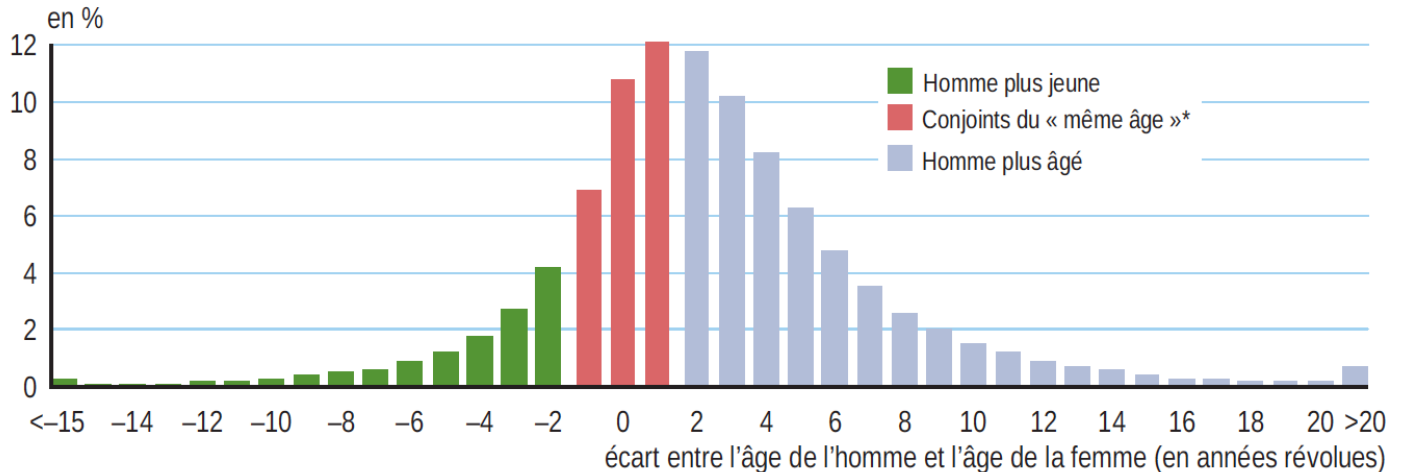


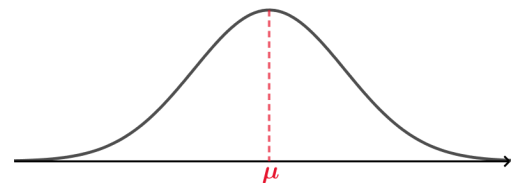
LOI NORMALE

I. Exemple

En 2016, l'INSEE a publié une [enquête sur l'âge des conjoints dans un couple](#). Dans cette étude, on a mesuré dans la population française, en 2012, l'écart d'âge entre l'homme et la femme. Sur le graphique correspondant, on observe une certaine symétrie autour d'une valeur moyenne.



Ce type de distribution s'observe souvent en sciences humaines. Elle est caractérisée par une courbe en forme de cloche (on parle de **gaussienne**), symétrique autour d'une certaine valeur μ (sa moyenne). Pour modéliser ces situations, on va parfois supposer que la variable étudiée suit une distribution « modèle », appelée **loi normale**.

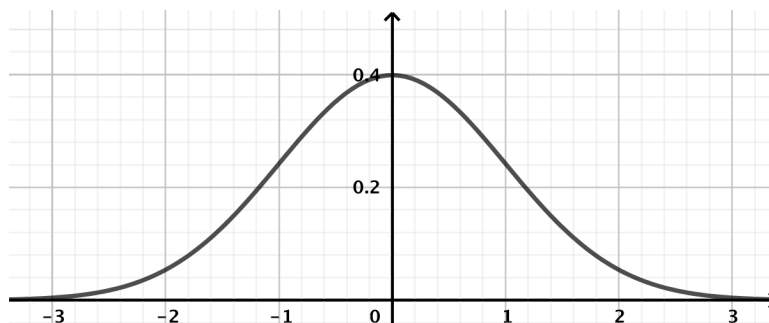


II. Loi normale centrée réduite

Définition

La **loi normale centrée réduite**, notée $N(0; 1)$, est la loi ayant pour densité de probabilité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$



La représentation graphique de la fonction densité de la loi $N(0; 1)$, est une **courbe en cloche (gaussienne) symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**. Le **premier** nombre entre parenthèses désigne l'**espérance**, le **second** la **variance** de cette loi.

Pour une loi normale centrée réduite, l'**espérance** est donc **0** et la **variance** vaut **1**. On en déduit que son **écart-type** vaut également **1**.

Si X suit une loi normale centrée réduite, $\mu = E(X) = 0$ et $\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{1} = 1$

Calculs de probabilités

On considère une variable aléatoire X qui suit une loi normale centrée réduite $N(0; 1)$.

Pour calculer $P(X \leq 1,56)$ par exemple, on peut utiliser une calculatrice, un [émulateur](#), un [logiciel](#) ou même une table (la version complète de la table est présente à la fin du chapitre).

- Montrons comment utiliser la table pour calculer $P(X \leq 1,56)$. On cherche 1,56 dans la table, en remarquant que $1,56 = 1,5 + 0,06$

	...	0,06	...
...	...	...	...
1,5	...	0,9406	...
...	...	...	...

On obtient $P(X \leq 1,56) = 0,9406$

- On veut maintenant calculer $P(X \geq 1,49)$

$$P(X \geq 1,49) = 1 - P(X < 1,49)$$

On cherche 1,49 dans la table.

	...	0,09	...
...	...	...	...
1,4	...	0,9319	...
...	...	...	...

Donc $P(X < 1,49) = 0,9319$

$$P(X \geq 1,49) \approx 1 - 0,9319 \approx 0,0681$$

- On veut maintenant calculer $P(X < -0,89)$. On utilise la symétrie de la loi normale centrée réduite.

$$P(X < -0,89) = P(X > 0,89)$$

$$P(X < -0,89) = 1 - P(X \leq 0,89)$$

On cherche 0,89 dans la table.

	...	0,09	...
...	...	...	...
0,8	...	0,8133	...
...	...	...	...

$$P(X < -0,89) \approx 1 - 0,8133 \approx 0,1867$$

- On veut maintenant calculer $P(-1 \leq X \leq 1)$

$$P(-1 \leq X \leq 1) = P(X \leq 1) - P(X < -1)$$

$$P(-1 \leq X \leq 1) = P(X \leq 1) - P(X > 1)$$

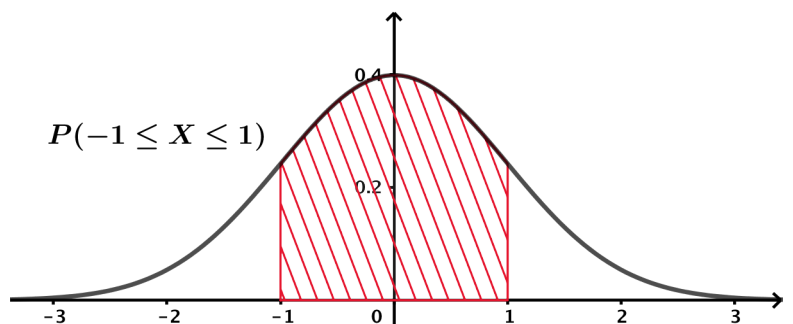
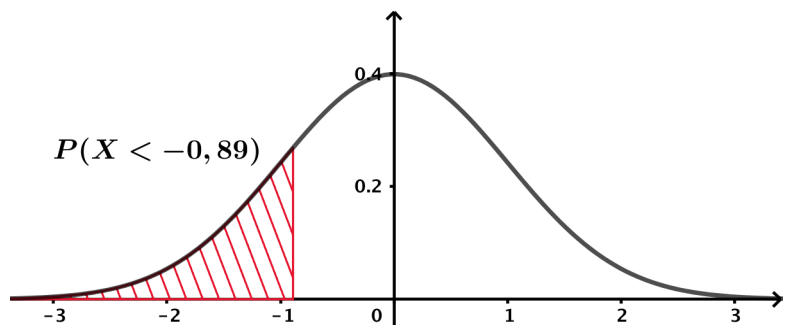
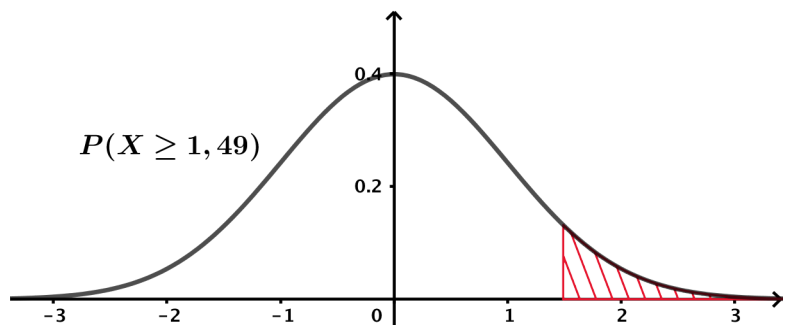
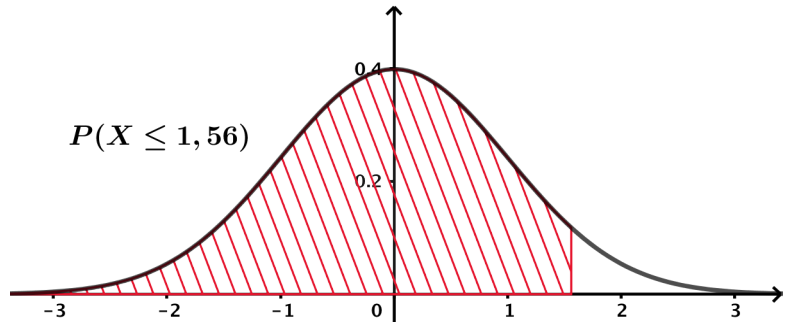
$$P(-1 \leq X \leq 1) = P(X \leq 1) - [1 - P(X \leq 1)]$$

$$P(-1 \leq X \leq 1) = 2P(X \leq 1) - 1$$

On cherche 1 dans la table.

	0,00	...
...	...	...
1,0	0,8413	...
...	...	...

$$P(-1 \leq X \leq 1) \approx 2 \times 0,8413 - 1 \approx 0,6826$$



Remarques

- $P(X \leq 1) = P(X < 1)$
- Les événements $\{X \leq 1\}$ et $\{X > 1\}$ sont contraires.

III. Loi Normale

Définition

Soit un nombre réel μ et un nombre réel strictement positif σ . Dire qu'une variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ , notée $N(\mu, \sigma^2)$, signifie que la variable aléatoire $\frac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $N(0; 1)$. Sa densité f est définie sur $\mathbb{R}$ et donnée par la formule

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Remarque

$$\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

Cela veut dire que

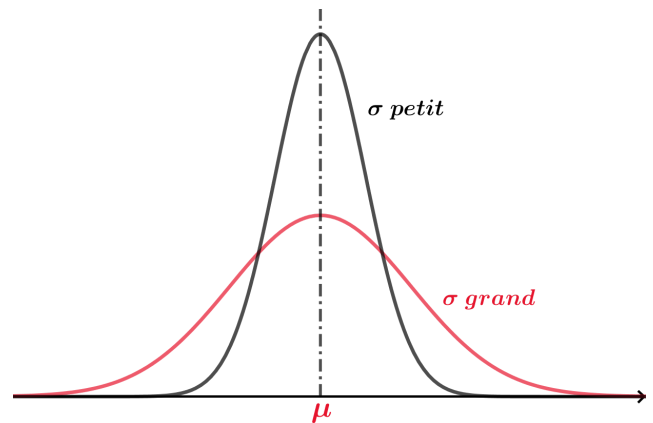
$$E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sigma} E(X - \mu) = 0 \Leftrightarrow E(X - \mu) = 0$$

$$\Leftrightarrow E(X) - \mu = 0 \Leftrightarrow E(X) = \mu$$

De la même façon,

$$Var\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sigma^2} Var(X - \mu) = 1 \Leftrightarrow Var(X) = \sigma^2$$

On remarque que la définition est bien cohérente.



Courbe représentative de la densité de la loi $N(\mu, \sigma^2)$

La courbe représentative de la fonction densité de la loi $N(\mu, \sigma^2)$ est une **courbe en cloche symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$**

La courbe est d'autant plus « resserrée » autour de son axe de symétrie que l'écart-type σ est petit.

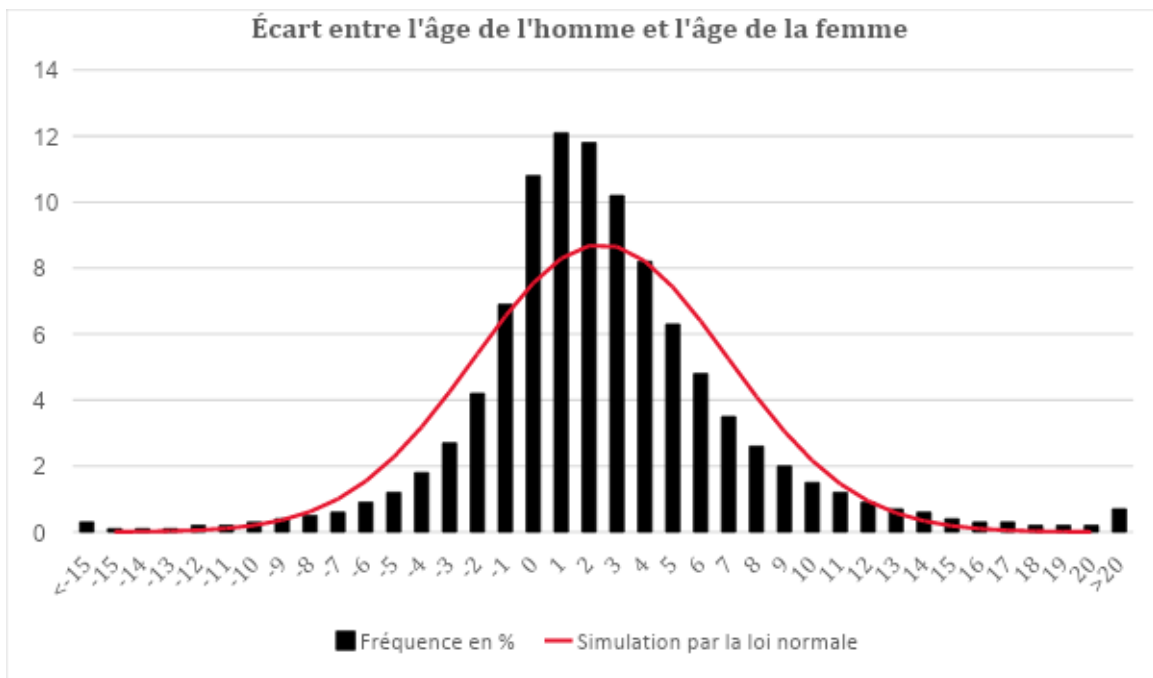
L'écart-type (ou la variance) est un caractère de dispersion autour de l'espérance qui est un caractère de position.

Exemple

Dans l'exemple initial dû à l'INSEE, on peut calculer que, si l'on ôte les valeurs extrêmes, $\mu \approx 2,433$ et $\sigma \approx 4,531$.

On peut alors tracer la densité de la loi normale $N(\mu, \sigma^2)$ correspondant à ces valeurs (courbe en rouge). Si l'on accepte le modèle gaussien, on peut remarquer que les écarts d'âge entre 2 et 7 ans en faveur des femmes et entre 5 et 10 ans en faveur des hommes sont sous-représentés. Par contre, les petits écarts d'âge et les très grands écarts d'âge sont sur-représentés. En combinant cette remarque avec d'autres critères (sociaux, géographiques,...), on va pouvoir affiner notre perception de cette information.



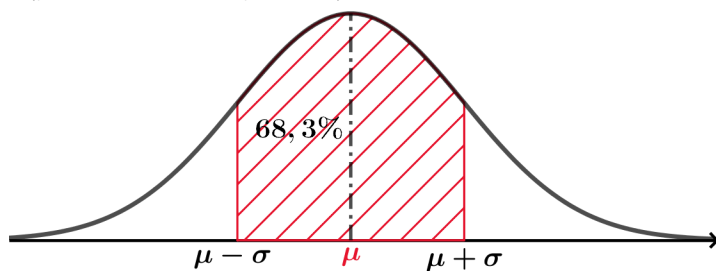


Quelques valeurs particulières

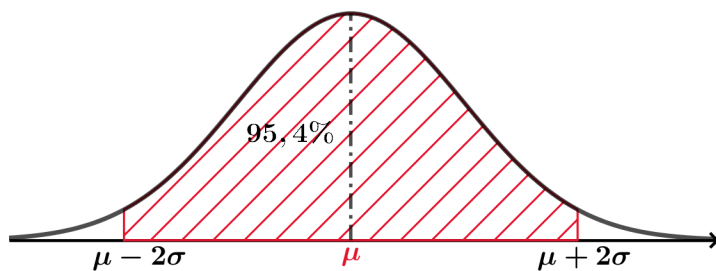
$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,683$$

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,954$$

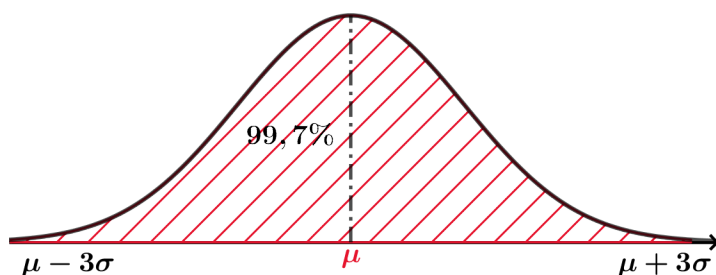
$$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,997$$



$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,683$$



$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,954$$



$$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,997$$

Calculs de probabilités



On suppose que $X \sim N(11; 2^2)$

- On veut calculer $P(X \leq 14)$. On centre et on réduit. Soit $Z = \frac{X-11}{2}$ alors $Z \sim N(0; 1)$

$$P(X < 14) = P\left(\frac{X-11}{2} \leq \frac{14-11}{2}\right) = P(Z \leq 1,5) \approx 0,9332$$

D'après la table de la loi normale centrée réduite.

- On veut calculer $P(9 \leq X \leq 13)$

$$P(9 \leq X \leq 13) = P(11 - 2 \leq X \leq 11 + 2) \approx 0,683$$

IV. Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Propriété

Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p , tels que $\{n \geq 30, np \geq 5, n(1-p) \geq 5\}$ on peut approximer X par la loi normale de d'espérance np et de variance $np(1-p)$.

$$B(n, p) \sim N(np; np(1-p))$$

Remarque

Cette propriété va nous permettre de modéliser de nombreuses situations et notamment être utilisée dans les notions d'intervalle de fluctuation et de confiance.

	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5	0,504	0,508	0,512	0,516	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,591	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,648	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,67	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,695	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,719	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,758	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,791	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,834	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,877	0,879	0,881	0,883
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,898	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,937	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,975	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,983	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,985	0,9854	0,9857



2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,989
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,992	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,994	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,996	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,997	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,998	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,999	0,999
3,1	0,999	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4,0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

