2023-2024

11 класс І этап

1. Какое из чисел больше: 77^7 или 7^{77} ?

Ответ: Второе число больше.

Решение. $7^{10} > 7^2 > 11$, поэтому $7^{11} = 7 \times 7^{10} > 7 \times 11 = 77$. Отсюда следует, что $7^{77} = \left(7^{11}\right)^7 > 7^{77}$

Критерии.

7 балов – Верный ответ и доказательство.

1 балл – Только ответ.

2. Приведите пример числа x, для которого выполняется равенство sin2025x-tg2024x=cos2023x Ответ обоснуйте.

Ответ: Например, $\frac{\pi}{4}$

Peшeнue: Так как $\frac{2024\pi}{4} = 506\pi = 253.2\pi$ кратно периоду, имеем

$$sin\frac{2025\pi}{4} = sin sin \left(253 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$cos\frac{2023\pi}{4} = cos cos \left(253 \cdot 2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = cos(-\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg\frac{2024\pi}{4} = (253 \cdot 2\pi) = 0$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} - 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

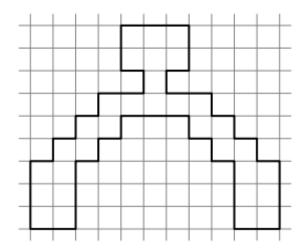
Критерии.

7 баллов – Приведён верный ответ, и показано, что при этом значении х равенство верно.

0 баллов – Приведён только ответ.

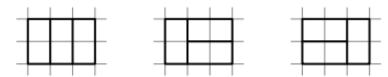
3. Сколькими способами можно разрезать по клеткам приведённую ниже картинку на прямоугольники 1×2 (сторона одной клетки равна 1)?

1

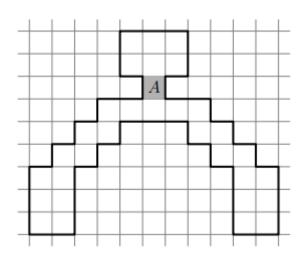


Ответ: 27.

Решение. Прямым перебором можно убедиться, что количество разрезаний прямоугольника 2×3 на прямоугольники 1×2 равно трём (все три варианта приведены на рисунке ниже).

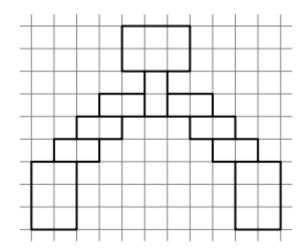


Рассмотрим клетку А:



Если А является нижней клеткой вертикального прямоугольника 1×2 , то остающаяся верхняя часть фигуры имеет нечётную площадь и не может быть разрезана. Значит, А является верхней клеткой вертикального прямоугольника 1×2 .

Тогда следующее частичное разрезание получается однозначно:



Осталось разрезать три отдельных прямоугольника 2×3 . Для каждого из них есть три разрезания, значит, для всех вместе есть $3^3 = 27$ разрезаний.

Критерии.

7 баллов – Верное решение.

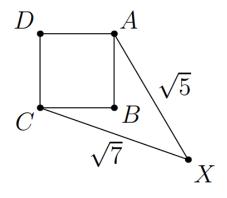
5 баллов – При рассмотрении случаев несколько (не много!) пропущены.

4 баллов – Решение перебором, но много (около половины) случаев пропущены.

1 балл – Посчитаны некоторые разрезания (около 4-х)

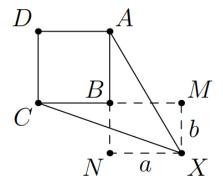
1 балл – Только правильный ответ.

4. На плоскости дан квадрат ABCD со стороной 1 и точка X (см. рисунок). Известно, что $XA = \sqrt{5}$, $XC = \sqrt{7}$. Чему равно XB?



Ответ:
$$\sqrt{6 - \sqrt{10}}$$

Решение. Опустим из точки X перпендикуляры XM и XN на прямые CB и AB соответственно. Четырёхугольник BMXN — прямоугольник; обозначим длины его сторон BM и NX за a, BN и MX — за b.



По теореме Пифагора для треугольников ANX и CMX выполнены соотношения $AN^2 + NX^2 = AX^2$, $CM^2 + XM^2 = CX^2$.

Получаем систему $(1+b)^2+a^2=5$, $(1+a)^2+b^2=7$. Вычтя из второго уравнения первое, получим 2(a-b)=7-5, т. е. a=b+1. Заменив b+1 на a в первом уравнении, получим $a=\sqrt{\frac{5}{2}}$, откуда $b=\sqrt{\frac{5}{2}}-1$. Применим теорему Пифагора для треугольника BMX и получим

$$BX^{2} = a^{2} + b^{2} = \frac{5}{2} + \frac{5}{2} - 2\sqrt{\frac{5}{2}} + 1 = 6 - \sqrt{10}.$$

Значит, $BX = \sqrt{6 - \sqrt{10}}$.

Критерии.

7 балов – Любое правильное решение.

5 баллов – В целом правильное решение, содержащее арифметические ошибки, не влияющие на ход решения.

0 баллов – Рассуждения, не приводящие к ответу, или логически ошибочные рассуждения.

5. Числа $\frac{1}{a+b}$, $\frac{1}{a+c}$, $\frac{1}{b+c}$ образуют арифметическую прогрессию. Верно ли, что числа a^2 , b^2 , c^2 также образуют арифметическую прогрессию? Ответ обоснуйте.

Ответ: Да.

Решение. Так как указанные три числа образуют арифметическую прогрессию, то верно равенство: $\frac{1}{a+c} - \frac{1}{a+b} = \frac{1}{b+c} - \frac{1}{a+c}$. Тогда, приводя к общему знаменателю, получаем: $\frac{b-c}{(a+c)(a+b)} = \frac{a-b}{(a+c)(b+c)}$. Отсюда:

$$(b-c)(b+c)=(a-b)(a+b)$$
 или $b^2-c^2=a^2-b^2$, что в соответствии

с определением и означает, что числа a^2 , b^2 , c^2 образуют арифметическую прогрессию.

Комментарий. Можно также использовать характеристическое свойство арифметической прогрессии: числа x, y, z образуют арифметическую прогрессию тогда и только тогда, когда x+z=2y.

Критерии.

7 баллов – Полное доказательство.

2 балла — Использование определения арифметической прогрессии для составления верного равенства $\frac{1}{a+c} - \frac{1}{a+b} = \frac{1}{b+c} - \frac{1}{a+c}$.

0 баллов – Только ответ.