
1.- Sea la función $f(x) = -2x^3 + ae^{-x} + bx - 1$
a) Halle los valores de a y b sabiendo que la función tiene un mínimo en $x = 0$ y que la gráfica de la función pasa por el punto (0, 0).

Resolución

$f(x) = -2x^3 + ae^{-x} + bx - 1$ $\qquad$ $f'(x) = -6x^2 - ae^{-x} + b$

Como la gráfica de f pasa por (0, 0) entonces $f(0) = 0 \Rightarrow -2.0^3 + ae^0 + b.0 - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$

Nos queda $f(x) = -2x^3 + e^{-x} + bx - 1$ $\quad$ $f'(x) = -6x^2 - e^{-x} + b$

Como f tiene un mínimo en $x = 0$ entonces $f'(0) = 0 \Rightarrow -6.0^2 - e^0 + b = 0 \Rightarrow b = 1$. Luego, $a = b = 1$

b) Para $a = 0$ y $b = 1$, determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = -1$

Resolución

Para $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = -2x^3 + x - 1$ $\quad$ $f'(x) = -6x^2 + 1$

La ecuación de la recta tangente en un punto $A(x_0, f(x_0))$ es rtg: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

En este caso, $x_0 = -1$; $f'(x_0) = f'(-1) = -6(-1)^2 + 1 = -5$; $f(x_0) = f(-1) = -2(-1)^3 - 1 - 1 = 0$

rtg: $y = -5(x + 1) + 0 \Rightarrow$ rtg: $y = -5x - 5$

2.- Sea la función f, definida por $f(x) = \{x^2 - ax + 5,\ si\ x < 0 \quad - x^2 + b,\ si\ x \geq 0$
Determine los valores que han de tomar a y b para que la función f sea derivable en $x = 0$

Resolución

Observamos que el dominio de f es todo R pues su expresión se puede calcular para cualquier valor de x.

Para $x \neq 0$, f es continua y derivable independientemente de los valores de a y b por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables.

Como debe ser continua en $x = 0$, $f(x) = f(x) \Rightarrow 0^2 - a.0 + 5 = -0^2 + b \Rightarrow b = 5$

Para $x \neq 0$ $\quad f'(x) = \{2x - a,\ si\ x < 0 \quad -2x,\ si\ x > 0$

Para que sea derivable en $x = 0$ $f'(x) = f'(x) \Rightarrow 2.0 - a = -2.0 \Rightarrow a = 0$

Por tanto, para que f sea derivable en $x = 0$ debe ser $a = 0$, $b = 5$.

3.- Sea la función dada por $f(x) = \{x^2 + ax,\ si\ x \leq 2 \quad \frac{x+b}{x-1},\ si\ x > 2$
a) Determine los valores de a y b, sabiendo que dicha función es derivable.

Resolución

Observamos que el dominio de f es todo R pues su expresión se puede calcular para cualquier valor de x. Nótese que la fracción no se puede calcular si x = 1 pero está definida para x > 2.

Para $x \neq 2$, f es continua y derivable independientemente de los valores de a y b por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables.

Como debe ser continua en x = 2, $f(x) = f(x) \Rightarrow 2^2 + a.2 = \frac{2+b}{2-1} \Rightarrow 2a - b = -2$

Para $x \neq 2$ $f'(x) = \{2x + a,\ si\ x < 2\ \frac{1.(x-1)-(x+b).1}{(x-1)^2} = \frac{-1-b}{(x-1)^2},\ si\ x > 2$

Como debe ser derivable en x = 2 $f'(x) = f'(x) \Rightarrow 2.2 + a = \frac{-1-b}{(2-1)^2} \Rightarrow a + b = -5$

Nos queda el sistema $\{2a - b =- 2\ a + b =- 5$. Sumando, 3a = – 7, $a = \frac{-7}{3}$. Luego, $\frac{-7}{3} + b = -5$, $b = \frac{-8}{3}$

Por tanto, debe ser $a = \frac{-7}{3}$, $b = \frac{-8}{3}$.

b) Para a = 2 y b = 3, determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa x = 1

Resolución

Para a = 2 y b = 3, $f(x) = \{x^2 + 2x,\ si\ x \leq 2\ \frac{x+3}{x-1},\ si\ x > 2$,

$f'(x) = \{2x + 2,\ si\ x < 2\ \frac{-4}{(x-1)^2},\ si\ x > 2$

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en un punto $A(x_0, f(x_0))$ es

rtg: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$; $x_0 = 1$; $f'(x_0) = f'(1) = 2.1 + 2 = 4$; $f(x_0) = f(1) = 1^2 + 2.1 = 3$

rtg: y = 4(x – 1) + 3 ⇒ rtg: y = 4x – 1

4.- El porcentaje de personas que sintonizan un programa de radio que se emite entre las 6 y las 12 horas viene dado, según la hora t, mediante la función $f(t) = 660 - 231t + 27t^2 - t^3$, $6 \leq t \leq 12$

a) ¿Qué porcentaje de personas sintonizan el programa al comenzar la emisión? ¿Y al cierre?

Resolución

Al comenzar la emisión t = 6. El porcentaje de personas es $f(6) = 660 - 231.6 + 27.6^2 - 6^3 = 30\%$

Al cierre de la emisión t = 12. El porcentaje de personas es $f(12) = 660 - 231.12 + 27.12^2 - 12^3 = 48\%$

b) ¿A qué hora tiene máxima y mínima audiencia? ¿Qué porcentaje de personas sintonizan el programa a dichas horas?

Resolución

Hallemos el máximo y mínimo de la función f(t). Tenemos que $f'(t) = -231 + 54t - 3t^2 = 0$

$t = \frac{-54 \pm \sqrt{2916 - 4(-3)(-231)}}{2(-3)} = \frac{-54 \pm \sqrt{144}}{-6} = \frac{-54 \pm 12}{-6}$; t = 7 , t = 11 (posibles extremos)

Evaluamos f(t) en t = 6, t = 7, t = 11 y t = 12 ; el mayor y menor valor serán los que buscamos.

f(6) = 30% $f(7) = 660 - 231.7 + 27.7^2 - 7^3 = 23\%$ (mínimo)

$f(11) = 660 - 231.11 + 27.11^2 - 11^3 = 55\%$ (máximo) f(12) = 48%

Luego, la mínima audiencia se dio a las 7 h, con un 23% y la máxima a las 11 h, con un 55%

5.- Sea la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$

a) Estudie la monotonía de f y halle los extremos relativos que posea.

Resolución

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$; $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x-1)^2 \geq 0$

f es creciente y por tanto no tiene extremos relativos

b) Estudie su curvatura y calcule su punto de inflexión.

Resolución

$f''(x) = 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Hagamos una tabla de signos de $f''(x)$:

	$(-\infty, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	cóncava	punto de inflexión	convexa

f es cóncava en $(-\infty, 1)$ y convexa en $(1, +\infty)$

f tiene un punto de inflexión en $x = 1$, $y = f(1) = 1^3 - 3.1^2 + 3.1 = 1$. El punto de inflexión es $I(1, 1)$

c) Represente la gráfica de la función f.

Resolución

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ es una función polinómica creciente, cóncava en $(-\infty, 1)$ y convexa en $(1, +\infty)$

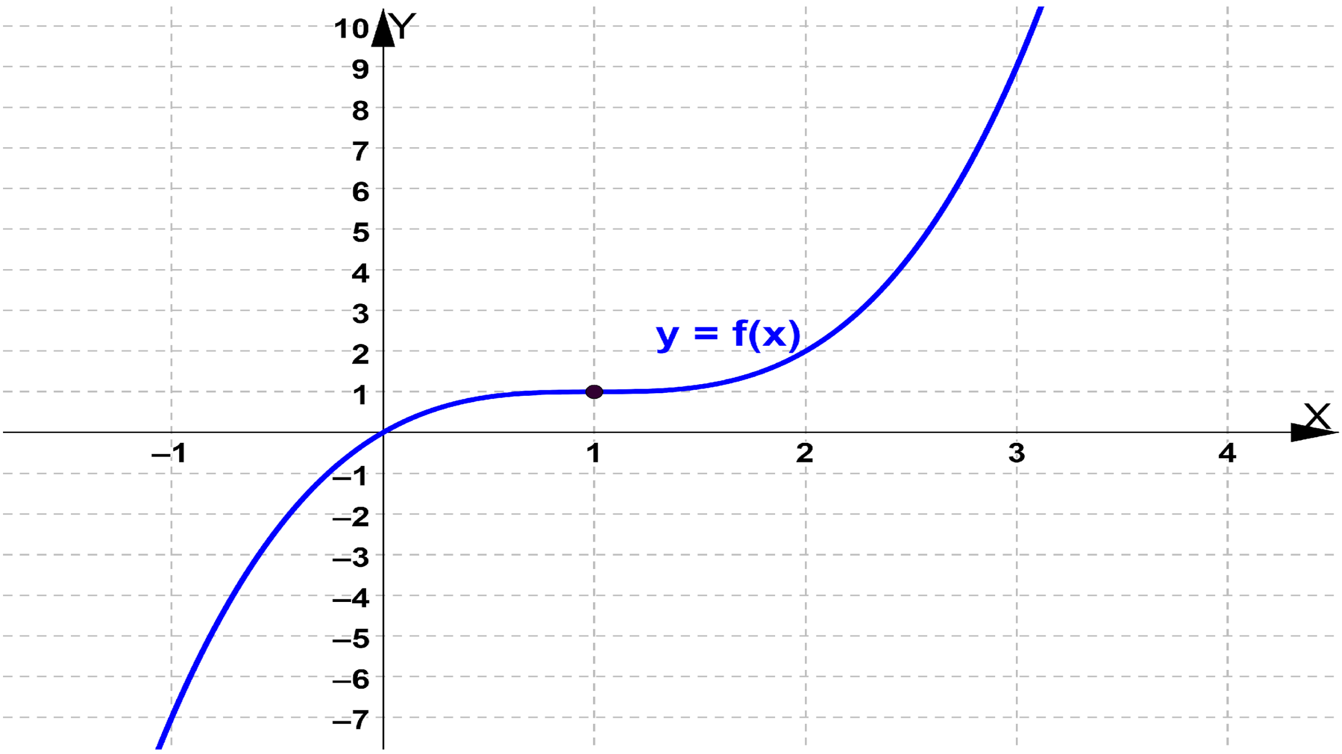
$f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(x^3\right) = +\infty$, $f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(x^3\right) = -\infty$, su punto de inflexión es $I(1, 1)$

Puntos de corte con el eje X: $f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 3x = 0 = x(x^2 - 3x + 3) = 0$

$x = 0$, $x^2 - 3x + 3 = 0$, $x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4.1.3}}{2.1} = \frac{3 \pm \sqrt{-3}}{2}$ $(imposible)$. Al ser $f(0) = 0$, sólo corta al eje X en $(0, 0)$

Hallamos dos puntos más de la gráfica, por ejemplo
para $x = -1$, $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 3(-1) = -7$. Punto $(-1, -7)$

para $x = 3$, $f(3) = 3^3 - 3.3^2 + 3.3 = 9$. Punto $(3, 9)$



6.- Sea la función $f'(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & si\ x \le 1 \\ \frac{4}{x}, & si\ x > 1 \end{cases}$

a) Estudie la continuidad y derivabilidad de la función en su dominio.

Resolución

Observamos que el dominio de f es todo R porque su expresión se puede calcular para cualquier valor de x. Nótese que al ser x > 1 la fracción se puede calcular.

Para x ≠ 1 f es continua y derivable por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables.

$f(x) = (1 + 1)^2 = 4 = f(1) = f(x) = \frac{4}{1} = 4$ ⇒ f es continua en x = 1.

Para x ≠ 1 , $f'(x) = \{2x + 2, \quad si\ x < 1 \ \frac{-4}{x^2}, \quad si\ x > 1$

$f'(x) = 2.1 + 2 = 4 \neq f'(x) = \frac{-4}{1^2} = -4$ ⇒ f NO es derivable en x = 1

Luego, f es continua en R y derivable en R – {1}

b) Determine sus asíntotas, en caso de que existan.

Resolución

Como f es continua no tiene asíntotas verticales.

$f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{4}{x} = 0$. Luego, la recta AH: y = 0 (eje X) es una asíntota horizontal en +∞

$f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x + 1)^2 = +\infty$. Luego, no tiene asíntota horizontal en –∞

c) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 2

Resolución

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en un punto $A(x_0, f(x_0))$ es rtg: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. En este caso, $x_0 = 2$. Como $f'(x_0) = f'(2) = \frac{-4}{2^2} = -1$

$f(x_0) = f(2) = \frac{4}{2} = 2$ ⇒ rtg: y = –1(x – 2) + 2 ⇒ rtg: y = –x + 4

7.- Sean las funciones $f(x) = (2x^2 - 1)^3 \ln(x^4)$ $g(x) = \frac{e^{-2x+x^2}}{x^2+1}$. Determine el valor de $f'(-1)$ y $g'(0)$.

Resolución

$$f'(x) = 3(2x^2 - 1)^2 . 4x. \ln(x)^4 + (2x^2 - 1)^3 . \frac{4x^3}{x^4} = 4(2x^2 - 1)^2 . \left[3x. \ln(x)^4 + \frac{2x^2-1}{x}\right]$$

$$f'(-1) = 4[2(-1)^2 - 1]^2 . \left[3(-1). \ln(-1)^4 + \frac{2(-1)^2-1}{-1}\right] = 4.1.[-3.0 + (-1)] = -4$$

$$g'(x) = \frac{\left(-2 + 2x)e^{-2x+x^2}(x^2 + 1\right) - e^{-2x+x^2}.2x}{(x^2+1)^2}$$

$$g'(0) = \frac{\left(-2 + 2.0)e^{-2.0+0^2}(0^2 + 1\right) - e^{-2.0+0^2}.2.0}{(0^2+1)^2} = \frac{-2.1.1 - 1.2.0}{1} = -2$$

8.- Represente gráficamente la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x$, estudiando previamente su dominio, puntos de corte con los ejes, intervalos de monotonía, extremos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión

Resolución

Observamos que el dominio de f es todo R porque su expresión se puede calcular para cualquier valor de x.

Puntos de corte con los ejes:

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x = x(x^2 - 6x + 12) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x^2 - 6x + 12 = 0$

$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4.1.12}}{2.1} = \frac{6 \pm \sqrt{-12}}{2}\ (imposible)$ y como $f(0) = 0$, solo corta a los ejes en el punto (0, 0)

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 12 = 3(x^2 - 4x + 4) = 3(x - 2)^2 \geq 0 \Rightarrow$ f es creciente y por tanto no tiene extremos relativos.

$f''(x) = 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Hagamos una tabla de signos de $f''(x)$:

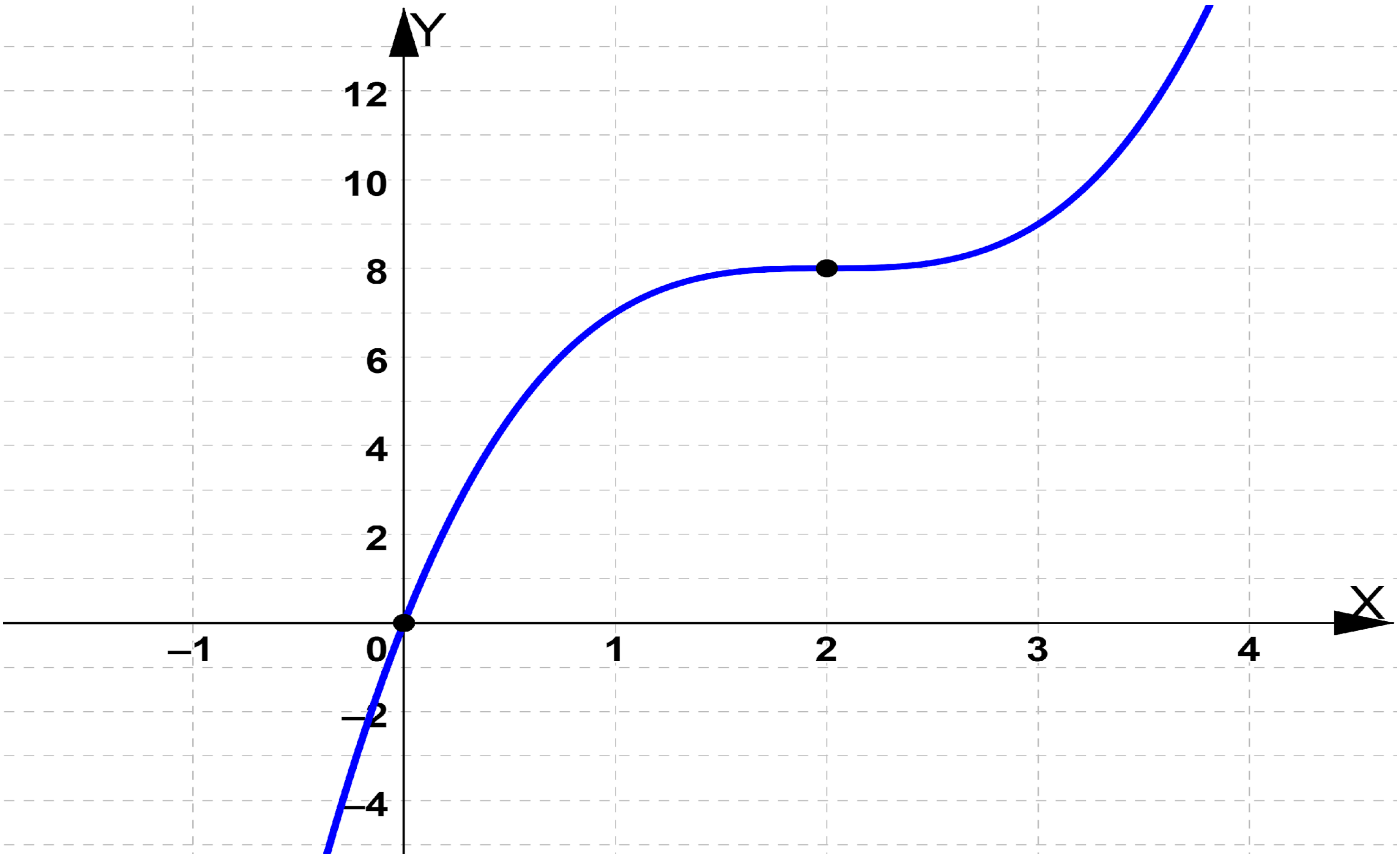
	$(-\infty, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f''(x)$	–	0	+
f(x)	cóncava	punto de inflexión	convexa

f es cóncava en $(-\infty, 2)$ y convexa en $(2, +\infty)$

f tiene un punto de inflexión en x = 2, $y = f(2) = 2^3 - 6.2^2 + 12.2 = 8 - 24 + 24 = 8$. Punto $I(2, 8)$

Observamos además que $f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x^3) = +\infty$, $f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x^3) = -\infty$

Su gráfica sería:



9.- (prueba ordinaria) La función de beneficios f, en miles de euros, de una empresa depende de la cantidad invertida x, en miles de euros, en un determinado proyecto de innovación y viene dada por $f(x) = -2x^2 + 36x + 138,\ x \geq 0$

a) Determine la inversión que maximiza el beneficio de la empresa y calcule dicho beneficio óptimo.

Resolución

Para $x \geq 0$, $f'(x) = -4x + 36 = 0 \Leftrightarrow x = 9$; $f''(x) = -4$; $f''(9) = -4 < 0$ (en $x = 9$ hay máximo relativo)

$f(9) = -2.9^2 + 36.9 + 138 = 300$ y como $f(0) = 138$, el máximo absoluto es $M(9, 300)$

Luego, la inversión que maximiza el beneficio es 9000 € obteniendo un beneficio óptimo de 300000 €

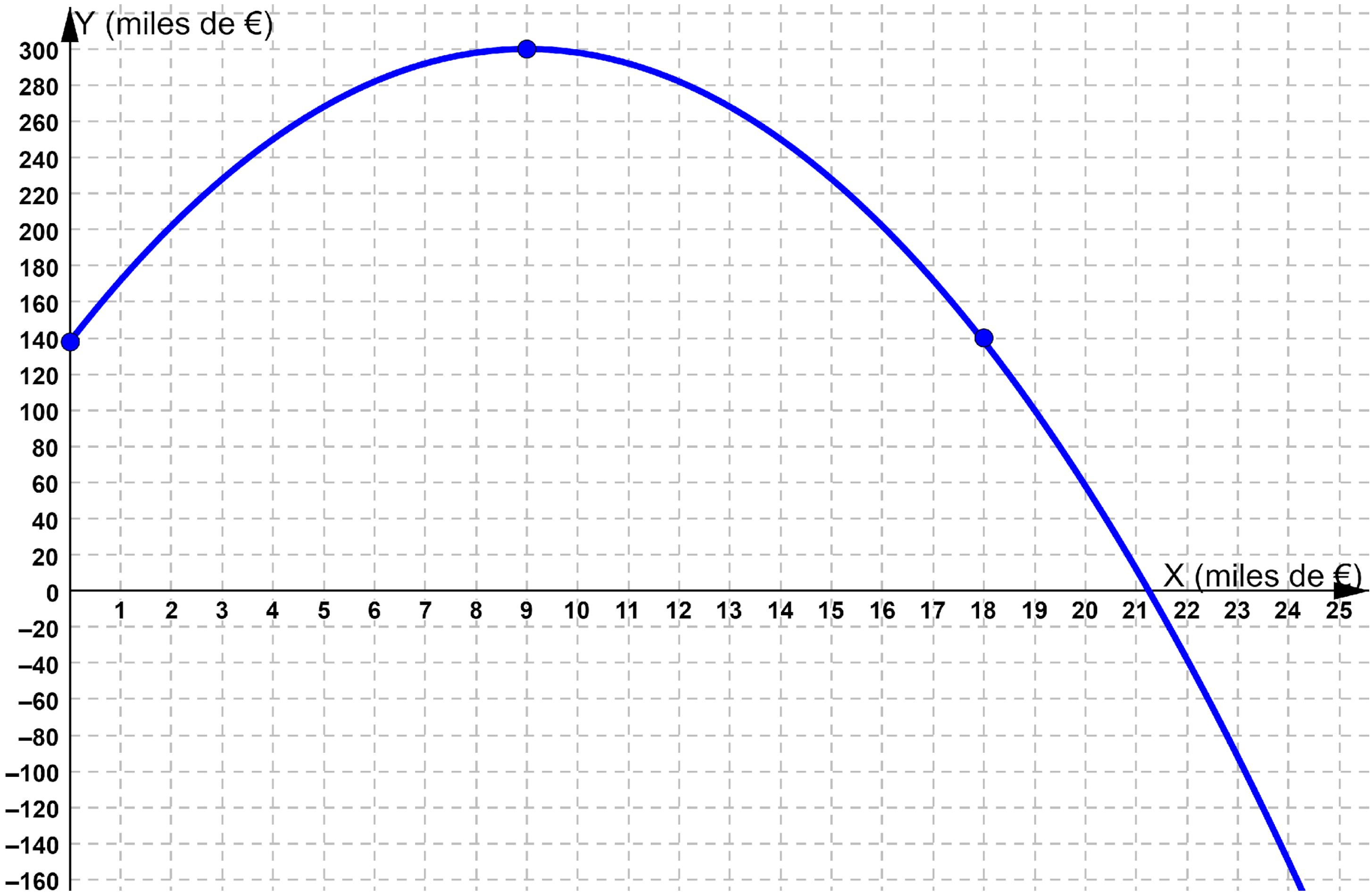
b) Calcule $f'(7)$ e interprete el signo del resultado.

Resolución

$f'(7) = -4.7 + 36 = 8 > 0$ 8creciente). Es decir, para una inversión de 7000 € el beneficio va aumentando

c) Dibuje la función de beneficios $f(x)$. ¿Para qué valor o valores de la inversión, x, el beneficio es de 138 mil euros?

Resolución



El beneficio es 138000 € $\Leftrightarrow f(x) = -2x^2 + 36x + 138 = 138 \Leftrightarrow -2x^2 + 36x = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 36x = 0$

$2x(-x + 18) = 0$, $x = 0$, $x = 18$. Para una inversión de 0 € ó de 18000 € el beneficio es de 138000 €

10.- (prueba ordinaria) Sea la función f definida por $f(x) = \begin{cases} -bx^2 - bx + a, & si\ x \leq 2 \\ \frac{60}{x}, & si\ x > 2 \end{cases}$

a) Obtenga los valores de a y b para que la función sea continua y derivable.

Resolución

Observamos que el dominio de f es todo R pues su expresión se puede calcular para cualquier valor de x.

Nótese que la fracción no se puede calcular si x = 0 pero está definida para x > 2.

Para x ≠ 2, f es continua y derivable independientemente de los valores de a y b por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables.

Como debe ser continua en x = 2, $f(x) = f(x) \Rightarrow -b.2^2 - b.2 + a = \frac{60}{2}$

De donde, –6b + a = 30. O sea, a – 6b = 30. Para x ≠ 2 $f'(x) = \{-2bx - b,\ si\ x < 2\ \frac{-60}{x^2},\ si\ x > 2$

Como debe ser derivable en x = 2 $f'(x) = f'(x) \Rightarrow -2b.2 - b = \frac{-60}{2^2}$; –5b = –15 ⇒ b = 3.

Luego, –6.3 + a = 30 ; a = 48. Por tanto, debe ser a = 48, b = 3.

b) Para a = 48 y b = 3, estudie la monotonía de f(x) y calcule sus extremos.

Resolución

Para a = 48, b = 3, sabemos que f es continua y derivable en x = 2

$f(x) = \{-3x^2 - 3x + 48,\ si\ x \le 2\ \frac{60}{x},\ si\ x > 2$, $f'(x) = \{-6x - 3,\ si\ x \le 2\ \frac{-60}{x^2},\ si\ x > 2$

$\{Si\ x < 2,\ f'(x) = -6x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{2}\ Si\ x > 2,\ f'(x) = \frac{-60}{x^2} < 0 \Rightarrow f\ es\ decreciente$

Hagamos una tabla de signos de f´(x):

	$\left(-\infty, \frac{-1}{2}\right)$	$\frac{-1}{2}$	$\left(\frac{-1}{2}, 2\right)$	2	(2, +∞)
f´(x)	+	0	–	0	–
f(x)	creciente	mínimo	decreciente		decreciente

f es creciente en $\left(-\infty, \frac{-1}{2}\right)$ y decreciente en $\left(\frac{-1}{2}, +\infty\right)$

Tiene un mínimo en $x = \frac{-1}{2}$, $y = f\left(\frac{-1}{2}\right) = -3\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - 3\frac{-1}{2} + 48 = \frac{195}{4}$. El mínimo es $M\left(\frac{-1}{2}, \frac{195}{4}\right)$

11.- (prueba extraordinaria) Una empresa ha realizado un estudio sobre los beneficios, en miles de euros, que ha obtenido en los últimos 10 años. La función a la que se ajustan dichos beneficios viene dada por $B(t) = 2t^3 - 36t^2 + 162t - 6$, $0 \le t \le 10$

a) ¿Qué beneficios obtuvo al inicio del periodo (t = 0) y al final del décimo año (t = 10)

Resolución

Al inicio, t = 0, los beneficios fueron $B(0) = 2.0^3 - 36.0^2 + 162.0 - 6 = -6$ (tenía un déficit de 6000 €)

Al final, t = 10, los beneficios fueron $B(10) = 2.10^3 - 36.10^2 + 162.10 - 6 = 14$ (beneficios de 14000 €)

b) ¿En qué momentos se obtiene el máximo y el mínimo beneficio y cuáles fueron sus cuantías?

Resolución

Hallemos el máximo y mínimo de la función B(t). $B'(t) = 6t^2 - 72t + 162 = 0 \Rightarrow t^2 - 12t + 27 = 0$

$t = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4.1.27}}{2.1} = \frac{12 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{12 \pm 6}{2}$; t = 9 , t = 3 (posibles extremos relativos)

Evaluamos B(t) en t = 0, t = 3, t = 9 y t = 10 ; el mayor y menor valor serán los que buscamos.

B(0) = –6 $B(3) = 2.3^3 - 36.3^2 + 162.3 - 6 = 210$

$B(9) = 2.9^3 - 36.9^2 + 162.9 - 6 = -6$ B(10) = 14

Luego, el mínimo se dio en el momento inicial y a los 9 años con unas pérdidas de 6000 € y el máximo a los 3 años con un beneficio de 210000 €.

12.- (prueba extraordinaria) Sea la función $f(x) = -x^2 + px + q$.
a) Calcule los valores que deben tener p y q para que la gráfica de la función f pase por el punto (–4, –5) y presente un máximo en el punto de abscisa x = –1. Determine el valor de f(x) en ese punto.

Resolución

- Como la gráfica pasa por el punto (–4, –5), f(–4) = –5.
Luego, $-(-4)^2 + p(-4) + q = -5 \Rightarrow -16 - 4p + q = -5 \Rightarrow 4p - q = -11$

- Como tiene un mínimo para x = –1, entonces f´(–1) = 0.
Dado que $f'(x) = -2x + p$, se tiene que $-2.(-1) + p = 0 \Rightarrow p = -2$
Luego, $4.(-2) - q = -11$; $q = -8 + 11 = 3$. Por tanto, la respuesta es p = –2, q = 3.
Para p = –2, q = 3, $f(x) = -x^2 - 2x + 3$; $f(-1) = -(-1)^2 - 2(-1) + 3 = -1 + 2 + 3 = 4$

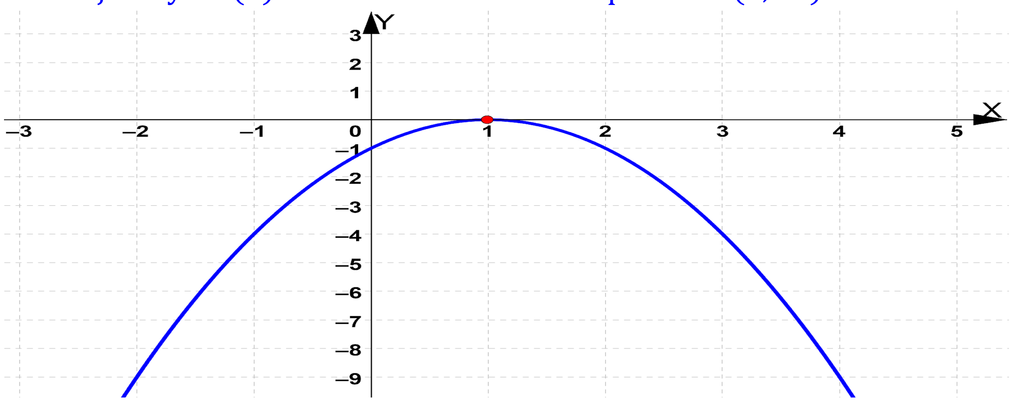
b) Represente la gráfica de f para p = 2 , q = – 1 y halle la ecuación de la recta tangente a esta gráfica en el punto de abscisa x = –2

Resolución

Para p = 2, q = –1, $f(x) = -x^2 + 2x - 1$ es una función cuadrática y sabemos que la gráfica es una parábola cóncava ; $f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(-x^2\right) = -\infty$; $f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(-x^2\right) = -\infty$

$f'(x) = -2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$; $f''(x) = -2$, $f''(1) = -2 < 0$.
Luego, f tiene un máximo en x = 1, $f(1) = -1^2 + 2.1 - 1 = 0$, máximo V(1, 0), vértice de la parábola.

Puntos de corte con el eje X: $f(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 2x - 1 = 0$, $-(x - 1)2 = 0$, x = 1. Punto (1, 0)
Punto de corte con el eje Y: $y = f(0) = -0^2 + 2.0 - 1 = -1$. El punto es (0, –1)



La ecuación de la recta tangente en el punto $A(x_0, f(x_0))$ es rtg: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.
En este caso, $x_0 = -2$. Como $f'(x_0) = f'(-2) = -2(-2) + 2 = 6$ y $f(x_0) = f(-2) = -(-2)^2 + 2(-2) - 1 = -9$

rtg: $y = 6(x + 2) - 9 \Rightarrow$ rtg: $y = 6x + 3$