

**МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ  
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ  
МАТЕМАТИКА. ОТБОРОЧНЫЙ ТУР  
11 класс**

---

**Задание 1.1**

Назовем билетик «удачным», если сумма цифр шестизначного номера кратна 13. В этот раз Вася приобрел два «удачных» билетика, идущих подряд, то есть их номера отличаются на один. Найдите номера этих билетиков, если известно, что номер одного из билетов состоит только из 4 и 9, причём известно, что первая цифра – 4, а последняя – 9, а номер другого билетика состоит только из 4, 5 и трёх 0. В ответ запишите наибольший номер из двух.

**Ответ:** 445000

**Решение:** Существует довольно большое количество «удачных» билетиков, которые находятся при подборе. Сумма цифр в одном числе равна 13, так как точно есть четверка, три нуля, при наличии двух пятерок сумма равна 14, значит в записи две четверки, пятерка и три нуля. Сумма цифр второго числа можно выразить уравнением в натуральных числах:  $4 * x + 9 * y = 13 * z$ . Так как эти два числа последовательны, то при подборе получаем 444999 и 445000, тогда ответ 445000.

**Задание 1.2**

Назовем билетик «удачным», если сумма цифр шестизначного номера кратна 13. В этот раз Вася приобрел два «удачных» билетика, идущих подряд, то есть их номера отличаются на один. Найдите номера этих билетиков, если известно, что номер одного из билетов состоит только из 4 и 9, причём известно, что первая цифра – 4, а последняя – 9, а номер другого билетика состоит только из 4, 5 и трёх 0. В ответ запишите наименьший номер из двух.

**Ответ:** 444999

**Решение:** Существует довольно большое количество «удачных» билетиков, которые находятся при подборе. Сумма цифр в одном числе равна 13, так как точно есть четверка, три нуля, при наличии двух пятерок сумма равна 14, значит в записи две четверки, пятерка и три нуля. Сумма цифр второго числа можно выразить уравнением в натуральных числах:  $4 * x + 9 * y = 13 * z$ . Так как эти два числа последовательны, то при подборе получаем 444999 и 445000, тогда ответ 444999.

**Задание 2.1**

В треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $AD$ . Найдите угол  $A$ , если известно, что  $AD=DC$  и что  $AC=2AB$ ?

**Ответ:** 60

**МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ  
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ  
МАТЕМАТИКА. ОТБОРОЧНЫЙ ТУР  
11 класс**

---

**Решение:**

$AD$  – биссектриса угла  $A$ , треугольник  $CDA$  – равнобедренный по определению, тогда  $DAC = DCA$ . Обозначим  $DCA = \alpha$ .  $BAC = 2\alpha$ ,  $CBA = 180 - 3\alpha$ .

Запишем теорему синусов для треугольника  $ABC$ .  $\frac{AC}{\sin \angle ABC} = \frac{AB}{\sin \angle ACB}$ , тогда из пропорции следует  $\frac{\sin \alpha}{\sin (180^\circ - 3\alpha)} = \frac{\sin \alpha}{\sin 3\alpha} = \frac{1}{2}$ , после этого необходимо раскрыть синус тройного угла и решить уравнение. Угол  $\alpha = 30^\circ$ , то есть  $BCA = 30^\circ$ , тогда  $BAC = 60^\circ$

**Задание 2.2**

В треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $AD$ . Найдите угол  $C$ , если известно, что  $AD=DC$  и что  $AC=2AB$ ?

**Ответ:** 30

**Решение:**

$AD$  – биссектриса угла  $A$ , треугольник  $CDA$  – равнобедренный по определению, тогда  $DAC = DCA$ . Обозначим  $DCA = \alpha$ .  $BAC = 2\alpha$ ,  $CBA = 180 - 3\alpha$ .

Запишем теорему синусов для треугольника  $ABC$ .  $\frac{AC}{\sin \angle ABC} = \frac{AB}{\sin \angle ACB}$ , тогда из пропорции следует  $\frac{\sin \alpha}{\sin (180^\circ - 3\alpha)} = \frac{\sin \alpha}{\sin 3\alpha} = \frac{1}{2}$ , после этого необходимо раскрыть синус тройного угла и решить уравнение. Угол  $\alpha = 30^\circ$ , то есть  $BCA = 30^\circ$ ,

**Задание 3.1**

На новогодней гирлянде 100 электрических огоньков. Гирлянда имеет несколько режимов. Сначала светятся все огоньки, если нажать кнопку, гаснет каждый второй огонек, при следующем нажатии кнопки переключаются каждый третий огонек (светился – отключается, не светился – начинает светиться), затем нажимают кнопку, происходит переключение каждого четвертого огонька, затем каждого пятого и т.д. Найдите вероятность, что через сто нажатий, случайный огонек горит.

**Ответ:** 0.1

**Решение:** Огонек будет гореть только, если его переключили нечетное количество раз, то есть у номера этого огонька нечетное количество натуральных делителей, тогда номер огонька – это квадрат числа. Получается, что от 1 до 100 всего 10 огоньков с номерами 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 и 100 будут гореть. Тогда ответ 0.1

**Задание 3.2**

**МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ  
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ  
МАТЕМАТИКА. ОТБОРОЧНЫЙ ТУР  
11 класс**

---

На новогодней гирлянде 100 электрических огоньков. Гирлянда имеет несколько режимов. Сначала светятся все огоньки, если нажать кнопку, гаснет каждый второй огонек, при следующем нажатии кнопки переключаются каждый третий огонек (светился – отключается, не светился – начинает светиться), затем нажимают кнопку, происходит переключение каждого четвертого огонька, затем каждого пятого и т.д. Найдите вероятность, что через сто нажатий, случайный огонек не горит.

**Ответ:** 0.9

**Решение:**

Огонек будет гореть только, если его переключили нечетное количество раз, то есть у номера этого огонька нечетное количество натуральных делителей, тогда номер огонька – это квадрат числа. Получается, что от 1 до 100 всего 10 огоньков с номерами 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 и 100 будут гореть. Тогда не будет гореть 90 огоньков из 100, то есть  $P = 0.9$

**Задание 4.1**

Найдите  $x_1$  - корень уравнения  $1 - \sin \sin x = \cos \cos 2x$ , принадлежащий отрезку  $\left[-\frac{13\pi}{12}; -\frac{11\pi}{12}\right]$ . В ответ запишите значение  $\cos \cos x_1 x_1$ .

**Ответ:** -1

**Решение:**

$$x = 1 - 2x$$

$$1 - 2x = 1 - \sin \sin x \Leftrightarrow 2x - \sin \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin \sin x (\sin x - 0.5) = 0$$

$$\{x = \pi k, k \in \mathbb{Z} \mid x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi t, t \in \mathbb{Z}\}$$

Отрезку принадлежит корень:  $-\pi$ , тогда ответ на вопрос задачи – это  $-1$ .

**Задание 4.2**

Найдите  $x_1$  - корень уравнения  $1 - \sin \sin x = \cos \cos 2x$ , принадлежащий отрезку  $\left[-\frac{13\pi}{12}; -\frac{11\pi}{12}\right]$ . В ответ запишите значение  $2 \cos \cos x_1$ .

**Ответ:** -2

**Решение:**

$$x = 1 - 2x$$

$$1 - 2x = 1 - \sin \sin x \Leftrightarrow 2x - \sin \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin \sin x (\sin x - 0.5) = 0$$

**МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ  
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ  
МАТЕМАТИКА. ОТБОРОЧНЫЙ ТУР  
11 класс**

---

$$\{x = \pi k, k \in \mathbb{Z} \mid x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi t, t \in \mathbb{Z}\}$$

Отрезку принадлежит корень:  $-\pi$ , тогда ответ на вопрос задачи — это — 2.

**Задание 5.1**

По разные стороны от центра шара проведены два параллельных сечения, расстояние между сечениями 12 см,  $S_1 = S_2 = 16\pi$  см<sup>2</sup>. Известно, что в шаре есть сферическая полость радиусом  $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$  см, центры шара и полости совпадают. Найдите отношение объёма шарового слоя без объёма полости к объёму полости.

**Ответ:** 479

**Решение:**

$R$  сечения равен 5, так как  $S = \pi R^2$ , тогда необходимо применить формулу нахождения объёма шарового слоя:  $V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi(R_1^2 + R^2)h$ . Объём полости равен  $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \pi$ . После подстановки значений в формулу получится  $V = 480\pi$ , поэтому  $\frac{480\pi - \pi}{\pi} = 479$

**Задание 5.2**

По разные стороны от центра шара проведены два параллельных сечения, расстояние между сечениями 6 см,  $S_1 = S_2 = 25\pi$  см<sup>2</sup>. Известно, что в шаре есть сферическая полость радиусом  $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$  см, центры шара и полости совпадают. Найдите отношение объёма шарового слоя без объёма полости к объёму полости.

**Ответ:** 185

**Решение:**  $R$  сечения равен 5, так как  $S = \pi R^2$ , тогда необходимо применить формулу нахождения объёма шарового слоя:  $V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi(R_1^2 + R^2)h$ . Объём полости равен  $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \pi$ . После подстановки значений в формулу получится  $V = 186\pi$ , поэтому  $\frac{186\pi - \pi}{\pi} = 185$

**Задание 6.1**

Рассмотрите только те трёхзначные числа, которые НЕ оканчиваются двумя нулями и ответьте на вопросы.

**МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ  
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ  
МАТЕМАТИКА. ОТБОРОЧНЫЙ ТУР  
11 класс**

---

Найдите пример трёхзначного числа больше 700, но меньше 900, которое в 90 раз больше суммы его цифр.

Какое наибольшее натуральное число можно получить при делении трёхзначного числа на сумму его цифр?

**Ответ:** 810 91

**Решение:** Представим число в следующем виде  $\overline{xyz} = 100x + 10y + z$ . Примером числа может выступить 810.

$$\begin{aligned}100x + 10y + z &= n(x + y + z) \\(100 - n)x &= y(n - 10) + z(n - 1) \leq 9(100 - n) \\n &\leq \frac{900 + 10y + z}{y + z + 9} = 10 + \frac{810 - 9z}{y + z + 9} \leq 10 + \frac{810}{10} = 91\end{aligned}$$

Пример: число 910.

**Задание 6.2**

Рассмотрите только те трёхзначные числа, которые НЕ оканчиваются двумя нулями и ответьте на вопросы.

Найдите пример трёхзначного числа больше 600, но меньше 900, которое в 90 раз больше суммы его цифр.

Найдите максимальное трёхзначное число, которое при делении на сумму своих цифр даст 91.

**Ответ:** 810 910

**Решение:**

Представим число в следующем виде  $\overline{xyz} = 100x + 10y + z$ . Примером числа может выступить 810.

$$\begin{aligned}100x + 10y + z &= n(x + y + z) \\(100 - n)x &= y(n - 10) + z(n - 1) \leq 9(100 - n) \\n &\leq \frac{900 + 10y + z}{y + z + 9} = 10 + \frac{810 - 9z}{y + z + 9} \leq 10 + \frac{810}{10} = 91\end{aligned}$$

Пример: число 910.