

2023-2024

11 класс I этап

1. Какое из чисел больше: 77^7 или 7^{77} ?

Ответ: Второе число больше.

Решение. $7^{10} > 7^2 > 11$, поэтому $7^{11} = 7 \times 7^{10} > 7 \times 11 = 77$. Отсюда следует, что $7^{77} = (7^{11})^7 > 7^{77}$

Критерии.

7 баллов – Верный ответ и доказательство.

1 балл – Только ответ.

2. Приведите пример числа x , для которого выполняется равенство $\sin 2025x - \operatorname{tg} 2024x = \cos 2023x$ Ответ обоснуйте.

Ответ: Например, $\frac{\pi}{4}$

Решение: Так как $\frac{2024\pi}{4} = 506\pi = 253 \cdot 2\pi$ кратно периоду, имеем

$$\sin \frac{2025\pi}{4} = \sin \sin \left(253 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{4} \right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \frac{2023\pi}{4} = \cos \cos \left(253 \cdot 2\pi - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{2024\pi}{4} = (253 \cdot 2\pi) = 0$$

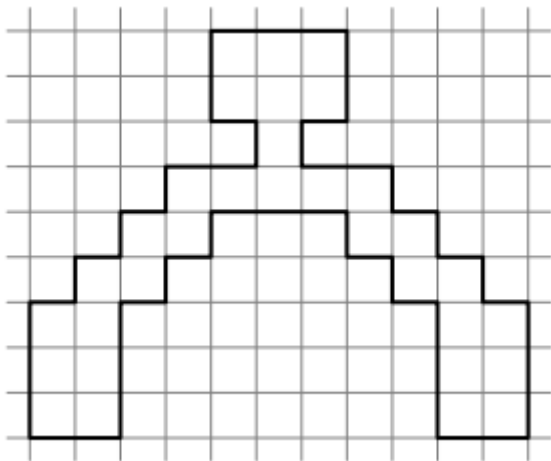
$$\frac{\sqrt{2}}{2} - 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Критерии.

7 баллов – Приведён верный ответ, и показано, что при этом значении x равенство верно.

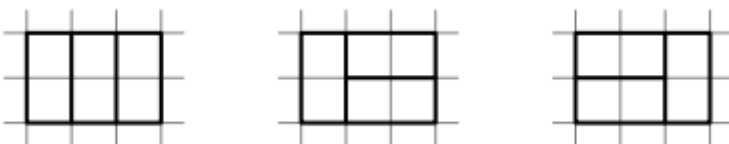
0 баллов – Приведён только ответ.

3. Сколькими способами можно разрезать по клеткам приведённую ниже картинку на прямоугольники 1×2 (сторона одной клетки равна 1)?

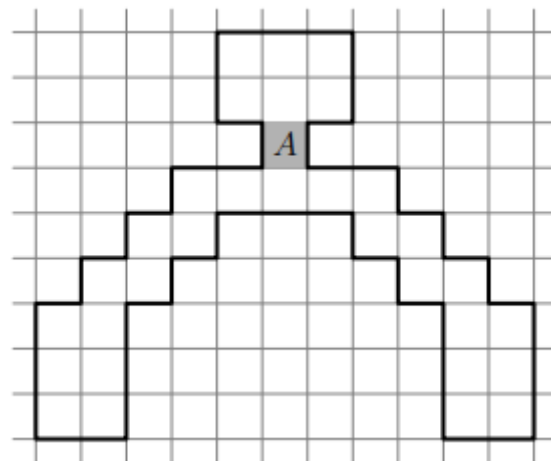


Ответ: 27.

Решение. Прямым перебором можно убедиться, что количество разрезов прямоугольника 2×3 на прямоугольники 1×2 равно трём (все три варианта приведены на рисунке ниже).

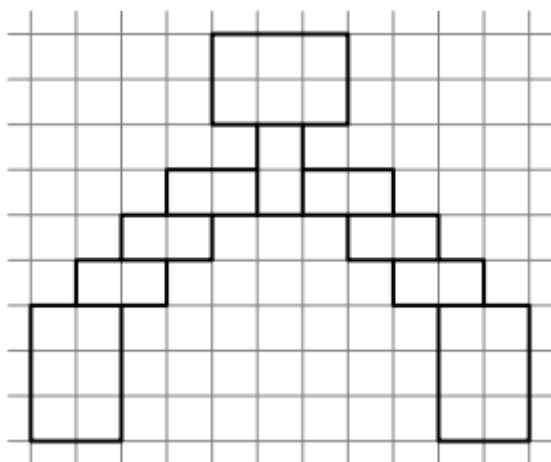


Рассмотрим клетку А:



Если А является нижней клеткой вертикального прямоугольника 1×2 , то остающаяся верхняя часть фигуры имеет нечётную площадь и не может быть разрезана. Значит, А является верхней клеткой вертикального прямоугольника 1×2 .

Тогда следующее частичное разрезание получается однозначно:



Осталось разрезать три отдельных прямоугольника 2×3 . Для каждого из них есть три разрезания, значит, для всех вместе есть $3^3 = 27$ разрезаний.

Критерии.

7 баллов – Верное решение.

5 баллов – При рассмотрении случаев несколько (не много!) пропущены.

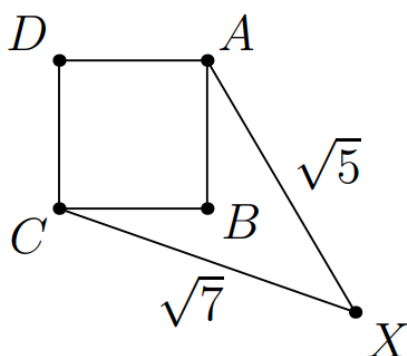
4 баллов – Решение перебором, но много (около половины) случаев пропущены.

1 балл – Посчитаны некоторые разрезания (около 4-х)

1 балл – Только правильный ответ.

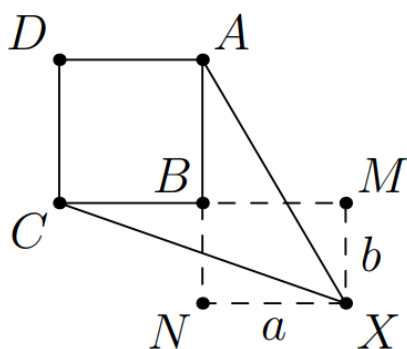
4. На плоскости дан квадрат $ABCD$ со стороной 1 и точка X (см. рисунок).

Известно, что $XA = \sqrt{5}$, $XC = \sqrt{7}$. Чему равно XB ?



Ответ: $\sqrt{6} - \sqrt{10}$

Решение. Опустим из точки X перпендикуляры XM и XN на прямые CB и AB соответственно. Четырёхугольник $BMXN$ — прямоугольник; обозначим длины его сторон BM и NX за a , BN и MX — за b .



По теореме Пифагора для треугольников ANX и CMX выполнены соотношения $AN^2 + NX^2 = AX^2$, $CM^2 + XM^2 = CX^2$.

Получаем систему $(1 + b)^2 + a^2 = 5$, $(1 + a)^2 + b^2 = 7$. Вычтя из второго уравнения первое, получим $2(a - b) = 7 - 5$, т. е. $a = b + 1$. Заменив

$b + 1$ на a в первом уравнении, получим $a = \sqrt{\frac{5}{2}}$, откуда $b = \sqrt{\frac{5}{2}} - 1$.

Применим теорему Пифагора для треугольника BMX и получим

$$BX^2 = a^2 + b^2 = \frac{5}{2} + \frac{5}{2} - 2\sqrt{\frac{5}{2}} + 1 = 6 - \sqrt{10}.$$

Значит, $BX = \sqrt{6 - \sqrt{10}}$.

Критерии.

7 баллов – Любое правильное решение.

5 баллов – В целом правильное решение, содержащее арифметические ошибки, не влияющие на ход решения.

0 баллов – Рассуждения, не приводящие к ответу, или логически ошибочные рассуждения.

5. Числа $\frac{1}{a+b}$, $\frac{1}{a+c}$, $\frac{1}{b+c}$ образуют арифметическую прогрессию. Верно ли, что числа a^2 , b^2 , c^2 также образуют арифметическую прогрессию? Ответ обоснуйте.

Ответ: Да.

Решение. Так как указанные три числа образуют арифметическую прогрессию, то верно равенство: $\frac{1}{a+c} - \frac{1}{a+b} = \frac{1}{b+c} - \frac{1}{a+c}$. Тогда, приводя к общему знаменателю, получаем: $\frac{b-c}{(a+c)(a+b)} = \frac{a-b}{(a+c)(b+c)}$. Отсюда:

$(b - c)(b + c) = (a - b)(a + b)$ или $b^2 - c^2 = a^2 - b^2$, что в соответствии

с определением и означает, что числа a^2 , b^2 , c^2 образуют арифметическую прогрессию.

Комментарий. Можно также использовать характеристическое свойство арифметической прогрессии: числа x , y , z образуют арифметическую прогрессию тогда и только тогда, когда $x+z=2y$.

Критерии.

7 баллов – Полное доказательство.

2 балла – Использование определения арифметической прогрессии для составления верного равенства $\frac{1}{a+c} - \frac{1}{a+b} = \frac{1}{b+c} - \frac{1}{a+c}$.

0 баллов – Только ответ.