**Занятие №** **Группа ХКМ 1/1** **Дата: 16.02.2024**

**Тип занятия:** комбинированное занятие

**Тема занятия: «*Площадь криволинейной трапеции. Формула Ньютона-Лейбница»***

**Цель занятия:**

***Деятельностная:***

– формирование у учащихся умений находить площадь криволинейной трапеции при помощи формулы Ньютона-Лейбница.

***Содержательная:***

– сформировать представление о криволинейной трапеции;

– расширить знания учеников за счет включения новых определений: криволинейная трапеция; новой формулы – формулы Ньютона-Лейбница;

– познакомиться с задачами вычисления площади криволинейной трапеции.

**Оборудование занятия:** доска, учебник.

**План занятия:**

**1.** Криволинейная трапеция.

**2.** Интегральные суммы.

**3.** Площадь криволинейной трапеции.

**4.** Определённый интеграл. Формула Ньютона-Лейбница

**0. Повторим.**

Пример на вычисление неопределенного интеграла:

Найти:

$\int f(x)dx$ ,если $f(x) = 4x^3 + 5x^4$

Решение:

$$\int (4x^3 + 5x^4)dx = 4 \cdot \frac{x^4}{4} + 5 \cdot \frac{x^5}{5} + C = x^4 + x^5 + C$$

Проверка:

$(x^4 + x^5 + C)' = 4x^3 + 5x^4 = f(x)$

Ответ: $x^4 + x^5 + C$ .

1. Найти первообразную для функции

$y = 3x^2 + \cos x$.

$y = 5 \sin (x)$.

$y = \cos (5x)$.

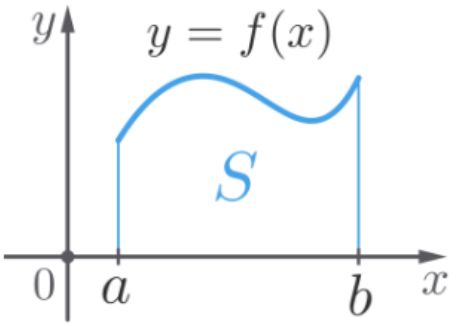
2. Ограниченность функции

Функция f(x) называется ограниченной снизу на множестве $x \in I$, если существует такое число m, что $f(x) > m$ при любом $x \in I$.

Функция f(x) называется ограниченной сверху на множестве $x \in I$, если существует такое число M, что $f(x) < M$ при любом $x \in I$.

**1. Площадь криволинейной трапеции**

Рассмотрим фигуру, изображённую на рисунке, и вычислим её площадь S.

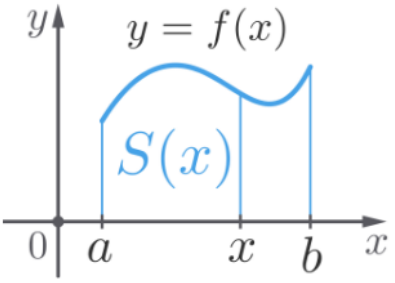



Фигура ограничена снизу отрезком [a;b] оси Ox, сверху – графиком непрерывной функции f(x) такой, что f(x)>0 при x∈(a;b), а по бокам – отрезками прямых x=a и x=b.

Данную фигуру называют криволинейной трапецией, а отрезок [a;b] − её основанием.

**2. Интегральные суммы.**

Пусть S(x) − площадь криволинейной трапеции с основанием [a;x], где x − любая точка из отрезка [a;b].



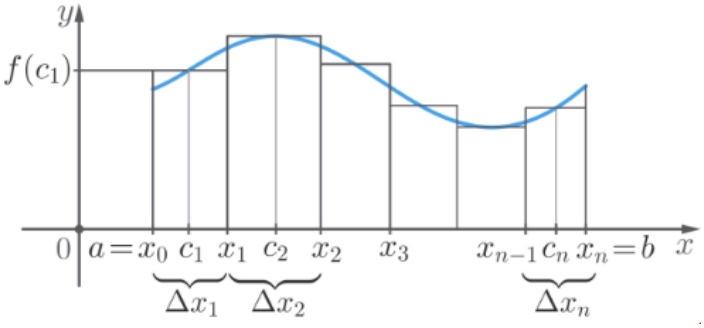

Заметим, что:

– если x=a, тогда отрезок [a;x] вырождается в точку, следовательно S(a)=0,
– если x=b, тогда S(b)=S

Имеет место следующее утверждение:

S(x) является первообразной функции f(x), то есть f(x) = S’(x).

Рассмотрим криволинейную трапецию с основанием [a;b] которое разбито точками $x_0,x_1,\ldots,x_n$ на n отрезков (не обязательно равных по длине). Проведём вертикальные прямые через данные точки и обозначим $\Delta x_p=x_p-x_{p-1}$. На каждом отрезке $[x_{p-1};x_p]$, p=1,2,3,…,n выберем точку $c_p$ (см. рисунок).




Величина $f(c_p)\cdot\Delta x_p$ − площадь прямоугольника с основанием $\Delta x_p$ и высотой $f(c_p)$. Тогда площадь криволинейной трапеции приближённо равна сумме площадей построенных прямоугольников:

$S_n= f(c_1)\cdot\Delta x_1 + f(c_2)\cdot\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\cdot\Delta x_n \approx S$

Это приближённое равенство тем точнее, чем ближе к нулю максимальное значение из набора $\{\Delta x_1; \Delta x_2;\ldots; \Delta x_n\}$ (этого можно достичь, например, выбирая

всё больше точек $x_0,x_1,\ldots,x_n$, отстоящих на одинаковом расстоянии друг от друга).

**Определение**

Величину $S_n$ называют интегральной суммой функции f(x), соответствующей разбиению $\{\{ x_0,x_1,\ldots,x_n \};\{ c_1,\ldots,c_n \}\}$ отрезка [a;x].

**3. Площадь криволинейной трапеции**.

Имеет место следующее утверждение:

Искомая площадь S криволинейной трапеции равна пределу последовательности $\{S_n\}$ при устремлении к нулю максимального значения D из набора $\{\Delta x_1; \Delta x_2;\ldots; \Delta x_n\}$, то есть $\lim\limits_{D\to 0} S_n = S$

**4. Определённый интеграл. Формула Ньютона-Лейбница**

Определение

Определённым интегралом от функции y=f(x) на отрезке [a;b] называют предел соответствующих интегральных сумм и обозначают:

$$\int_a^b f(x)dx$$

**Теорема 1**

Для любой функции y=f(x), непрерывной на отрезке [a;b], существует определённый интеграл $\int_a^b f(x)dx$.

**Теорема 2**

Для любой функции y=f(x), ограниченной на отрезке [a;b] и непрерывной на отрезке [a;b], за исключением конечного числа разрывов, существует определённый интеграл $\int_a^b f(x)dx$.

**Теорема 3** (геометрический смысл определённого интеграла)

Пусть для функции y=f(x) на отрезке [a;b] существует определённый интеграл, тогда площадь криволинейной трапеции под графиком функции y=f(x) между прямыми x=a и x=b равна $\int_a^b f(x)dx$.

**Замечание.** Если график функции лежит над осью абсцисс, то значение определённого интеграла равно геометрической площади S соответствующей криволинейной трапеции. Если график функции лежит под осью абсцисс, то значение определённого интеграла равно минус геометрической площади (–S) соответствующей криволинейной трапеции.

**Теорема (формула Ньютона-Лейбница)**

Пусть функция y=f(x) ограничена на отрезке [a;b] и имеет на нём не более конечного числа разрывов. И пусть функция F(x) – некоторая (произвольная) первообразная для функции f(x). Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

**Пример.** Вычислим с помощью формулы Ньютона-Лейбница определённый интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\sin x)dx = \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos(0) = -1$$

**Примеры с пояснением:**

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\ x|_0^{\frac{\pi}{4}} = tg\frac{\pi}{4} - tg\ 0 = 1$$

***Ответ*: 1.**

Пояснение:

$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $F(x) = tg\ x + C$, $\boxed{F'(x) = f(x)}$, так как

$(tg\ x + C)' = (tg\ x)' + C' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$$\int_0^{3\pi} \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{9}} = \left(\frac{1}{\frac{1}{9}} \cdot tg\frac{x}{9}\right)\Big|_0^{3\pi} = 9\left(tg\frac{3\pi}{9} - tg\frac{0}{9}\right) = 9\sqrt{3}$$

***Ответ***: 9√3.

Пояснение:

$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $F(x) = 9tg\frac{x}{9} + C$, $\boxed{F'(x) = f(x)}$, так как

$\left(9tg\frac{x}{9} + C\right)' = 9 \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{x}{9}} \cdot \left(\frac{1}{9}x\right)' + C' = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{9}}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = (\sin x)|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$$

***Ответ***: 1.

Пояснение:

$f(x) = \cos x$, $F(x) = \sin x + C$, $\boxed{F'(x) = f(x)}$, так как

$(\sin x + C)' = (\sin x)' + C' = \cos x$

$$\int_0^{\pi} 3\cos\frac{x}{2}dx = 3 \cdot 2 \cdot (\sin\frac{x}{2})\Big|_0^{\pi} = 6\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = 6$$

***Ответ*: 6.**

Пояснение:

$f(x) = 3\cos\frac{x}{2}$; $F(x) = 6\sin\frac{x}{2} + C$; $\boxed{F'(x) = f(x)}$, так как

$\left(6\sin\frac{x}{2} + C\right)' = 6 \cdot \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} + C' = 3\cos\frac{x}{2}$

$$\int_0^1 (2x+1)^2 dx = \left(\frac{1}{2}\frac{(2x+3)^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{6}(2x+1)^3|_0^1 = \frac{1}{6}(3^3-1^3) = \frac{26}{6} = \frac{13}{3}$$

***Ответ***: $\frac{13}{3}$.

Пояснение:

$f(x) = (2x+1)^2$, $F(x) = \frac{1}{6}(2x+1)^3$, $\boxed{F'(x) = f(x)}$, так как

$$\left(\frac{1}{6}(2x+1)^3\right)' = \frac{1}{6}\cdot 3\cdot(2x+1)^2\cdot(2x+1)' = \frac{1}{6}\cdot 3\cdot(2x+1)^2\cdot 2 = (2x+1)^2$$

**Домашнее задание:**

1. Законспектировать основные теоретические сведения.
2. Ответить на вопросы для закрепления
3. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы : базовый и углубленный уровни : учебник / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, М. В. Ткачёва [и др.]. – 10-е изд., стер. – Москва : Просвещение, 2022. – 463

§55 с. 294-295, №988 (4,5,6)

Выполненную работу необходимо сфотографировать и отправить на почтовый ящик pushistaV@yandex.ru, Бережная Валерия Александровна (VK)

ОБЯЗАТЕЛЬНО ПОДПИСЫВАЕМ РАБОТУ НА ПОЛЯХ + в сообщении указываем дату/группу/ФИО