Chapitre 13
Probabilités : loi binomiale

I. Répétition d'expériences identiques et indépendantes

Exemples

- On lance un dé plusieurs fois de suite et on note à chaque fois le résultat. On répète ainsi la même expérience (lancer un dé) et les expériences sont indépendantes l'une de l'autre (un lancer n'influence pas le résultat d'un autre lancer).
- Une urne contient 2 boules blanches et 3 boules noires. On tire au hasard une boule et on la remet dans l'urne. On répète cette expérience 10 fois de suite. Ces expériences sont identiques et indépendantes.

Définition
Plusieurs expériences sont **identiques et indépendantes** si :
- Elles ont les mêmes issues,
- Chaque issue possède la même probabilité.

Propriété
On considère une expérience aléatoire à deux issues A et B avec les probabilités P(A) et P(B).
Si on répète l'expérience deux fois de suite :
- La probabilité d'obtenir l'issue A suivi de l'issue B est égale à $P(A)\times P(B)$
- La probabilité d'obtenir l'issue B suivi de l'issue A est égale à $P(B)\times P(A)$
- La probabilité d'obtenir deux fois l'issue A est égale à $\mathbf{P(A)^2}$
- La probabilité d'obtenir deux fois l'issue B est égale à $\mathbf{P(B)^2}$

-Admis-

Méthode

Représenter la répétition d'expériences identiques et indépendantes dans un arbre

🎥 **Vidéo https://youtu.be/e7jH8a1cDtg**

Une urne contient 3 boules blanches et 2 boules rouges. On considère l'expérience suivante : on tire au hasard une boule, on regarde la couleur et on la remet dans l'urne. On répète l'expérience deux fois de suite.

1. *Représenter l'ensemble des issues de ces expériences dans un arbre.*

2. *Déterminer la probabilité :*

a. *d'obtenir deux boules blanches*

b. *une boule blanche et une boule rouge*

c. *au moins une boule blanche.*

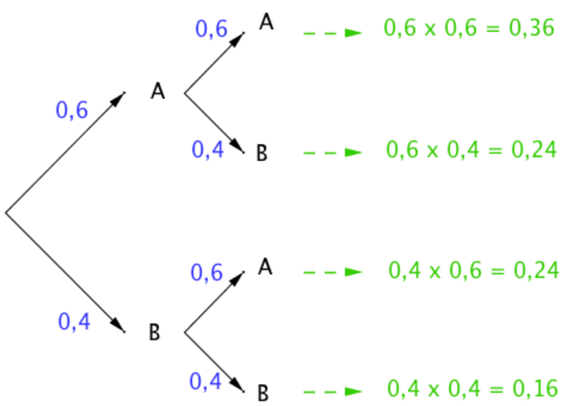
Solution

1. On note A l'issue « *On tire une boule blanche* » et B l'issue « *On tire une boule rouge* ».

$$P(A) = \frac{3}{5} = 0,6$$

Et

$$P(B) = \frac{2}{5} = 0,4$$



On résume les issues de l'expérience dans un arbre de probabilité.

2. a. Obtenir deux boules blanches correspond à l'issue (A ; A) :

$$P_1 = 0,36$$

2. b. Obtenir une boule blanche et une boule rouge correspond aux issues $(A; B)$ et $(B; A)$:

$$P_2 = 0,24 + 0,24 = 0,48$$

2. c. Obtenir au moins une boule blanche correspond aux issues $(A; B)$, $(A; A)$ et $(B; A)$:

$$P_3 = 0,24 + 0,36 + 0,24 = 0,84$$

Remarques

- Pour une expérience dont le nombre d'issues est supérieur à 2, le principe reste le même.
- Pour une expérience dont le nombre de répétition est supérieur à 2, le principe reste le même.

Exemple

On lance un dé à six faces 4 fois de suite. On considère les événements suivants : « On obtient un nombre pair » (événement **A**), « On obtient un 1 » (événement **B**), « On obtient un 3 ou un 5 » (événement **C**).
La probabilité d'obtenir la suite d'issues (A ; B ; A ; C) est égale à

$$P = \frac{3}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{72}$$

II. Épreuve de Bernoulli

Définition
Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire à deux issues que l'on peut nommer « succès » ou « échec ».

Exemples

- Le jeu du pile ou face : on considère par exemple comme succès « obtenir pile » et comme échec « obtenir face ».
- On lance un dé et on considère par exemple comme succès « obtenir un six » et comme échec « ne pas obtenir un six ».

Sur l'univers {succès, échec}, on peut définir une variable aléatoire X **prenant la valeur 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec**. Cette variable aléatoire suit une loi de Bernoulli.

Définition
Une **loi de Bernoulli** est une loi de probabilité qui suit le schéma suivant :

- La probabilité d'obtenir 1 est égale à p
- La probabilité d'obtenir 0 est égale à $1 - p$

p est appelé le paramètre de la loi de Bernoulli.

Remarque

Si la variable X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, on note $X \sim B(p)$

On note aussi
$P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$
$E(X) = p \cdot 1 + (1 - p) \cdot 0 = p$

$$Var(X) = E\left(X^2\right) - E^2(X) = p \cdot 1 + (1 - p) \cdot 0 - p^2 = p - p^2 = p(1 - p)$$

Exemple

Soit X la variable aléatoire réelle associée au deuxième exemple ci-dessus. $X \sim B\left(\frac{1}{6}\right)$

III. Loi binomiale

Définition
Un **schéma de Bernoulli** est la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Exemple

La répétition de 10 lancers d'une pièce de monnaie équilibrée est un schéma de Bernoulli de paramètres 10 et $\frac{1}{2}$

Si Y désigne la variable aléatoire associée à ce schéma, on note $Y \sim B\left(10, \frac{1}{2}\right)$

On notera que cette variable peut prendre toutes les valeurs entières de 0 (aucun succès) à 10 (10 succès).

Définition

On réalise un schéma de Bernoulli composé de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de paramètre p. Une **loi binomiale** est une loi de probabilité d'une variable aléatoire **X** qui donne le nombre de succès de l'expérience. On note $X \sim B(n, p)$

Exemple

🎥 **Vidéo https://youtu.be/b18_r8r4K2s**

On a représenté dans un arbre de probabilité les issues d'une expérience suivant un schéma de Bernoulli composé de 3 épreuves de Bernoulli de paramètre p. X est la variable aléatoire qui donne le nombre de succès.

- $P(X = 3) = p^3$

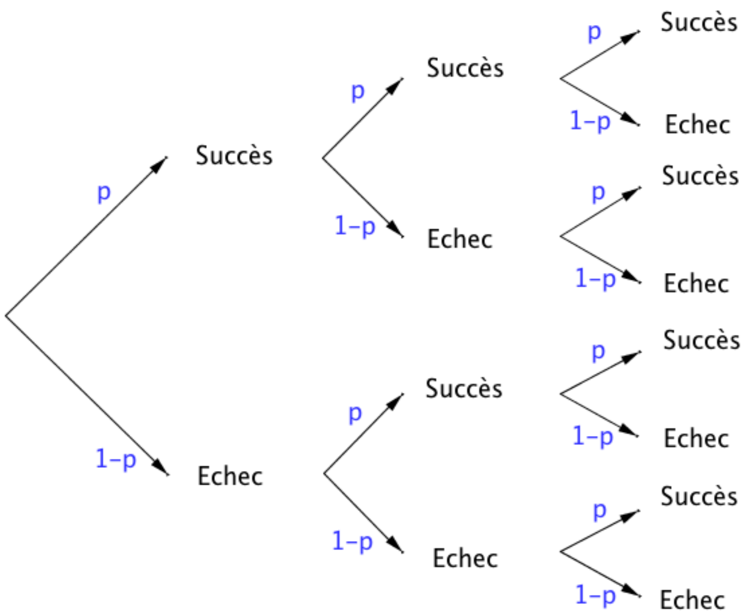
En effet, en suivant les branches sur le haut de l'arbre, on arrive à 3 succès avec une probabilité de $p \times p \times p$.

- $X = 2$ correspond aux issues suivantes :

(Succès ; Succès ; Echec)
(Succès ; Echec ; Succès)
(Echec ; Succès ; Succès)

Donc $P(X = 2) = 3p^2(1-p)$

- *Peut-on trouver une formule générale ? (oui, évidemment…)*



IV. Coefficients binomiaux

1. Définition et propriétés

Exemple

Dans l'arbre précédent, combien existe-t-il de chemins conduisant à 2 succès parmi 3 épreuves ? On dit aussi combien y a-t-il de combinaisons de 2 parmi 3 ?

(Succès ; Succès ; Echec)
(Succès ; Echec ; Succès)
(Echec ; Succès ; Succès)

Il existe donc trois combinaisons de 2 parmi 3 et on note $\binom{3}{2} = 3$

Remarque

Chercher deux succès parmi 3 épreuves revient au même que chercher un échec parmi 3 épreuves. On en déduit que $\binom{3}{1} = \binom{3}{2} = 3$

Définition

On réalise une expérience suivant un schéma de Bernoulli de paramètre n et p. Soit un entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n$. On appelle **coefficient binomial** ou **combinaison de** k **parmi** n, le nombre de chemins conduisant à k succès parmi n épreuves sur l'arbre représentant l'expérience. Ce nombre se note $\binom{n}{k}$

Propriétés

Pour tout entier naturel n $\binom{n}{0} = 1$ $\binom{n}{n} = 1$ $\binom{n}{1} = n$

Démonstrations

- Il n'y a qu'un seul chemin correspondant à 0 succès parmi n épreuves : (Échec, Échec,… , Échec)
- Il n'y a qu'un seul chemin correspondant à n succès parmi n épreuves : (Succès, Succès,… , Succès)
- Il y a n chemins correspondant à 1 succès parmi n épreuves : il y a n positions possibles pour placer le succès.

Propriété de symétrie
Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n$ $\quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Élément de démonstration

S'il y a k succès, il y a $n - k$ échecs.

Propriété du triangle de Pascal
Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n$ $\quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Démonstration

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit E un ensemble à $n+1$ éléments et soit a un élément fixé de E.
Pour dénombrer les parties à $k+1$ éléments de E, on peut distinguer :

- Celles qui ne contiennent pas a : il s'agit des parties à $k+1$ éléments choisis parmi les n éléments de E distincts de a ; elles sont par conséquent au nombre de $\binom{n}{k+1}$
- Celles qui contiennent a : il reste à choisir k éléments parmi les n éléments de E distincts de a ; on en compte par conséquent $\binom{n}{k}$

Or, il y a $\binom{n+1}{k+1}$ parties à $k+1$ éléments de E. Donc $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Méthode

Calculer des coefficients binomiaux
🎥 **Vidéo https://youtu.be/-gvlrfFdaS8**
🎥 **Vidéo https://youtu.be/mfcBNlUuGaw**
Calculer $\binom{25}{24}$ et $\binom{4}{2}$.

Solution
$\binom{25}{24} = \binom{25}{25-24} = \binom{25}{1} = 25$ $\qquad \binom{4}{2} = \binom{3}{1} + \binom{3}{2} = 3 + 3 = 6$

Avec la calculatrice

Il est possible de vérifier les résultats à l'aide d'une calculatrice. La fonction se nomme « ***combinaison*** » ou « ***nCr*** ». Pour calculer $\binom{25}{24}$, on saisit « 25 ***combinaison*** 24 » ou « 25 ***nCr*** 24 » suivant le modèle de calculatrice.

Avec un tableur

La fonction se nomme « ***COMBIN*** ». Pour calculer $\binom{25}{24}$, on saisit « =***COMBIN***(25;24) »

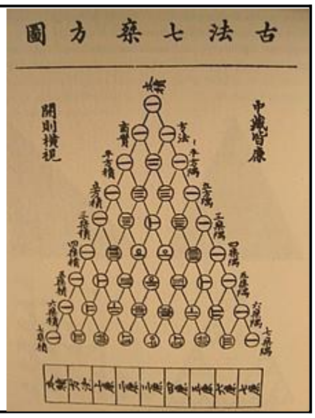
2. Triangle de Pascal

Le tableau qui suit permet de calculer de proche en proche les combinaisons en utilisant la propriété du triangle de Pascal. Le triangle de Pascal est utilisé pour déterminer rapidement les premiers coefficients binomiaux.
🎥 **Vidéo https://youtu.be/6JGrHD5nAoc**

k / n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	**10**	**5**	1	
6	1	6	15	20	**15**	6	1

Par exemple, $\binom{5}{3} + \binom{5}{4} = \binom{6}{4}$

Blaise Pascal* (1623-1662)** fait la découverte d'un triangle arithmétique, appelé aujourd'hui « ***triangle de Pascal ». Son but est d'exposer mathématiquement certaines combinaisons numériques dans les jeux de hasard et les paris. Cette méthode était déjà connue des perses mais aussi du mathématicien chinois *Zhu Shi Jie* (XIIème siècle).
Ci-contre, le triangle de *Zu Shi Jie* extrait de son ouvrage intitulé *Su yuan zhian* (1303).



3. Application à la loi binomiale

Propriété
Soient n et p deux entiers naturels. On réalise une expérience suivant un schéma de Bernoulli de paramètres n et p. On associe à l'expérience la variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres n et p.
La loi de probabilité de X est donné par

$$\forall k \in [\![0; n]\!],\ P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Remarques
- k désigne le nombre de succès et $n - k$ le nombre d'échecs.
- $[\![0; n]\!] = \{0; 1; 2; ...; n\}$

Démonstration
Un chemin comportant k succès (de probabilité p) comporte $n - k$ échecs (de probabilité $1 - p$). Ainsi sa probabilité est égale à $p^k (1 - p)^{n-k}$
Le nombre de chemins menant à k succès est égal à $\binom{n}{k}$
Donc $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$

Méthode
Calculer les probabilités d'une loi binomiale
🎥 **Vidéo https://youtu.be/1gMq2TJwSh0**
Une urne contient 5 boules gagnantes et 7 boules perdantes. Une expérience consiste à tirer au hasard 4 fois de suite une boule et de la remettre. On appelle X la variable aléatoire qui associe le nombre de tirage gagnant.
1. Prouver que X suit une loi binomiale.
2. Déterminer la loi de probabilité de X.
3. Calculer la probabilité d'obtenir 3 boules gagnantes.

Solution
1. On répète 4 fois une expérience à deux issues : soit on tire une boule gagnante, soit une boule perdante.
Le **succès** est d'obtenir une boule gagnante. La **probabilité du succès** sur un tirage est égale à $\frac{5}{12}$

$$X \sim B\left(4, \frac{5}{12}\right)$$

2. $\forall k \in [\![0; 4]\!],\ P(X = k) = \binom{4}{k} \left(\frac{5}{12}\right)^k \left(\frac{7}{12}\right)^{4-k}$
3. La probabilité d'obtenir 3 boules gagnantes est de :
$P(X = 3) = \binom{4}{3} \left(\frac{5}{12}\right)^3 \left(\frac{7}{12}\right)^1 = 4 \times \frac{5^3}{12^3} \times \frac{7}{12} = \frac{125 \times 7}{1\,728 \times 3} = \frac{875}{5\,184}$

V. Espérance, variance et écart-type de la loi binomiale

Propriété
Soient n et p deux entiers naturels. Soit X une variable aléatoire telle que $X \sim B(n, p)$

$E(X) = n \times p$ $\quad V(X) = n \times p \times (1 - p)$ $\quad (X) = \sqrt{np(1 - p)}$

-Admis-

Exemple

🎥 **Vidéo https://youtu.be/95t19fznDOU**

🎥 **Vidéo https://youtu.be/MvCZw9XIZ4Q**

On lance 5 fois un dé à six faces équilibré. On considère comme succès le fait d'obtenir 5 ou 6. On considère la variable aléatoire X donnant le nombre de succès. On veut calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de X.

Solution

$X \sim B\left(5, \frac{1}{3}\right)$

$E(X) = 5 \times \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$

$V(X) = \frac{5}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{10}{9}$

$(X) = \sqrt{\frac{10}{9}} = \frac{\sqrt{10}}{3}$

La loi binomiale avec la calculatrice

🎥 **Vidéos dans la Playlist :**
https://www.youtube.com/playlist?list=PLVUDmbpupCapoStVETZ2x6iy0vCua0HvK

VI. Échantillonnage

Le principe

On considère par exemple l'expérience consistant à lancer plusieurs fois un dé à 6 faces et à noter si la face supérieure affichée est un 4 ou un autre nombre.
La valeur supposée et théorique de la probabilité d'obtenir un 4 est 1/6
La mise en défaut ou non de cette expérience, nous permettra d'affirmer s'il est raisonnable de penser que le dé est pipé ou ne l'est pas.
En réalisant l'expérience un certain nombre de fois (échantillon), on mesure la fréquence d'apparition du 4. Si la fréquence et la valeur théorique sont trop "éloignées" (dépassent un seuil fixé) alors on peut rejeter la valeur théorique et considérer que le dé est pipé. Dans le cas inverse, on considère qu'il ne l'est pas.

1. Échantillon

Définitions
On obtient un **échantillon** de taille n en considérant n éléments d'une population pris au hasard.
Un **échantillonnage** est le prélèvement d'un échantillon dans une population.

Exemples
- On lance plusieurs fois une pièce de monnaie, on note si elle tombe sur « pile » ou « face ».
- On tire au hasard une boule dans une urne qui ne contient que des boules rouges et des boules blanches. On s'intéresse au nombre de boules rouges tirées.
- On interroge un échantillon de personnes pour faire un sondage sur une élection.

Propriété
On considère une population dont une **proportion** p des individus possède un caractère donné. On prélève dans cette population un **échantillon de taille** n. La variable aléatoire qui associe le nombre d'individus possédant ce caractère suit une **loi binomiale de paramètres** n **et** p.

Exemple

On fait l'hypothèse que 55% des électeurs ont voté pour le candidat A. On interroge au hasard à la sortie des urnes 50 personnes. X est la variable aléatoire qui compte le nombre k de personnes qui ont voté pour le candidat A. La loi de probabilité de X est une loi binomiale de paramètre n = 50 et p = 0,55.
On a ainsi

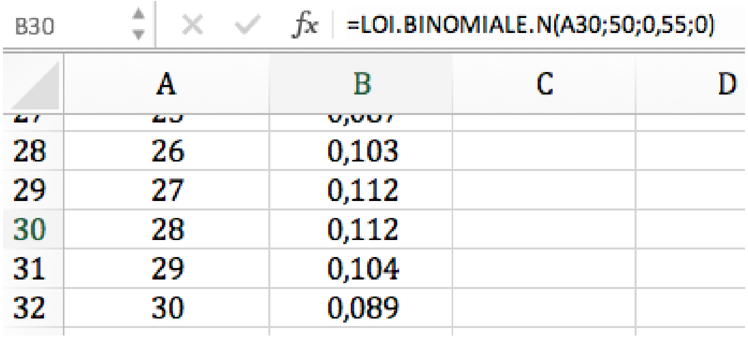
k	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**
$P(X = k)$	0,001	0,003	0,006	0,012	0,021	0,034	0,05	0,069	0,087	0,102	0,112

k	**28**	**29**	**30**	**31**	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**
$P(X = k)$	0,112	0,104	0,089	0,07	0,051	,034	0,021	0,012	0,006	0,003	0,001

Pour $k < 17$ et $k > 38$, les probabilités sont inférieures à 10^{-3} et peuvent être considérées comme négligeables.
Ainsi, la probabilité d'avoir 28 électeurs du candidat A dans cet échantillon est de 11,2%.

Avec le tableur
Avec la loi binomiale $B(50; 0,55)$, pour calculer $P(X = 20)$, il faut saisir
$= LOI.BINOMIALE.N(20; 50; 0,55; 0)$

Pour calculer $P(X \leq 20)$, il faut saisir
$= LOI.BINOMIALE.N(20; 50; 0,55; 1)$


B30 =LOI.BINOMIALE.N(A30;50;0,55;0)

	A	B	C	D
28	26	0,103		
29	27	0,112		
30	28	0,112		
31	29	0,104		
32	30	0,089		

2. Intervalle de fluctuation

Définition
On considère une population dont une proportion p des individus possède un caractère donné. On prélève dans cette population un échantillon de taille n. Soit X la variable aléatoire associée au nombre d'individus possédant ce caractère.
L'**intervalle de fluctuation au seuil de 95 %** associé à la variable aléatoire X est l'intervalle $\left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n}\right]$ où a et b sont les plus petits entiers tel que $P(X \leq a) \geq 0,025$ et $P(X \leq b) \geq 0,975$

Remarque
Dire que l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % est $\left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n}\right]$ signifie que pour un échantillon de n personnes, il y a au moins 95 % de chance que la proportion d'individus qui possèdent le caractère donné est comprise entre a/n et b/n.

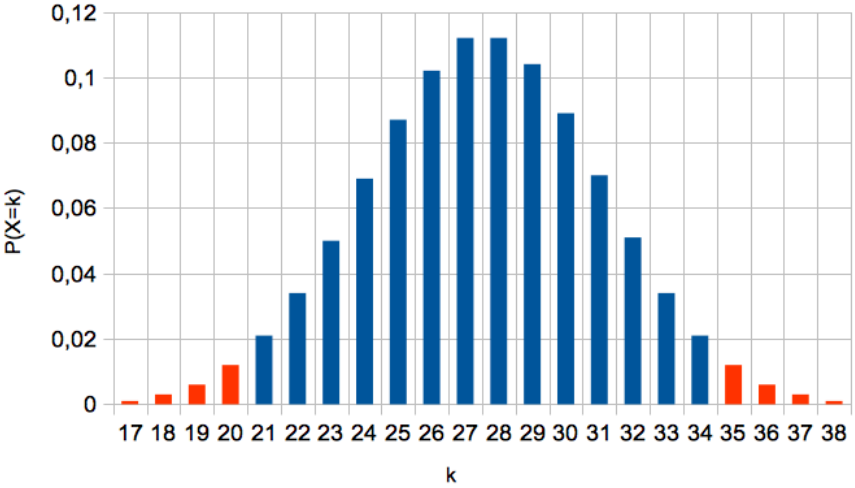
Exemple
🎥 **Vidéo https://youtu.be/o6bHRO9vHjc**
On reprend l'exemple du paragraphe précédent en cumulant les probabilités.

k	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**
$P(X \leq k)$	0,002	0,005	0,01	0,023	0,044	0,077	0,127	0,196	0,283	0,386	0,498

k	**28**	**29**	**30**	**31**	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**
$P(X \leq k)$	0,61	0,713	0,802	0,872	0,923	0,957	0,978	0,989	0,995	0,998	0,999

L'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % est $\left[\frac{21}{50}; \frac{34}{50}\right] = [0,42; 0,68]$

Pour un échantillon de 50 personnes, il y a au moins 95% de chance qu'il y ait entre 42 % et 68 % des électeurs qui votent pour le candidat A.
Sur le graphique, la plus petite somme des probabilités supérieure ou égale à 95 % est représentée en bleue.



Propriété
Pour un échantillon de taille $n \geq 25$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$, l'intervalle $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est une bonne approximation de l'intervalle de fluctuation au seuil de 95%.

Exemple
Dans l'exemple précédent, on trouve $\left[0,55 - \frac{1}{\sqrt{50}}; 0,55 + \frac{1}{\sqrt{50}}\right] \approx [0,41; 0,69]$

3. Prise de décision

Critère de décision
Si la fréquence observée appartient à l'intervalle de fluctuation, on accepte l'hypothèse au seuil de 95 %. Dans le cas contraire, on la rejette.

Exemple
🎥 **Vidéo https://youtu.be/cxMdYBvywK0**
On reprend l'exemple du paragraphe précédent. On interroge 50 électeurs à la sortie des urnes. Parmi ceux-là, 22 affirment avoir voté pour le candidat A. *Peut-on accepter l'hypothèse que 55% des électeurs ont voté pour le candidat A ?*
Solution
L'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % est $[0,42; 0,68]$
La fréquence observée est égale à $\frac{22}{50} = 0,44$
Comme 0,44 appartient à l'intervalle de fluctuation, on en déduit qu'on peut accepter l'hypothèse. On ne peut cependant pas affirmer être certain que l'hypothèse est vraie. En effet, la probabilité de se tromper n'est pas nulle mais égale à 0,05.