h \dot{x} + kx = 0$.

Ce qui se fait en cherchant les racines de l'équation caractéristique : $m r^2 + h r + k = 0$

Le discriminant vaut : $\Delta = h^2 - 4mk$ qui par hypothèse est négatif, les racines sont complexes et la solution x_{gen} est oscillatoire amortie.

In fine : $x(t) = x_{\text{part}}(t) + x_{\text{gen}}(t) = x_{\text{part}}(t) + X_0 \exp(-ht/2m) \cos[\sqrt{-\Delta} t/2m + \phi_0]$, X_0 et $\phi_0 = C^{\text{te}}$

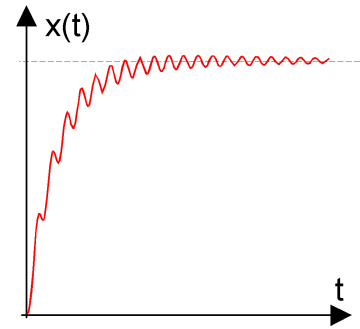
- b) Les conditions initiales sont : $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 0$.
 c) graphe = dérive oscillante autour de l'exponentielle.
 d) Le déplacement maximal est environ la valeur finale de l'exponentielle.

$$x_{\max} = 4S\alpha U_0 \tau \left| \frac{m - h\tau + k\tau^2}{(2k\tau - h)^2 - (h^2 - 4mk)} \right| = S\alpha U_0 \frac{\tau}{k} \approx 8,2 \text{ mm.}$$

soit

La variation de volume maximale du compartiment est $S \cdot x_{\max} < 0,2 \% V_0$.

Il est légitime de supposer le volume du variomètre constant.



II.B.5) Les oscillations pour arriver à la valeur finale sont gênantes. Pour une réponse rapide, l'idéal serait de placer l'oscillateur en régime critique, soit de réaliser $h^2 = 4mk$.

On peut choisir alors $m_c = 0,25 \cdot 10^{-3} \text{ g}$, ce qui posera des problèmes de résistances mécaniques.

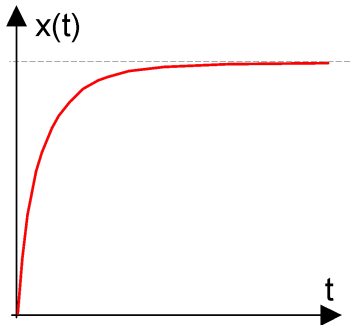
On peut choisir $k_c = 0,25 \cdot 10^{-3} \text{ N.m}^{-1}$. Ce qui paraît peu réaliste avec des ressorts ordinaires.

On pourrait prendre $h_c = 0,063 \text{ N.m}^{-1} \cdot \text{s}$. Ce qui paraît possible, mais il faut aussi s'affranchir des frottements solides. Dans ce cas l'allure du graphe serait celui indiqué ci-contre.

II.B.6) a/ on a l'équation : $m\ddot{x} + (h\tau + m)\dot{x} + (k\tau + h)x + kx = \alpha\tau S U_0$.

On peut encore l'écrire sous la forme

$$m\ddot{x} + (h\tau + m)\dot{x} + (k\tau + h)x + kx = \alpha\tau S \frac{dz}{dt} = \alpha\tau S \frac{d\xi}{dt}$$



Soit en régime harmonique : $m(j\omega)^3 \underline{x} + (h\tau + m)(j\omega)^2 \underline{x} + (k\tau + h)(j\omega) \underline{x} + k \underline{x} = \alpha\tau S j\omega \underline{\xi}$

La fonction de transfert est donc bien du type proposée avec :

$$\tau_0 = \frac{\alpha\tau S}{k} = \frac{\alpha S}{k} \frac{V_0}{\beta P_A} \quad \tau_1 = \tau + \frac{h}{k} = \frac{V_0}{\beta P_A} + \frac{h}{k} \quad \tau_2 = \sqrt{\frac{h\tau + m}{k}} = \sqrt{\frac{hV_0 + m\beta P_A}{k\beta P_A}} \quad \tau_3 = \sqrt[3]{\frac{m\tau}{k}} = \sqrt[3]{\frac{mV_0}{k\beta P_A}}$$

b/ En BF: $\underline{H}(j\omega) = j\omega\tau_0$ soit 20 dB/decade et $\phi = \pi/2$. En HF: $\underline{H} = -\tau_0 / \omega^2 \tau_3^3$ soit 40 dB/décade et $\phi = -\pi$.

C'est confirmé par les graphes proposés. Le variomètre doit indiquer la vitesse soit: $\dot{x} = \lambda \dot{\xi}$, la fonction de transfert doit s'écrire. $\underline{H}(j\omega) = j\omega\lambda$, c'est le cas en basse fréquence. D'après la courbe de gain on peut préciser qu'il faut $\omega < 2,5 \text{ rad.s}^{-1}$. Ce qui exclue les variations trop rapides des conditions de vol.

Partie III - Variomètre à affichage électronique

III.A - Étude du système de capacités différentielles

$$C_{1a} = C_{1b} = \frac{\epsilon S}{e_0 + x} \quad C_{2a} = C_{2b} = \frac{\epsilon S}{e_0 - x}$$

III.A.1) On a simplement :

III.A.2) On calcule avec les valeurs fournies: $C_0 = 4,8 \text{ nF}$

III.B - Oscillateur à pont de Wien

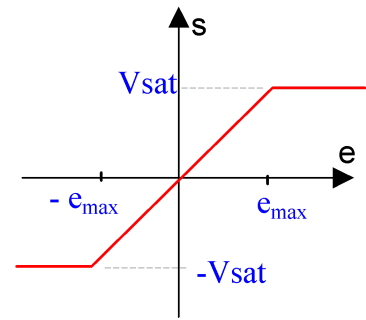
III.B.1) a) Modèle de l'AO idéal : courants d'entrée $i^+ = i^- = 0$ et en régime linéaire $V^+ = V^-$.

Le montage proposée est un ampli non inverseur de gain $\underline{F} = 1 + R_2/R_1$.

Les limitations pratiques sont de plusieurs natures:

- limitation en courant: le courant de sortie ne peut dépasser une certaine limite (de l'ordre de 0,1 A)
- limitation en entrée: la tension de sortie ne peut dépasser $\pm V_{sat}$ - de l'ordre de 13 V)
- limitation en fréquence: l'AO se comporte comme un filtre passe-bas (f_c de quelque kHz)

b) Avec $e_{max} = V_{sat}/F$, la caractéristique est représentée ci-contre.



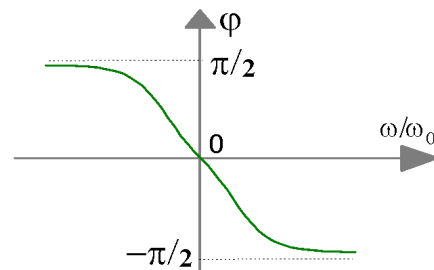
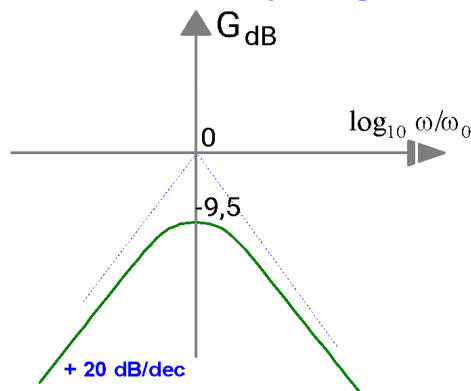
$$\underline{G} = \frac{Z_{//}}{Z_{//} + Z_+} = \frac{1}{1 + Z_+/Z_{//}} = \frac{1}{1 + Z_+ Y_{//}}$$

III.B.2) a/ On reconnaît un diviseur de tension:

$$\underline{G} = \frac{1}{1 + (R + 1/jC\omega)(1/R + jC\omega)} = \frac{1}{3 + 1/jRC\omega + jRC\omega}$$

Ce qui conduit à

- fréquence de résonance $\omega_0 = 1/RC$: - facteur de qualité: $Q = 1/3$: - gain maximum : $G_{max} = 1/3$
- b/ graphe de Bode ci dessous : il s'agit d'un passe-bande



$$\underline{F} \cdot \underline{G} = \frac{s}{e} \frac{s'}{e'} = \frac{s}{e} \frac{e}{s} = 1$$

III.B.3) a/ On constate que

Puisque F est réel il faut G soit réel également et que sa partie réelle soit égale à 1/F.

Il faut donc $0 = 1/jRC\omega + jRC\omega$ et $1 + R_2/R_1 = 3$. Soit $f = 1/(2\pi RC)$ et $r = R_2/R_1 = 2$.

b/ Pour le filtre de Wien: $\frac{s'}{e'} = \frac{1}{3 + 1/jRC\omega + jRC\omega} \Rightarrow s' + 3jRC\omega s' + (jRC\omega)^2 s' = jRC\omega e'$

Et pour l'ampli non inverseur : $\frac{e'}{s'} = 1 + r$ donc $s' + 3jRC\omega s' + (jRC\omega)^2 s' = jRC\omega(1 + r)s'$

$$(RC)^2 \frac{d^2 s'}{dt^2} + RC[2 - r] \frac{ds'}{dt} + s' = 0$$

Ce qui correspond à l'équation différentielle:

Dans le cas $r = 2$, l'équation est celle d'un oscillateur harmonique de fréquence propre $f = 1/(2\pi RC)$.

On retrouve les résultats de la question précédente.

A-N: $f = 3316$ Hz. Pour cette fréquence le comportement fréquentielle de l'AO peut-être ignoré.

c) Le montage ne comporte pas de GBF, c'est donc le "bruit" environnant qui démarre les oscillations. Celles-ci ont des amplitudes extrêmement faibles, mais si les paramètres sont adaptés elles seront amplifiées. Pour cela il faut que l'exposant de l'exponentielle solution de l'equa-diff soit positif, soit $r > 2$.

Avec les valeurs catalogues on calcule : $10/4,7 = 2,12$ et $10/5,6 = 1,78$.

Le seul choix est donc $R_1 = 4,7$ kΩ.

d) Si la valeur de R_1 est très grande alors les oscillations qui prennent naissance dans le circuit sont amorties et aucun signal n'est perceptible en sortie.

En diminuant R_1 on passe par la valeur critique $R_2/2$ et les oscillations provenant du bruit ne sont pas amorties mais elles ne sont pas non plus amplifiées. L'amplification débutera lorsque $R_1 > R_2/2$ soit $r > 2$. L'amplification va conduire la sortie en saturation. On arrive donc à cette conclusion que les oscillations ont une amplitude imposée : $e'_{\max} = V_{\text{sat}}$ et par conséquent $s'_{\max} = 1/3 V_{\text{sat}} \approx 4,33 \text{ V}$.

Lorsque R_1 a une faible valeur le domaine de linéarité défini par $e_{\max} = V_{\text{sat}}/F$ est quasi nul et l'AO est en saturation quasi en permanence. L'équation différentielle doit être reprise en faisant $e' = \pm V_{\text{sat}} = \text{Cte}$ (ce qui revient à faire $F = 0$ ou $r = -1$). Les solutions pour s' sont alors exponentielles amorties et on a un oscillateur à relaxation très peu sinusoïdal.

En considérant uniquement le fondamental du créneau et la fonction $G(\omega)$ on peut dire que le fondamental de $s'(t)$ est une sinusoïde d'amplitude $4/3 \cdot V_{\text{sat}}/\pi \approx 5,5 \text{ V}$.

Il est normal de ne garder que le fondamental du créneau car le filtre passe-bande est suffisamment sélectif (20 dB/décade) et élimine les autres harmoniques qui ont déjà une amplitude plus réduite.

Il semble qu'il y ait confusion dans l'énoncé entre sortie $s'(t)$ et sortie de l'AO. Le créneau est en $e'(t)$!

III.B.4) a/ La branche comportant R_3 n'est passante

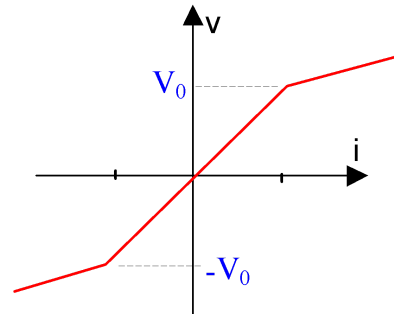
que si $|v| > V_0 = v_z + v_D$. Donc

si $|v| > V_0$ alors $v = (R_3/R_2) \cdot (i \pm V_0/R_3)$

sinon $v = R_2 \cdot i$

D'où la caractéristique ci-contre.

b) Quand l'amplitude des oscillations dépassent V_0 , elles sont rapidement amorties et ramenées vers V_0 qui agit comme une régulation. L'oscillation se fait autour de V_0 et non de V_{sat} .



III.C - Étude globale du capteur

On écrit $v_m(t) = k_m \cdot v_1(t) \cdot v_2(t) = k_m \cdot A^2 \cdot \cos(\omega_1 t) \cdot \cos(\omega_2 t) = \frac{1}{2} k_m \cdot A^2 \{ \cos[(\omega_1 + \omega_2)t] + \cos[(\omega_1 - \omega_2)t] \}$

La cellule (R', C') étant un filtre passe-bas de fréquence de coupure $\omega_c = 1/R'C'$ il faut :

$\omega_c > \omega_1 + \omega_2$ et $\omega_c < |\omega_1 - \omega_2|$ On pourra prendre par exemple $\omega_c = 1/RC_0$.

$$V_s = \frac{\gamma}{2\pi} \left(\frac{1}{RC_1} - \frac{1}{RC_2} \right) = \frac{\gamma}{2\pi\epsilon} \left(\frac{e_0 + x}{RS} - \frac{e_0 - x}{RS} \right)$$

La tension de sortie est alors $V_s = \gamma |f_1 - f_2|$ soit

Soit
$$V_s = \frac{\gamma x}{\pi R S \epsilon} = \frac{\gamma \lambda}{\pi R S \epsilon} V_z$$