

Etapes	Contenu	observations															
Activité d'initiation	<u>I. Proposition – fonction propositionnelle</u> <u>1. Proposition</u> 1) Cocher la case convenable : <table><tr><th>Enoncé</th><th>Vrai</th><th>Faux</th></tr><tr><td>Tout nombre pair est divisible par 4</td><td></td><td></td></tr><tr><td>La somme de deux nombres pairs est un nombre pair</td><td></td><td></td></tr><tr><td>La fonction $f : x \mapsto x^2$ est une fonction paire</td><td></td><td></td></tr><tr><td>Le nombre 214 est un multiple de 3</td><td></td><td></td></tr></table> 2) Y a-t-il des énoncés sont vrais et faux au même temps.	Enoncé	Vrai	Faux	Tout nombre pair est divisible par 4			La somme de deux nombres pairs est un nombre pair			La fonction $f : x \mapsto x^2$ est une fonction paire			Le nombre 214 est un multiple de 3			
	Enoncé	Vrai	Faux														
	Tout nombre pair est divisible par 4																
	La somme de deux nombres pairs est un nombre pair																
	La fonction $f : x \mapsto x^2$ est une fonction paire																
Le nombre 214 est un multiple de 3																	
Résumé du cours	⇒ <u>Définition</u> On appelle une proposition un énoncé mathématique (texte mathématique) qui a un sens pouvant être vrai ou faux (mais pas les deux en même temps), et se note souvent par les lettres P,Q ou R,..... <u>Remarque</u> • L'adjectif « vrai » ou « faux » qui accompagne la proposition s'appelle « valeur de vérité » • Si P est une proposition vraie, on dit alors que la valeur de vérité de P est « Vrai » et se note « V » et Si P est une proposition fausse, on dit alors que la valeur de vérité de P est « faux » et se note « F ». Table de vérité <table><tr><td colspan="2">P</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td colspan="2">P</td></tr><tr><td>V</td><td>F</td></tr></table> Ou <u>Exemples</u> $P : "3 \times 2 = 6"$ V • $Q : "-1$ est une solution de l'équation $x^2 - 2x + 3 = 0"$ F	P		1	0	P		V	F	60 minutes							
	P																
	1	0															
	P																
V	F																

⇒ Opérations sur les propositions

⇒ Négation d'une proposition

Etant donné une proposition P .

La négation de la proposition P , est la proposition qui a une valeur de vérité « faux » si la proposition P est vraie, et une valeur de vérité « vrai » si la proposition P est fausse et se note $\bar{P}$ ou $\neg P$.

P	$\bar{P}$
V	F
F	V

Table de vérité

Remarque

<i>Symbole</i>	<i>Négation</i>
=	≠
<	≥
>	≤
≤	>
≥	<
∈	∉

Evaluation

Application①

Donner la négation des propositions suivantes, en précisant la valeur de vérité

- $P: "\sqrt{17} \leq \sqrt{8} + \sqrt{9}"$; • $Q: "\pi \in \mathbb{R}"$; • $R: "\frac{4}{5} \neq \frac{16}{25}"$

Résumé r du cours

⇒ Conjonction de deux propositions

La conjonction de deux proposition P et Q est la proposition qui est vrai uniquement si les deux propositions P et Q sont vraies en même temps et se note (P et Q) ou ($P \wedge Q$).

Table de vérité

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Evaluation	<u>Application ②</u> Donner la valeur de vérité des propositions suivantes : • <math>P: "3 \in \mathbb{N} \text{ <u>et</u> } 3 \times 5 = 14"</math> . • <math>Q: "5 \text{ divise } 35 \text{ <u>et</u> } 5 \text{ est un nombre premier}"</math> • <math>R: " \text{Le nombre } x = 7 \text{ <u>et</u> } 4x - 28 = 0"</math> . • <math>S: "12 \text{ est un nombre impair <u>et</u> } 12 \notin 0"</math>																
Résumer du cours	⇒ <u>Disjonction de deux propositions</u> La disjonction de deux proposition P et Q est la proposition qui une valeur de vérité « vrai » si au moins l'un des deux propositions est vraie on la note $(P \text{ ou } Q)$ ou $P \vee Q$. <u>Table de vérité</u> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th>P</th><th>Q</th><th>$P \vee Q$</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>V</td><td>V</td><td>V</td></tr> <tr> <td>V</td><td>F</td><td>V</td></tr> <tr> <td>F</td><td>V</td><td>V</td></tr> <tr> <td>F</td><td>F</td><td>F</td></tr> </tbody> </table>	P	Q	$P \vee Q$	V	V	V	V	F	V	F	V	V	F	F	F	
P	Q	$P \vee Q$															
V	V	V															
V	F	V															
F	V	V															
F	F	F															
<u>Evaluation</u>	<u>Application ③</u> Donner la valeur de vérité des propositions suivantes : • <math>P: "\sqrt{2} \in \mathbb{N} \text{ <u>ou</u> } 0 \neq 5"</math> . • <math>Q: "12 \leq 7 \text{ <u>ou</u> } 5 \text{ est un nombre pair}"</math> . • <math>R: "3 + 3 = 5 \text{ <u>ou</u> } 7^2 > 36"</math> .	120 minutes															
	⇒ <u>Implication de deux propositions</u> L'implication de deux proposition P et Q est la proposition qui une valeur de vérité « faux » si la proposition P est vraie et la proposition Q est fausse et on la note $P \Rightarrow Q$. $P \Rightarrow Q$: se lit P implique Q ou bien « si P alors Q ».																

Résumer du cours	<u>Table de vérité</u> <table> <tr> <th>P</th><th>Q</th><th>$P \Rightarrow Q$</th></tr> <tr> <td>V</td><td>V</td><td>V</td></tr> <tr> <td>V</td><td>F</td><td>F</td></tr> <tr> <td>F</td><td>V</td><td>V</td></tr> <tr> <td>F</td><td>F</td><td>V</td></tr> </table>	P	Q	$P \Rightarrow Q$	V	V	V	V	F	F	F	V	V	F	F	V	
P	Q	$P \Rightarrow Q$															
V	V	V															
V	F	F															
F	V	V															
F	F	V															
<u>Évaluation</u>	<u>Application④</u> Donner la valeur de vérité des propositions suivantes : • $P: "2 < 5 \Rightarrow -1^2 = 1"$; • $S: "0 > 3 \Rightarrow 3 \text{ est un nombre paire }"$. • $Q: "2^2 = -4 \Rightarrow \sqrt{25} = 5"$; • $T: "6 = 2 \times 3 \Rightarrow 37 \text{ est un nombre premier }"$																
Résumer du cours	<u>Remarque</u> • L'implication $Q \Rightarrow P$ s'appelle l'implication réciproque de $P \Rightarrow Q$. • "$P \Rightarrow Q$" et "$Q \Rightarrow P$" n'ont pas nécessairement même valeur de vérité. <u>Exemple</u> • $P: "4 \text{ est un nombre pair }"$; $Q: "-3 > 0"$. La proposition "$P \Rightarrow Q$" est fausse mais la proposition "$Q \Rightarrow P$" est vraie. • $P: "3 = 1.5"$; $Q: "36 \text{ divise } 8"$. La proposition "$P \Rightarrow Q$" est vraie et aussi la proposition "$Q \Rightarrow P$" est vraie.																
Résumer du cours	$\Rightarrow$ <u>Équivalence de deux propositions</u> <u>L'équivalence</u> de deux proposition P et Q est la proposition qui une valeur de vérité « vrai » si P et Q ont même valeur de vérité on la note $P \Leftrightarrow Q$. $P \Leftrightarrow Q$: se lit P équivalente la proposition Q . <table> <tr> <th>P</th><th>Q</th><th>$P \Leftrightarrow Q$</th></tr> <tr> <td>V</td><td>V</td><td>V</td></tr> <tr> <td>V</td><td>F</td><td>F</td></tr> <tr> <td>F</td><td>V</td><td>F</td></tr> <tr> <td>F</td><td>F</td><td>V</td></tr> </table> <u>Table de vérité</u>	P	Q	$P \Leftrightarrow Q$	V	V	V	V	F	F	F	V	F	F	F	V	
P	Q	$P \Leftrightarrow Q$															
V	V	V															
V	F	F															
F	V	F															
F	F	V															

<u>Évaluation</u>	<u>Application ⑤</u> Donner la valeur de vérité des propositions suivantes : • P : " ABC un triangle rectangle en A $\Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$ " . • Q : "$x^2 + 1 > 0 \Leftrightarrow -4 \in \mathbb{R}$ " . • R : "$4 \times 3 = 20 \Leftrightarrow 5$ est un nombre paire " . • S : "$1.25 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 25$ est un multiple de 5 " .	
<u>Résumer du cours</u>	$\Rightarrow$ <u>Lois de Morgan</u> Soient P, Q et R trois propositions on a (1). $P \Leftrightarrow \overline{\overline{P}}$ (2). $(P \text{ et } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ et } P)$ (3). $(P \text{ ou } Q) \Leftrightarrow (Q \text{ ou } P)$ (4). $\overline{(P \text{ et } Q)} \Leftrightarrow (\overline{P}) \text{ ou } (\overline{Q})$ (5). $\overline{(P \text{ ou } Q)} \Leftrightarrow (\overline{P}) \text{ et } (\overline{Q})$ (6). $(P \text{ et } (Q \text{ ou } R)) \Leftrightarrow (P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)$ (7). $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$	
<u>Activité d'initiation</u>	<u>2. Fonction propositionnelle</u> <u>Activité</u> On considère l'expression suivante : "$x \in \mathbb{R} / x^2 - x \geq 0$" 1) L'expression précédente s'agit-il d'une proposition ? 2) Donner la valeur de vérité de l'expression précédente si $x = 2$ et si $x = \frac{1}{2}$	
<u>Résumer du cours</u>	<u>Définition</u> On appelle fonction propositionnelle, tout énoncé mathématique contient une ou plusieurs variables appartenant à un ensemble bien définie, et qui est susceptible d'être une proposition si on attribue à ses variables certaines valeurs particulier dans l'ensemble et se note $P(x), P(x, y), \dots$ <u>Exemple</u> • $P(x) : "x \in \mathbb{R} ; x + 2 > 0"$ est une fonction propositionnelle $P(-1)$ est vraie et $P(-5)$ est fausse. $Q(x, y) : "(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 = 4"$ est une fonction propositionnelle $Q(0;2)$ est vraie et $Q(-1;1)$ est fausse.	

Activité d'initiation	II. <u>Quantificateurs</u> Activité Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes P : " Il existe au moins un nombre réel x tel que $3x - 2 = 4$" Q : " Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x^2 + 1 \geq 0$" S : " Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x^2 > 0$"	
	Définition Soit "$(x \in E); P(x)$" une fonction propositionnelle telle que E est un ensemble bien défini. $\exists$ La proposition "$(\exists x \in E); P(x)$" est une proposition vraie lorsque on trouve au moins un x dans E pour lequel $P(x)$ est vraie. On dit dans ce cas « il existe un x appartenant à E tel que $P(x)$ soit vraie » Le symbole $\exists$ s'appelle le quantificateur existentiel. $\forall$ La proposition "$(\forall x \in E); P(x)$" est une proposition vraie lorsque les propositions $P(x)$ soient vraies pour tout x dans E. On dit dans ce cas « pour tout x appartenant à E, $P(x)$ soit vraie » Le symbole $\forall$ s'appelle le quantificateur universel. En particulier : S'il existe un seul élément x dans E vérifier $P(x)$, alors dans ce cas on écrit "$(\exists! x \in E), P(x)$". Le symbole $\exists!$ s'appelle quantificateur d'existence et d'unicité	60 minutes
Résumer du cours Résumer de cours	Exemple $\otimes$ On considère la fonction propositionnelle suivante : "$(x \in \mathbb{R}); x^2 - 1 = 0$" "$(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 - 1 = 0$" F ; "$(\exists x \in \mathbb{R}); x^2 - 1 = 0$" V ; "$(\exists! x \in \mathbb{R}); x^2 - 1 = 0$" F	

	<u>Question :</u> 1) Donner la valeur de vérité des propositions suivantes : $P: "(\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}); y = 2x - 1"$; $Q: "(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}); y = 2x - 1"$ $S: "(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}); y = 2x - 1"$ 2) Que remarquez-vous ?	
<u>Résumer du cours</u>	<u>Remarque :</u> • L'ordre des quantificateurs de même nature n'a aucune importance pour déterminer le sens du terme quantifié. • L'ordre des quantificateurs de nature différents est important pour déterminer le sens du terme quantifié.	
<u>Evaluation</u>	<u>Exercice 1 de la série</u>	
<u>Résumer du cours</u>	⇒ <u>Négation d'une proposition quantifiée</u> <u>Propriété</u> Soit "$(x \in E); P(x)$" une fonction propositionnelle ⊗ La négation de la proposition "$(\exists x \in E); P(x)$" est la proposition "$(\forall x \in E); \overline{P(x)}$". ⊗ La négation de la proposition "$(\forall x \in E); P(x)$" est la proposition "$(\exists x \in E); \overline{P(x)}$". <u>Exemple</u> • La négation de la proposition $P: "(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 \geq 0"$ est la proposition $\overline{P}: "(\exists x \in \mathbb{R}); x^2 < 0"$. • La négation de la proposition $P: "(\exists x \in \mathbb{R}); x^2 - 2 = 0"$ est la proposition $\overline{P}: "(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 - 2 \neq 0"$.	
	<u>Application⑥</u> Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes, puis donner leur négation. • "$(\forall x \in \mathbb{R}); x^2 + 3x + 4 > 0"$; • "$(\exists x \in \mathbb{R}); 2x^2 + 3x = 0"$; • "$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) x^2 + y^2 \geq 1"$. • "$(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}); x + y > 0"$; • "$(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}); x + y > 0"$; • "$(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}^*); x + y = 0"$.	
	Exercice 02 de la série	

III. Raisonnements mathématiques

1. Raisonnement par la contraposition

Définition

Etant donné deux propositions P et Q

Pour montrer que la proposition $P \Rightarrow Q$ est vraie, il suffit de montrer que $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ est vraie.

Ce raisonnement est basé sur la loi logique suivant $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$

Exemple

Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ ; x \neq y \Rightarrow 3\sqrt{x} + 1 \neq 3\sqrt{y} + 1$

Pour montrer $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ ; x \neq y \Rightarrow 3\sqrt{x} + 1 \neq 3\sqrt{y} + 1$ il suffit de

montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ ; 3\sqrt{x} + 1 = 3\sqrt{y} + 1 \Rightarrow x = y$

On a $3\sqrt{x} + 1 = 3\sqrt{y} + 1 \Rightarrow 3\sqrt{x} = 3\sqrt{y} \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y} \Rightarrow x = y$

Donc d'après le raisonnement par le contraposé on a $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ ; x \neq y \Rightarrow 3\sqrt{x} + 1 \neq 3\sqrt{y} + 1$.

**Résumer
de cours**

**120
minutes**

Evaluation

Application(7) : Exercice 04 de la série

2. Raisonnement par équivalences successives

Propriété

Soient P, Q et R trois propositions

Raisonnement par l'équivalence est basé sur la loi logique suivant :

« Si $P \Leftrightarrow Q$ et $Q \Leftrightarrow R$ alors $P \Leftrightarrow R$ » .

Exemple

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$; montrer que $x + \frac{1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$

On a $x + \frac{1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow x^2+1 \geq 2x \Leftrightarrow x^2+1-2x \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$

**Résumer
du cours**

	<u>Application⑧</u> • Soit $x \in \mathbb{R}$ montrer que • $\sqrt{x^2+3} \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 1$; $x-1 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{5} < \frac{1}{x+1} < \frac{2}{3}$ • Soient x et y deux nombres réels tels $x \geq 1$ et $y \geq 4$ montrer que • $\sqrt{x-1} + 2\sqrt{y-4} = \frac{x+y}{2} \Leftrightarrow x = 2$ et $y = 8$	
<u>Evaluation</u>	<u>Exercice 05 de la série</u>	
<u>Résumer de cours</u>	<u>3. Raisonnement par disjonction des cas</u> <u>Propriété</u> Etant donné deux propositions P et Q Il faut que les deux propositions $P \Rightarrow Q$ et $\bar{P} \Rightarrow Q$ soient vraies. <u>Exemple</u> Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $(E): 2 x-1 + x = 0$ <u>Premier cas</u> : si $x-1 \geq 0$ alors $x-1 = x-1$ Donc l'équation (E) devient $2(x-1) + x = 0$ c.-à-d. $2x-2+x=0$ par conséquent $x = \frac{2}{3}$ <u>Deuxième cas</u> : si $x-1 \leq 0$ alors $x-1 = -x+1$ Donc l'équation (E) devient $2(-x+1) + x = 0$ c.-à-d. $-2x+2+x=0$ par conséquent $x = 2$ D'où $S = \emptyset$	
<u>Evaluation</u>	<u>Application⑨</u> : Exercice 03 de la série	
<u>Résumer du cours</u>	<u>4. Résonnement par contre-exemple</u> <u>Exemple</u> Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) ; x^2 > 0$ est fausse Si $x = 0$ alors $0^2 > 0$ ce qui est impossible par conséquent $(\forall x \in \mathbb{R}) ; x^2 > 0$ est fausse.	120 minutes

Evaluation	<u>Application</u>^⑩ Montrer que les propositions suivantes sont fausses • $(\forall x \in \mathbb{Z})$ le nombre x^2 est un nombre impair • $(\forall n \in \mathbb{Z})$ le nombre $n^2 + n + 1$ est un nombre premier.	
Activité	<u>Exercice 06 de la série</u> <u>1. Raisonnement par l'absurde</u> <u>Activité</u> Soient P et Q deux propositions telles que "$\overline{Q} \Rightarrow P$ et $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$" est une proposition vraie Si Q est fausse, que peut-on dire pour la valeur de vérité de P.	
	<u>Règle</u> Soit P une proposition. Pour montrer que la proposition P est vraie, on suppose que P est fausse puis trouver la contradiction avec les données d'exercices et le prérequis.	
	<u>Exemple</u> Montrer $(\forall x \in \mathbb{Z}); x^2 \neq x - 1$ On suppose que $(\forall x \in \mathbb{Z}); x^2 \neq x - 1$ alors $(\exists x \in \mathbb{Z}); x^2 = x - 1$	
Résumer du cours	On a $x^2 = x - 1 \Rightarrow x^2 - x + 1 = 0$ On a $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$ Donc l'équation n'a pas de solutions ; donc il y a une contradiction Par conséquent $(\forall x \in \mathbb{Z}); x^2 \neq x - 1$	
Evaluati on	<u>Application</u>^{①①} 1) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{Z}) ; n - 1 \neq n - 2$ 2) ABC un triangle de côtés $AB = 4, AC = 3$ et $BC = 6$. Montrer que le triangle ABC n'est pas rectangle en A. 3) Soient $(\forall x \in \mathbb{Z}_+^*)(\forall y \in \mathbb{Z}_+^*)(\forall z \in \mathbb{Z}_+^*)$ tels que $xyz > 1$ et $x + y + z < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ Montrer que $x \neq 1, y \neq 1$ et $z \neq 1$	

5. Résonnement par récurrence

Propriété

Soit $P(n)$ une fonction propositionnelle et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$

Pour montrer que " $(\forall n \geq n_0); P(n)$ " est vraie, on suit les étapes suivantes :

- Vérifier que $P(n_0)$ est vraie
- Supposer que " $P(n)$ " est vraie.
- Montrer que " $(\forall n \geq n_0); P(n+1)$ " est vraie
- Conclure que " $(\forall n \geq n_0); P(n)$ " est vraie
- D'après le principe de récurrence on a " $(\forall n \geq n_0); P(n)$ ".

Remarque

En utilisant le principe de récurrence si n est un nombre entier naturel.

Exemple

Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); 3^n \geq 2n+1$

Pour $n=0$ on a $3^0 = 1 \geq 2 \times 0 + 1$ est une proposition vraie

Supposons que $3^n \geq 2n+1$ est vraie et Montrer $3^{n+1} \geq 2(n+1)+1$ c.-à-d Mq

$$3^{n+1} \geq 2n+3$$

$$\text{On a } 3^n \geq 2n+1 \Rightarrow 3 \times 3^n \geq 3(2n+1) \Rightarrow 3^{n+1} \geq 6n+3$$

$$\text{Or } 6n+3 \geq 2n+3$$

$$\text{Alors } 3^{n+1} \geq 2n+3$$

d'après le principe de récurrence on a $(\forall n \in \mathbb{N}); 3^n \geq 2n+1$.

Application①②

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

- $2^n \geq n+1$
- $1+2+2^2+2^3+\dots+2^n = 2^{n+1}-1$
- Le nombre 4^n-1 est un multiple de 3.

2) Montrer $(\forall n \in \mathbb{N}^*); 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

Résumer
du cours

Évaluati
on