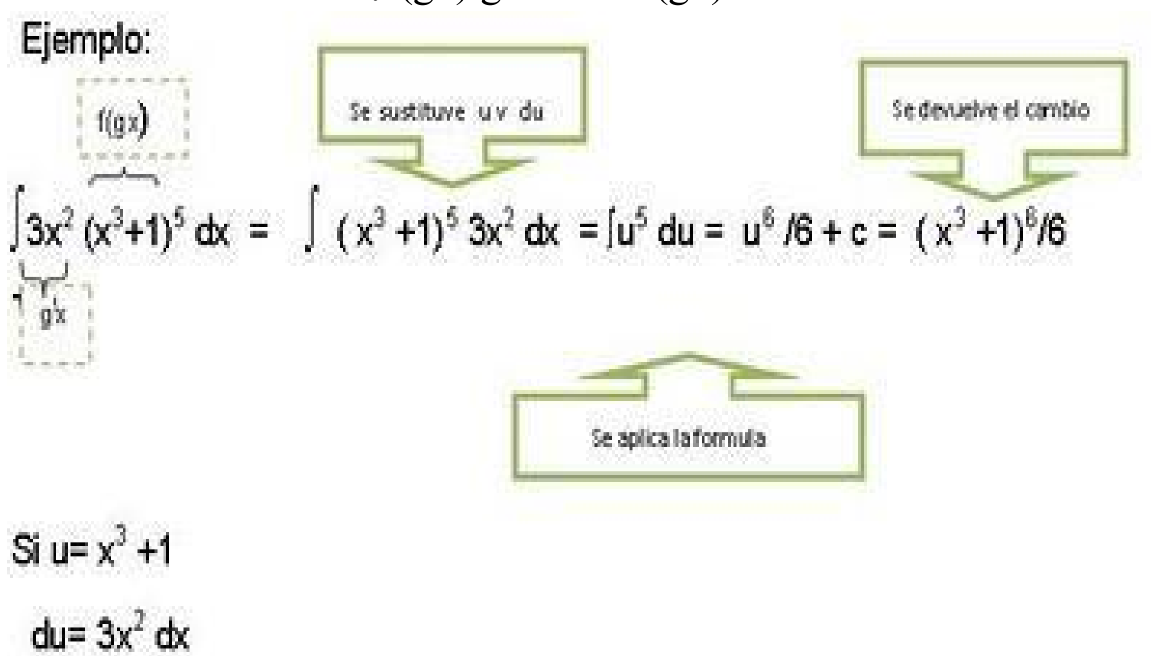
Métodos de integración

La integración tiene algunos métodos, llamados técnicas de integración que permiten reducir ciertas integrales a otra ya conocidas (la tabla). Entre esas técnicas se tiene el cambio de variable que se estudia a continuación.

Cambio de Variable o Sustitución

Esta técnica no es otra cosa que la regla de la cadena de las integrales. Lo cual sugiere que hay una función cuya derivada está presente en la integral. Es para funciones compuestas. Recordando que cuando se deriva este tipo de funciones (compuestas) se considera su derivada interna por lo tanto ella debe estar presente en su integral.

$$\int f(gx)\, g'x\, dx = F(gx) + C$$



Se sustituye u y du

Se devuelve el cambio

$$\int \sqrt{\underbrace{4x\text{-}3}_{f(gx)}}\, dx = \int dx = \int u^{1/2}\, du/4 = u^{3/2}/(3/2) + c = 2\,(4x+3)^{6}/3 + c.$$

Se aplica la formula

Si u= 4x -3

du= 4 dx se despeja dx =du/4

Fórmula de la inversa

$$\int \frac{sen\, x\, dx}{9 + cos^2 x} = \int \frac{-du}{9 + u^2} = -\frac{1}{3} arctg \frac{u}{3} + c = -\frac{1}{3}\, arctg\, (\frac{\cos x}{3}) + c$$

u=cos x

du = -senx dx despejando –du = senx dx

$$\int \frac{lnx\ dx}{x} = \int lnx \frac{dx}{x} = \int u\, du = \frac{u^2}{2} + c = \frac{lnx^2}{2} + c$$

Si u = lnx

du= dx/x

$$\int \frac{dx}{x(4+\ln^2 x)} = \int \frac{du}{4+u^2} = \frac{1}{2} artg \frac{lnx}{2} + c$$

U=lnx

du=dx/x

pero como en la integral cuando se realiza el cambio de variable la x no esta incluida se despeja de la sustitución

$$\int x\sqrt{x-2}\,dx = \int (u+2)u^{\frac{1}{2}}du = \int u^{\frac{3}{2}} + 2u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + 2\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c =$$

U=x-2⇒ x=u+2

du=dx

$$\frac{2u^{\frac{5}{2}}}{5} + 4\frac{u^{\frac{3}{2}}}{3} + c = \frac{2(x-2)^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{4(x-2)^{\frac{3}{2}}}{3} + c$$

Integración por partes

El método de integración por partes está basado en la derivada de un producto de funciones como se muestra a continuación

$$d(u.v) = u\,dv + v\,du$$

por eso es que se usa para integrales que contienen dos funciones que se multiplican entre si.

$$\int d(u.v) = \int u\,dv + \int v\,du \quad \text{(se integra en ambos lados de la fórmula)}$$

$$(u.v) = \int u\,dv + \int v\,du \text{ (resolviendo la integral)}$$

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du \text{ (despejando, queda la fórmula de la integración por partes)}$$

Se llama integración por partes, porque la integral se divide en dos partes una **u** y otra **dv.** La integral debe estar completa y sin alterar la operación dentro de ella. Esta selección es lo más importante y se debe realizar de la siguiente manera

1.- En la parte que corresponde a **dv** debe ser la función más fácil de integrar,
2.- En **u** deben ir aquellas funciones que no tienen integral directa (funciones logarítmicas e inversas), luego se pueden considerar las funciones algebraicas puesto que la derivada es reductiva. Las funciones trigonométricas y exponenciales son más sencillas de trabajar.

Una de las reglas para saber si el procedimiento realizado es correcto la integral resultante debe ser más sencilla que la original o sino de igual dificultad.

Función más fácil de integrar

$$\int u\,dv = u\,v + \int v\,du$$

Más fácil

Funciones que no tienen integral directa

Ejemplo

u= lnx
du =dx/x

Aplicando la fórmula

$$\int \ln x\,dx = x\,lnx - \int \frac{x\,dx}{x} = x lnx - x + c$$

dv = dx

v = x

Se aplica la fórmula de la integración por partes, el procedimiento se puede repetir tantas veces como la integral lo amerite. La constante de Integración solo debe considerase en la integral principal no en la que completa la fórmula.

Ejemplo 2

dv= senx dx
v= - cosx

$$\int x\, senx\, dx = -xcos + \int cosx\, dx = -x\, cosx + sen\, x + c$$

U= x
Dx= dx

La siguiente integral no se le puede aplicar la integración por partes directamente, se tiene que realizar un cambio de variable previo. Al observar que la función exponencial en su exponente genera una derivada y que esta debe estar dentro de la integral.

$$\int x^3 e^{x^2} dx \quad = \quad \int \frac{x^3 e^r}{2x} dr = \int \frac{x^2 e^r}{2} dr$$

$r = x^2$

$dr = 2x\,dx \Rightarrow dx = dr/2x$

De nuevo en la integral y al simplificar las x

$r = x^2$

$$= \frac{1}{2}\int r\, e^r\, dr = \frac{1}{2}\left[r e^r - \int e^r dx\right] = \frac{1}{2}\left[x^2 e^{x^2} - e^{x^2}\right] + c$$

$u = r \qquad dv = e^r\, dr$

$du = dr \qquad v = e^r$

Se devuelve el cambio

-

El siguiente ejercicio se conoce como integrales cíclicas, puesto que reaparece la original y debe despejarse como se demuestra a continuación:

$$\int e^x cosx\, dx = e^x senx - \int e^x sen\, x\, dx =$$

U= e^x dv= cosx dx
du= e^x dx v= senx

U= e^x dv= senx dx
du= e^x dx v= - cosx
nota se debe considerar los mismos que en la anterior.

$$e^x senx - \left[-e^x cosx - \int e^x(-cosx)dx\right] = e^x senx + \left[e^x cosx - \int e^x cosxdx\right]$$

En todo este procedimiento hay que prestar mucha atención a los signos.
Cabe destacar que nunca el resultado de estas integrales puede ser cero.
Recordar las integrales son funciones que han sido derivadas

Despejando la integral

$$2\int e^x cosx\, dx = e^x senx + e^x cosx + c$$

El resultado de esta integral es el despeje de la misma

$$\int e^x cosx\, dx = \frac{1}{2}(e^x senx + e^x cosx) + c$$

Ejercicios

$$\int \vartheta \cos\pi\vartheta \, d\vartheta$$

$$\int x^2 \, senx \; dx$$

$$\int x^3 \ln x \, dx$$

$$\int arcsenx \, dx$$

$$\int 4\,x\, sec^2\, 2x \, dx$$

$$\int pe^{-p} \, dp$$

$$\int (x^2 + x + 1)e^x \, dx$$

$$\int x\, tg^2\, x \, dx$$

$$\int ln(x + x^2) \, dx$$

$$\int t \operatorname{arcsec} t \, dt$$

$$\int e^{2x} \cos 3x \, dx$$

$$\int x\sqrt{1 - x} \;\; dx$$

$$\int sen(lnx) \, dx$$

$$\int \frac{\ln(1 + x)}{\sqrt{1 + x}} \;\; dx$$