15.09.2022

Тема: Тотожні перетворення логарифмічних виразів.

Логарифмічна функція та її властивості

Посилання на підручник: https://lib.imzo.gov.ua/wa-data/public/site/books2/pidruchnyky-11-klas-2019/13-matematyka-11-klas/merzlyak-ag-matematyka-algebra-i-poch-analizu-ta-geometriya-riven-standartu-11-kl.pdf

Матеріали до теми:

Тотожні перетворення логарифмічних виразів

Установити відповідність між виразами (1–4) та їхніми значеннями (А–Д).

1. $\frac{\log_3 64}{\log_3 2}+\frac{\log_5 9}{\log_5 3}$	**А.** 7
2. $\frac{\log_4 625}{\log_4 5}+\frac{\log_7 128}{\log_7 2}$	**Б.** 8
3. $\frac{\log_5 49}{\log_5 7}+\frac{\log_3 \frac{1}{16}}{\log_3 \frac{1}{2}}$	**В.** 9
4. $\frac{\lg 125}{\lg 5}+\frac{\log_3 16}{\log_3 2}$	**Г.** 6
	Д. 11

Розв'язування: Заданий тип логарифмів **спрощують методом перетворення чисел в логарифмах чисельнику до тих, що містяться в логарифмах у знаменнику**.

$$\frac{\log_3 64}{\log_3 2}+\frac{\log_5 9}{\log_5 3}=\frac{\log_3 2^6}{\log_3 2}+\frac{\log_5 3^2}{\log_5 3}=$$
$$=\frac{6\log_3 2}{\log_3 2}+\frac{2\log_5 3}{\log_5 3}=6+2=8$$

1 - Б.

$$\frac{\log_4 625}{\log_4 5}+\frac{\log_7 128}{\log_7 2}=\frac{\log_4 5^4}{\log_4 5}+\frac{\log_7 2^7}{\log_7 2}=$$
$$=\frac{4\log_4 5}{\log_4 5}+\frac{7\log_7 2}{\log_7 2}=4+7=11$$

2 - Д.

$$\frac{\log_5 49}{\log_5 7}+\frac{\log_3 \frac{1}{16}}{\log_3 \frac{1}{2}}=\frac{\log_5 7^2}{\log_5 7}+\frac{\log_3 \left(\frac{1}{2}\right)^4}{\log_3 \frac{1}{2}}=$$
$$=\frac{2\log_5 7}{\log_5 7}+\frac{4\log_3 \frac{1}{2}}{\log_3 \frac{1}{2}}=2+4=6$$

3 - Г.

$$\frac{\lg 125}{\lg 5}+\frac{\log_3 16}{\log_3 2}=\frac{\lg 5^3}{\lg 5}+\frac{\log_3 2^4}{\log_3 2}=$$
$$=\frac{3\lg 5}{\lg 5}+\frac{4\log_3 2}{\log_3 2}=3+4=7$$

4 - А.

Обчислення не складні і нам дещо дивно, як такі завдання на ЗНО тестах йдуть одні з останніх та за їх обчислення нараховують високі оцінки.

Приклад 6.31 Установити відповідність між виразами (1–4) та їхніми значеннями (А–Д).

1. $\log_3 7 \cdot \log_{49} 81$	А. 1,25
2. $\log_5 8 \cdot \log_{16} 125$	Б. 1,5
3. $\log_9 1000 \cdot \lg 3$	В. 1,75
4. $\log_{81} 128 \cdot \log_2 3$	Г. 2
	Д. 2,25

Розв'язування: Маємо 4 варіанти тесту, в кожному завданні є **добутки логарифмів в яких попарно основа другого логарифма є числом першого логарифма в певному показнику, і число другого в другому логарифмі рівне основі першого в певному степені**.
Тому спершу працюємо з показниками, а далі пригадуємо **співвідношення для переходу до іншої основи в логарифмі**:
$\log_a b=1/\log_b a$.

Знаючи цю властивість логарифма без проблем виконуємо наступні обчислення:

$$\log_3 7 \cdot \log_{49} 81 = \frac{1}{\log_7 3} \cdot \log_{7^2} 3^4 = \\ = \frac{1}{\log_7 3} \cdot \frac{4}{2} \log_7 3 = \frac{\log_7 3}{\log_7 3} \cdot \frac{4}{2} = 1 \cdot 2 = 2$$

1 - Г.

$$\log_5 8 \cdot \log_{16} 125 = \log_5 2^3 \cdot \log_{2^4} 5^3 = \\ = 3\log_5 2 \cdot \frac{3}{4} \log_2 5 = 3 \cdot \frac{1}{\log_2 5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \log_2 5 = \frac{9}{4} = 2,25$$

2 - Д.

$$\log_9 1000 \cdot \lg 3 = \log_{3^2} 10^3 \cdot \frac{1}{\log_3 10} = \\ = \frac{3}{2} \log_3 10 \cdot \frac{1}{\log_3 10} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\log_3 10}{\log_3 10} = \frac{3}{2} = 1,5$$

3 - Б.

$$\log_{81} 128 \cdot \log_2 3 = \log_{3^4} 2^7 \cdot \frac{1}{\log_3 2} = \\ = \frac{7}{4} \log_3 2 \cdot \frac{1}{\log_3 2} = \frac{7}{4} \cdot \frac{\log_3 2}{\log_3 2} = \frac{7}{4} = 1,75$$

4 – В.

Приклад 6.32 Установити відповідність між виразами (1–4) та їхніми значеннями (А–Д).

1. $\log_8 6 \cdot \log_6 5 \cdot \log_5 4$
2. $\log_{14} 8 \cdot \log_{15} 14 \cdot \log_{16} 15$
3. $\log_7 5 \cdot \log_5 4 \cdot \log_3 27$
4. $\lg 2 \cdot \log_{11} 10 \cdot \log_{128} 11$

А. 5/8
Б. 1/7
В. 2/3
Г. 3/4
Д. 2/5

Розв'язування: Необхідно спростити добутки трьох логарифмів з різними основами. Для цього **в другому та третьому логарифмі переходимо до основи першого логарифма**, і так для всіх 4 завдань тесту.
Алгоритм застосовуйте для спрощення усіх завдань де задані добутки

логарифмів з не рівними між собою основами.

$$\log_8 6\cdot\log_6 5\cdot\log_5 4=\frac{\log_8 6}{1}\cdot\frac{\log_8 5}{\log_8 6}\cdot\frac{\log_8 4}{\log_8 5}=$$
$$=\log_8 4=\log_{2^3} 2^2=\frac{2}{3}\log_2 2=\frac{2}{3}$$

1 - В.

$$\log_{14} 8\cdot\log_{15} 14\cdot\log_{16} 15=\frac{1}{\log_8 14}\cdot\frac{\log_8 14}{\log_8 15}\cdot\frac{\log_8 15}{\log_8 16}=$$
$$=\frac{1}{\log_8 16}=\frac{1}{\log_{2^3} 2^4}=\frac{1}{\frac{4}{3}\log_2 2}=\frac{3}{4}$$

2 - Г.

$$\log_7 5\cdot\log_5 4\cdot\log_{32} 7=\frac{\log_2 5}{\log_2 7}\cdot\frac{\log_2 4}{\log_2 5}\cdot\frac{\log_2 7}{\log_2 32}=$$
$$=\frac{\log_2 4}{\log_2 32}=\frac{\log_2 2^2}{\log_2 2^5}=\frac{2\log_2 2}{5\log_2 2}=\frac{2}{5}$$

3 - Д.

$$\lg 2\cdot\log_{11} 10\cdot\log_{128} 11=\frac{\log_2 2}{\log_2 10}\cdot\frac{\log_2 10}{\log_2 11}\cdot\frac{\log_2 11}{\log_2 128}=$$
$$=\frac{\log_2 2}{\log_2 128}=\frac{\log_2 2}{\log_2 2^7}=\frac{\log_2 2}{7\log_2 2}=\frac{1}{7}$$

4 – Б.

Приклад 6.33 $log_{7}2=a$, $log_{7}3=b$. Установити відповідність між логарифмами чисел (1–4) та їх вираженням через a та b (А–Д).

1. $\log_7 1{,}5$	**А.** $\frac{1}{a+b}$
2. $\log_7 4{,}5$	**Б.** $\frac{2b}{a}$
3. $\log_6 7$	**В.** $2b-a$
4. $\log_2 9$	**Г.** $\frac{1}{a-b}$
	Д. $b-a$

Розв'язування: **Спрощуємо вирази за допомогою формул суми логарифмів та різниці**:

$\log_7 1{,}5 = \log_7 \frac{3}{2} = \log_7 3 - \log_7 2 = b - a$ **1 - Д.**

$\log_7 4{,}5 = \log_7 \frac{9}{2} = \log_7 9 - \log_7 2 =$
$= \log_7 3^2 - \log_7 2 = 2\log_7 3 - \log_7 2 = 2b - a$ **2 - В.**

$\log_6 7 = \frac{1}{\log_7 6} = \frac{1}{\log_7 (2 \cdot 3)} =$
$= \frac{1}{\log_7 2 + \log_7 3} = \frac{1}{a + b}$ **3 - А.**

$\log_2 9 = \frac{\log_7 9}{\log_7 2} = \frac{\log_7 3^2}{\log_7 2} = \frac{2\log_7 3}{\log_7 2} = \frac{2b}{a}$ **4 – Б.**

Наведені приклади на практиці є повторенням найпоширеніших властивостей логарифма, вчіть їх із запропонованих пояснень.

Приклад 6.34 $\log_a b = 5$. Установити відповідність між виразами (1–4) та їхніми значеннями (А–Д).

1. $\log_{ab} a$	**А.** 5,5
2. $\log_{ab} b$	**Б.** 3
3. $\log_b \sqrt{ab}$	**В.** $\frac{5}{6}$
4. $\log_a \sqrt{ab}$	**Г.** 0,6
	Д. $\frac{1}{6}$

Розв'язування: Тестові завдання на перетворення виразів **виконуємо за допомогою правила переходу до другої основи під логарифмом** $\log_a b = \log_c b / \log_c a$
та **розписання логарифму добутку через суму логарифмів** $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$.

Детально перетворення наведені далі

$$\log_{ab} a = \frac{\log_a a}{\log_a ab} = \frac{1}{\log_a a + \log_a b} = \frac{1}{1+5} = \frac{1}{6} \qquad \textbf{1 - Д.}$$

$$\log_{ab} b = \frac{\log_a b}{\log_a ab} = \frac{\log_a b}{\log_a a + \log_a b} = \frac{5}{1+5} = \frac{5}{6} \qquad \textbf{2 - В.}$$

$$\log_b \sqrt{ab} = \frac{\log_a \sqrt{ab}}{\log_a b} = \frac{\log_a (\sqrt{ab})^{\frac{1}{2}}}{\log_a b} = \frac{\frac{1}{2}\log_a ab}{\log_a b} = \qquad \textbf{3 – Г.}$$

$$= \frac{\log_a ab}{2\log_a b} = \frac{\log_a a + \log_a b}{2\log_a b} = \frac{1+5}{2\cdot 5} = \frac{6}{10} = 0{,}6$$

$$\log_a \sqrt{ab} = \frac{\log_a \sqrt{ab}}{\log_a a} = \frac{\log_a (\sqrt{ab})^{\frac{1}{2}}}{1} = \frac{1}{2}\log_a ab = \qquad \textbf{4 – Б.}$$

$$= \frac{\log_a ab}{2} = \frac{\log_a a + \log_a b}{2} = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Приклад 6.35 Обчислити значення виразу
1/70•2^(3log27).
Розв'язування: Використаємо **основну логарифмічна тотожність**

$a^{\log_a b} = b$

решта обчислень зводиться до піднесення сімки до кубу та множення на дріб =1/70:

Відповідь: 4,9.
Приклад 6.36 Обчислити:
$25^{(2-\log_5 75)} + 7^{(-\log_7 3)} \cdot 27$.
Розв'язування: Розписуємо степені та зводимо під **застосування основної логаріфмічної тотожності**

$$(25^{2-\log_5 75} + 7^{-\log_7 3}) \cdot 27 = (25^2 : 25^{\log_5 75} + 7^{\log_7 3^{-1}}) \cdot 27 =$$

$$= ((5^2)^2 : 5^{2\log_5 75} + 3^{-1}) \cdot 27 = (5^4 : 75^2 + 3^{-1}) \cdot 27 =$$

$$= \left(\frac{5^4}{(25\cdot 3)^2} + \frac{1}{3}\right) \cdot 27 = \left(\frac{5^4}{(5^2\cdot 3)^2} + \frac{1}{3}\right) \cdot 27 = \left(\frac{5^4}{5^4\cdot 3^2} + \frac{1}{3}\right) \cdot 27 =$$

$$= \left(\frac{5^4}{3^2} + \frac{1}{3}\right) \cdot 27 = \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\right) \cdot 27 = \frac{27}{9} + \frac{27}{3} = 3 + 9 = 12$$

.

Відповідь: 12.
Приклад 6.37 Обчислити:
3^(log35/log53)-5^log35+7^log749.
Розв'язування: Завдання виконуємо кілька разів застосовуючи основну логарифмічну тотожність

$$3^{\frac{\log_3 5}{\log_5 3}} - 5^{\log_3 5} + 7^{\log_7 49} = \left(3^{\log_3 5}\right)^{\frac{1}{\log_5 3}} - 5^{\frac{1}{\log_5 3}} + 49 =$$

$$= 5^{\frac{1}{\log_5 3}} - 5^{\frac{1}{\log_5 3}} + 49 = 49$$

Відповідь: 49.

Приклад 6.40 Обчислити значення виразу:

$$2^{\log_2^2 3} - 3^{\log_2 3} - 9^{\log_3 2}$$

Розв'язування: Маємо різницю показникових виразів де в степені задані логарифми. Для спрощення виразу спершу скористаємося властивостями показникових функцій та **розпишемо логарифми** так, **щоб можна було застосувати основну логарифмічну тотожність**

$$a^{\log_a b} = b$$

В результаті отримаємо:

$$2^{\log_2^2 3} - 3^{\log_2 3} - 9^{\log_3 2} = (2^{\log_2 3})^{\log_2 3} - 3^{\log_2 3} - 3^{2\log_3 2} =$$

$$= 3^{\log_2 3} - 3^{\log_2 3} - 3^{\log_3 2^2} = 0 - 2^2 = -4$$

Відповідь: -4.

Приклад 6.43 Обчислити значення виразу $\log_a 500 - \log_a 4$, якщо $\log_5 a = 1/4$.

Розв'язування: Просте, на нашу думку, **завдання на формулу різниці логарифмів + застосування переходу від однієї основи під логарифмом до іншої**:

$$\log_a 500 - \log_a 4 = \log_a (500 : 4) = \log_a 125 =$$

$$= \log_a 5^3 = 3\log_a 5 = \frac{3}{\log_5 a} = \frac{3}{1/4} = 3 \cdot 4 = 12$$

З такого плану завданнями на перетворення логарифмів Ви повинні вміти виконувати на відмінно. Лише тоді зможете розраховувати на високі оцінки та правильні результати.

Відповідь: 12.

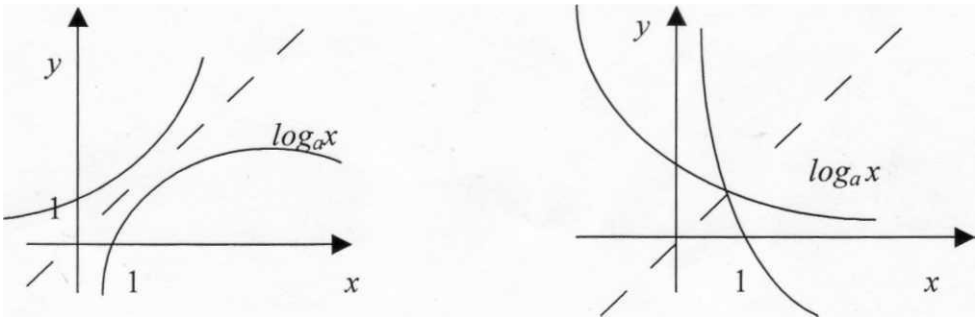
Логарифмічна функція, її властивості і графік

Користуючись формулою показникової функції $y = a^x$ знайдемо формулу функції оберненої до даної, врахуючи те, що ця функція оборотна.

$x = a^y$; $y = \log_a x$, $x>0$, $a>0$, $a \neq 1$

Означення. Логарифмічною називається функція $y = \log_a x$, де $a>0$, $a \neq 1$, обернена до показникової $y = a^x$

Побудуємо графік логарифмічної функції



Властивості:

1). *Д (log) = (0; + ∞);*

2). *Е (log)= (– ∞ ; + ∞);*

3). Якщо $a >1$, то функція $y = \log_a x$ – зростає, а якщо $0 < a < 1$ – спадає;

4). Графік проходить через точку (1;0);

Повідомлення учнів про логарифмічну функцію в природі, науці, техніці, мистецтві. (Додається. Демонструється графік логарифмічної спіралі).

Завдання:

1. Опрацювати теоретичний матеріал §1, п.5. Повторити п.4.
2. Законспектувати означення, властивості. Виконати малюнки.
3. Розглянути письмово: 4.11, 4.13, 4.15, 5.3, 5.5, 5.7.
4. Переглянути відеоматеріали за посиланням:

https://naurok.com.ua/prezentaciya-do-vidkritogo-zanyattya-z-temi-totozhni-peretvorennya-logarifmichnih-viraziv-184989.html

https://naurok.com.ua/urok-prezentaciya-logarifmichna-funkciya-grafik-ta-vlastivosti-32051.html

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!!! Роботу виконувати у робочому або окремому зошиті (якщо робочий залишився у гуртожитку), фотографувати і надсилати на електронну адресу valentinatalavera@ukr.net , у темі листа вказувати – ПІБ, предмет, номер групи.

Можна підготувати мультимедійну презентацію з теми і надіслати на електронну адресу valentinatalavera@ukr.net .