

Цель занятия:**Деятельностная:**

– формирование у учащихся умений оперировать понятиями усеченный конус, сечение усеченного конуса.

Содержательная:

– сформировать представление об усеченном конусе, всех его элементах и сечениях;

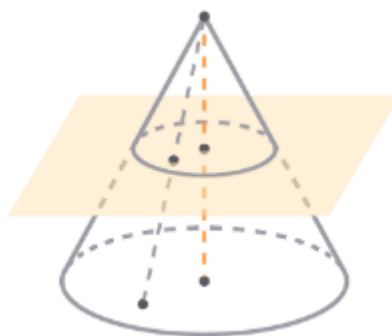
– расширить знания учеников за счет включения новых определений: усеченный конус, основание, высота, образующие усеченного конуса;

– познакомиться с задачами на нахождение площади поверхности усеченного конуса, построение сечения усеченного конуса.

Оборудование занятия: доска, учебник.

Теоретический материал для изучения

Усечённый конус – часть конуса, расположенная между его основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию.

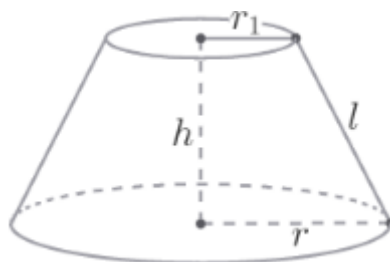
**Элементы усечённого конуса**

К основным элементам усечённого конуса относят два его основания, высоту, образующие и боковую поверхность конуса.



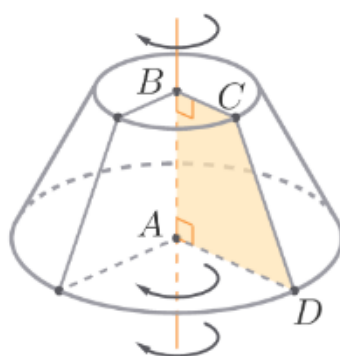
Основаниями усечённого конуса являются два круга, лежащие в параллельных плоскостях. Соответственно, у конуса есть радиус меньшего основания (r_1) и радиус большего основания (r).

Высотой (h) усечённого конуса называется отрезок, соединяющий центры оснований.

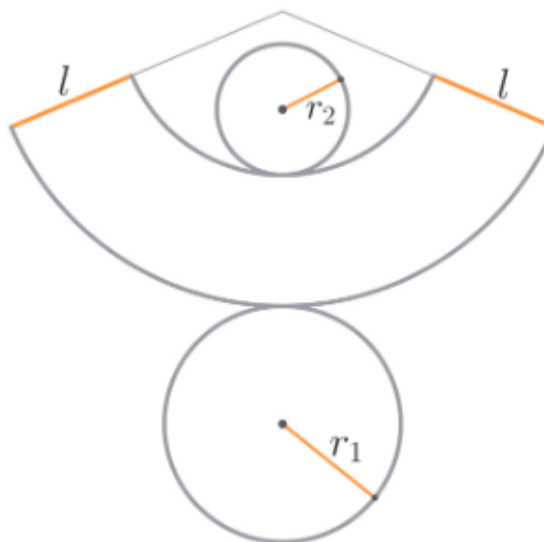


Боковой поверхностью и **образующими** усечённого конуса считаются части соответственно конической поверхности и её образующих, заключённые между основаниями.

Усечённый конус можно рассматривать как тело, полученное в результате вращения прямоугольной трапеции вокруг прямой, содержащей меньшую боковую сторону.



Основные формулы



Площадь боковой поверхности усечённого конуса можно вычислить по формуле:

$$S_{\text{бок}} = \pi(r_1 + r_2)l,$$

где r_1 и r_2 – радиусы оснований усечённого конуса, l – длина образующей.

Площадь полной поверхности усечённого конуса можно вычислить по формуле:

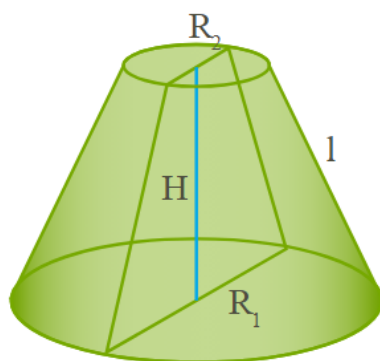
$$S_{\text{полл}} = \pi(r_1 + r_2)l + \pi(r_1^2 + r_2^2).$$

Объём усечённого конуса V можно вычислить по формуле:

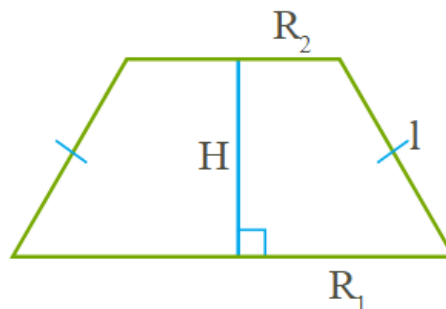
$$V = \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$$

где h – высота усечённого конуса.

При решении задач чаще всего достаточно нарисовать только осевой сечение усеченного конуса, которое является усеченной трапецией.



R_2 –
радиус меньшего
основания;
 R_1 – радиус большего
основания;
 l – образующая;
 H – высота



Примеры и разбор решения заданий

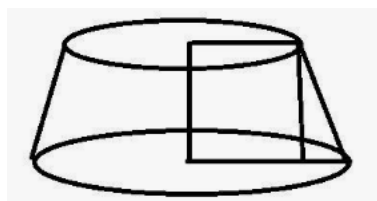
Задание 1.

Прямоугольная трапеция с основаниями 4 и 7 и меньшей боковой стороной 4 вращается вокруг меньшей стороны. Найдите элементы усеченного конуса.

Величина
Высота конуса
Образующая конуса
Радиус меньшего основания
Радиус большего основания
Площадь боковой поверхности конуса
Площадь осевого сечения
Площадь полной поверхности конуса

Решение:

Сделаем чертеж:



Трапеция $ABCD$ вращается вокруг стороны AD .

Тогда:

AD – высота усеченного конуса, $AD=4$.

AB – радиус меньшего основания, $AB=4$.

DC – радиус большего основания, $DC=7$.

Площадь боковой поверхности конуса вычислим по формуле:

$$S_{\text{бок.пов.ук}} = \pi(r+R)L.$$

Для того чтобы найти площадь боковой поверхности, нужно найти образующую.

Ее найдем из треугольника BHC : $BC=5$ (это египетский треугольник).

Теперь найдем площадь боковой поверхности.

$$S_{\text{б.п.}} = \pi(4+7) \cdot 5 = 55\pi.$$

Площадь боковой поверхности равна 55π .

Осевое сечение представляет собой равнобедренную трапецию с основаниями 8 и 14 и высотой, равной 4.

Так что площадь этой трапеции равна: $S = 4(4+7) = 44$.

Для того чтобы найти площадь полной поверхности, нужно к площади боковой поверхности прибавить площади ее оснований.

$$S_{\text{п.п.}} = 55\pi + 16\pi + 49\pi = 120\pi.$$

Величина	Значение
Высота конуса	4
Образующая конуса	5
Радиус меньшего основания	4
Радиус большего основания	7
Площадь боковой поверхности конуса	55π
Площадь осевого сечения	44
Площадь полной поверхности конуса	120π

Задание 2.

Найдите площадь боковой поверхности усеченного конуса, если радиусы оснований равны 3 и 5, а образующая – 4.

Решение.

Найдем площадь боковой поверхности усеченного конуса:

$$S = \pi l(R+r) = 4 \cdot (3+5) \cdot \pi = 32\pi.$$

Ответ: 32π .

Задание 3.

Найдите площадь боковой поверхности усеченного конуса, если радиусы оснований равны 2 и 10, а высота – 15.

Решение.

По теореме Пифагора найдем образующую конуса:

$$(R-r)^2 + h^2 = l^2 \Leftrightarrow 8^2 + 15^2 = l^2 \Leftrightarrow l = 17.$$

Найдем площадь боковой поверхности конуса:

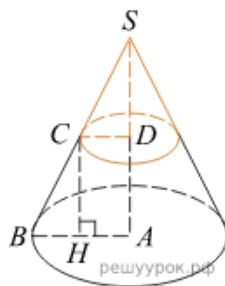
$$S = \pi l(R+r) = 17 \cdot (10+2) \cdot \pi = 204\pi.$$

Ответ: 204π .

Задание 4.

Найдите площадь боковой поверхности усеченного конуса, если он получен вращением трапеции ABCD вокруг стороны AD, в которой $CD = 4$, $BC = 3\sqrt{2}$, $\angle A = 90^\circ$, $\angle B = 45^\circ$.

Решение.



Трапеция прямоугольная, причем именно AD (а не АВ) боковая сторона. Опустим высоту СН на АВ, тогда

$$BH = BC \cdot \cos \angle CBH = 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3,$$

$$BA = BH + HA = BH + CD = 3 + 4 = 7.$$

По формуле площади поверхности усеченного конуса получим

$$S = \pi \cdot BC(DC + AB) = \pi \cdot 3\sqrt{2}(4 + 7) = 33\sqrt{2}\pi.$$

Ответ: $33\sqrt{2}\pi$

Задание 5.

Найдите площадь полной поверхности усечённого конуса, если радиусы оснований равны 2 и 4, а образующая наклонена под углом 45° к основанию.

Решение.

Так как образующая образует с основанием угол, равный 45° , высота конуса равна разности радиусов его оснований, то есть 2. Найдем образующую по теореме Пифагора:

$$(R - r)^2 + h^2 = l^2 \Leftrightarrow 2^2 + 2^2 = l^2 \Leftrightarrow l = 2\sqrt{2}.$$

Площадь полной поверхности усеченного конуса равна сумме площади боковой поверхности и площадей оснований конуса. Имеем:

$$S = \pi l(R + r) + \pi R^2 + \pi r^2 = 2\sqrt{2} \cdot (2 + 4) \cdot \pi + 2^2 \cdot \pi + 4^2 \cdot \pi = (12\sqrt{2} + 20)\pi.$$

Ответ: $12\sqrt{2}\pi$.

Вопросы для закрепления:

1. Как можно получить усечённый конус?
2. Что является осевым сечением усечённого конуса?
3. Как найти боковую сторону равнобедренной трапеции?

Домашнее задание:

1. Законспектировать основные теоретические сведения.
2. Ответить на вопросы для закрепления
3. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия.

Геометрия. 10-11 классы : учеб. для общеобразоват. организаций : базовый и углубл. уровни / [Л. С. Атанасян и др.]. – 10-е изд., стер. – Москва : Просвещение, 2022. – 287 с. : ил. – (МГУ – школе).

Гл. IV §2. п.42 с. 96-97 №366, №371