

Profesor: Lic. Salinas Shiguay Ruffo Emilio

$$2x = 8 \quad x = 4$$

$$x^2 = 9 \quad x^2 = (\pm 3)^2 \quad x = \pm 3$$

$$2^x = 3 \quad \text{Se resuelva por logaritmos}$$

LOGARITMOS EN R

DEFINICIÓN DE LOGARITMO

Dado un número real $a > 0$ y $a \neq 1$, el logaritmo de un número $x > 0$ en la base a es el exponente y al que debe elevarse a , de manera que se cumpla que $a^y = x$. Es decir:

$$\log_a x = y \leftrightarrow a^y = x; \quad x > 0; \quad a > 0; \quad a \neq 1$$

Además:

$\log_a x = y$
se lee: "Logaritmo de x en base a es igual a y "

Ejemplos

$$\log_2 8 = 3 \quad \text{porque } 2^3 = 8$$

$$\log_3 81 = 4 \quad \text{porque } 3^4 = 81$$

$$\log_{1/3} 243 = x \leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x = 243$$

$$\log_{1/2} (x^2 - x - 2) = -2 \leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = x^2 - x$$

$$\log_\pi \pi = 1 \leftrightarrow \pi^1 = \pi$$

$$\log_{12} 12 = 1 \leftrightarrow 12^1 = 12$$

$$\log_{100} 1 = x \leftrightarrow 100^x = 1$$

$$100^x = 100^0 \\ x = 0$$

$$\log_{1/5} 1 = 0$$

$$\log_{(-2)} 1 = \text{no existe en } R, \text{ ya que } a = -2 < 0$$

$$\log_{(-4)} (-4) = \text{no existe en } R, \text{ ya que } a = -4 < 0$$

IDENTIDAD FUNDAMENTAL DEL LOGARITMO

De la definición de logaritmo $\log_a x = y$, tenemos que $a^y = x$.

Luego obtenemos la identidad fundamental:

$$a^{\log_a x} = x \quad \forall x > 0 \wedge a \in R^+ - \{1\}$$

Ejemplos

$$1) 3^{\log_3 5} = 5$$

$$2) (x^2 + 2)^{\log(x^2 + 2)} = 4; \quad x \in R$$

$$2) (\sqrt{2} - \sqrt{3})^{\log(\sqrt{2} - \sqrt{3})} = \text{no existe en } R, \\ \text{puesto que la base } (\sqrt{2} - \sqrt{3}) \text{ es negativa}$$

TEOREMAS SOBRE LOGARITMOS

Si los siguientes logaritmos existen en R , entonces se cumplen estos teoremas

Teorema 1: $\forall x > 0; \forall y > 0 \wedge a \in R^+ - \{1\}$:

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

En general:

$$\text{si } a \in R^+ - \{1\} \wedge \{x; y; z; \dots; w\} \subset R^+$$

$$\log_a(xyz \dots w) = \log_a x + \log_a y + \log_a z + \dots + \log_a w$$

Ejemplos

$$1) \log_2 15 = \log_2(3)(5) = \log_2 3 + \log_2 5$$

$$2) \log_4(3x) = \log_4 3 + \log_4 x; \quad x > 0$$

$$3) \log_3(x+2) + \log_3(x-2) = \log_3(x+2)(x-2)$$

$$\log_3(x+2) + \log_3(x-2) = \log_3(x^2 - 4); \quad x > 2$$

4) Simplifique la expresión M.

$$M = \log_5 \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \log_5 \left(1 + \frac{1}{3}\right) + \log_5 \left(1 + \frac{1}{4}\right) + \dots$$

$$\dots + \log_5 \left(1 + \frac{1}{49}\right)$$

Resolución

Aplicamos el teorema

$$M = \log_5 \left[\left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{4}{3}\right) \left(\frac{5}{4}\right) \left(\frac{6}{5}\right) \dots \left(\frac{49}{48}\right) \left(\frac{50}{49}\right) \right]$$

$$M = \log_5 \left[\left(\frac{50}{2}\right) \right] = \log_5 25 = \log_5 5^2 = 2 \log_5 5$$

$$M = 2$$

Teorema 2: $n; m \in \mathbb{R}, x > 0$

$$\log_a^m x^n = \frac{n}{m} \log_a x$$

Consecuencias

$$\log_a x^n = n \log_a x; \quad n \in \mathbb{R} \rightarrow \log_a a^n = n$$

$$\log_a x = \frac{\log_a x^n}{n}; \quad n \in \mathbb{R}$$

$$\log_a x = \frac{\log_{\sqrt[n]{a}} \sqrt[n]{x}}{n}; \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

Ejemplos

$$1) \log_2 2^{100} = 100 \log_2 2 = 100(1) = 100$$

$$2) \log_3 \sqrt[5]{3} = \log_3 3^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5} \log_3 3 = \frac{1}{5} (1) = \frac{1}{5}$$

$$3) \log_6 \sqrt[5]{6^{50}} = \frac{50}{5} \log_6 6 = 10 (1) = 10$$

$$4) \log_{32} 1024 = \frac{\log_5 \sqrt[5]{32} \cdot \sqrt[5]{1024}}{\log_5 2} = \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2 \log_2 2 = 2 (1) = 2$$

Otra forma

$$\log_{32} 1024 = \log_2 \frac{5}{2} \frac{10}{2} = 10/5 \log_2 2 = 10/5 (1) = 2$$

$$5) \log_3 \sqrt[2]{2^4} = \frac{\log_3 2^3}{4^3} = \log_2 64 = \log_2 2^6 = 6 \log_2 2 = 6(1) = 6$$

$$6) \log_3^2 x = (\log_3 x) (\log_3 x) \neq 2 \log_3 x$$

$$7) \log_3^2 81 = (\log_3 81)^2 = (\log_3 3^4)^2 = (4 \log_3 3)^2 = (4 \cdot 1)^2 = 16$$

Teorema 3: $\forall a \in \mathbb{R}^+ - \{1\} \wedge \{x; y\} \subset \mathbb{R}^+$

$$\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$$

Ejemplos

$$1) \log_2 \left(\frac{5}{9} \right) = \log_2 5 - \log_2 9$$

$$2) \log_3 7 = \log_3 \left(\frac{21}{3} \right) = \log_3 21 - \log_3 3 = \log_3 21 - 1$$

3) Calcule el valor de S

$$S = \log_2 \left(\frac{37}{23} \right) + \log_2 \left(\frac{3}{74} \right) - \log_2 \left(\frac{3}{92} \right)$$

Resolución

$$S = \log_2 \left(\frac{37}{23} \right) \left(\frac{3}{74} \right) - \log_2 \left(\frac{3}{92} \right)$$

$$S = \log_2 \left(\frac{3}{46} \right) - \log_2 \left(\frac{3}{92} \right)$$

$$S = \log_2 \left(\frac{3}{92} \right) = \log_2 2 = 1$$

$$S = 1$$

Teorema 4 (cambio de base)

Si $y, a \in \mathbb{R}^+ - \{1\} \wedge x > 0$

$$\log_a x$$

$$\log_y x = \frac{\log_a x}{\log_a y}$$

Ejemplos

$$1) \log_5 3 = \frac{\log_6 3}{\log_6 5} = \frac{\log_{\pi} 3}{\log_{\pi} 5}$$

$$2) \frac{\log_{\sqrt{2}} 125}{\log_{\sqrt{2}} 25} = \log_{25} 125 = \frac{\log_{5^2} 5^3}{5^2} = \frac{3}{5}$$

Consecuencias

$$a) \forall x, y \in \mathbb{R}^+ - \{1\}: \log_y x = \frac{\log_x x}{\log_x y}$$

$$\rightarrow \log_y x = \frac{1}{\log_x y} \wedge \log_y x \cdot \log_x y = 1$$

b) Regla de la cadena

$$\log_x a \cdot \log_a y = \log_x y$$

En general

$$\log_a x \cdot \log_x y \cdot \log_y z \cdot \dots \cdot \log_w A = \log_a A$$

Ejemplos

$$1) \log_5 3 \cdot \log_3 7 = \log_5 7$$

$$2) \log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \dots = \log_2 32$$

$$= \log_2 2^5 = 5 \log_2 2 = 5$$

$$3) S = \log_3 125 \cdot \log_6 81 \cdot \log_5 36$$

$$S = (\log_3 5^3) (\log_6 3^4) (\log_5 6^2)$$

$$S = (3)(4)(2) \log_3 5 \log_6 3 \log_5 6$$

$$S = (3)(4)(2) \log_3 5 \log_5 6 \log_6 3$$

$$S = 24 \log_3 3$$

$$S = 24$$

c) Regla del intercambio $x, y > 0, a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

$$x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$$

Ejemplos

$$1) \log_4 6 = \frac{1}{\log_6 4} \rightarrow \log_4 6 \cdot \log_6 4 = 1$$

$$2) 3^{\log_5 4} = 4^{\log_5 3}$$

$$3) 2^{\log_4 (25)} = (25)^{\log_4 2} = (25)^{1/2} = 5$$

4) Calcule el valor de E

$$E = \frac{3}{\log_2 45 + 3} + \frac{2}{\log_3 40 + 2} + \frac{1}{\log_5 72 + 1}$$

Resolución

$$E = \frac{3}{\log_2 45 + \log_2 8} + \frac{2}{\log_3 40 + \log_3 9} + \frac{1}{\log_5 72 + \log_5 5}$$

$$E = \frac{3}{\log_2 360} + \frac{2}{\log_3 360} + \frac{1}{\log_5 360}$$

$$E = 3 \log_{360} 2 + 2 \log_{360} 3 + \log_{360} 5$$

$$E = \log_{360} 2^3 + \log_{360} 3^2 + \log_{360} 5$$

$$E = \log_{360} (2^3) (3^2) (5) = \log_{360} 360$$

$$E = 1$$

SISTEMAS DE LOGARITMOS

De la definición de logaritmo se deduce que cualquier número positivo, diferente de la unidad, puede utilizarse como base de un sistema de logaritmos; por lo tanto, el número de sistemas de logaritmos es ilimitado. Los más importantes son:

Sistema de logaritmos vulgares, decimales o de Briggs

Este sistema fue implementado por el matemático inglés Henry Briggs y tiene como base al número 10.

Notación

$\log N = \log_{10} N$ se lee "logaritmo decimal de N" o simplemente "logaritmo de N". No se escribe la base, pues se sobreentiende que es 10.

Ejemplos

- 1) $\log 100 = \log_{10} 10^2 = 2$
- 2) $\log 10\,000 = \log_{10} 10^4 = 4$
- 3) $\log 1\,000\,000 = \log_{10} 10^6 = 6$
- 4) $\log 0,1 = \log_{10} 10^{-1} = -1$
- 5) $\log 0,01 = \log_{10} 10^{-2} = -2$
- 6) $\log 0,0001 = \log_{10} 10^{-4} = -4$

Sistema de logaritmos naturales, neperianos o hiperbólicos

El matemático escocés Jhon Napier fue quien implementó este sistema cuya base es el número irracional $e = 2,718281\dots$

Notación

$\ln N = \log_e N$ se lee "logaritmo natural de N" o "logaritmo neperiano de N".

Ejemplos

- 1) $\ln e = \ln_e e = 1$
- 2) $e^{\ln 3} = e^{\ln_e 3} = 3$
- 3) $\ln \left(\frac{1}{e}\right) = \ln_e e^{-1} = (-1) \ln_e e = -1$
- 4) $\ln \sqrt{e} = \ln_e e^{1/2} = \frac{1}{2} \ln_e e = \frac{1}{2}$
- 5) $\ln e^x = \ln_e e^x = x \ln_e e = x$
- 6) $e^{x \cdot \ln 2} = 2^x$

PROBLEMAS RESUELTOS

- 1) Si $\log_a b = 2$ y $\log_b c = 3$, calcule el valor de M.

$$M = \log_a^3 (b^2 c^4)$$

Resolución

Por definición de logaritmos tenemos que:

$$\log_a b = 2 \rightarrow b = a^2$$

$$\log_b c = 3 \rightarrow c = b^3$$

Luego reemplazando "b" y "c" en M tenemos

$$M = \log_a^3 (b^2 c^4) = \log_a^3 ((a^2)^2 (b^3)^4)$$

$$M = \log_a^3 (a^4 b^{12}) = \log_a^3 (a^4 (a^2)^{12})$$

$$M = \log_a^3 (a^4 a^{24}) = \log_a^3 (a^{28})$$

$$M = \frac{28}{3}$$

- 2) Si $\log_2 3 = m$, halle $\log_{36} 243$ en términos de m

Resolución

Debemos expresar $\log_{36} 243$ en función de $\log_2 3$

$$\text{Como: } \log_{36} 243 = \frac{1}{\log_{243} 36} = \frac{1}{\log_{3^5} (2 \times 3)^2}$$

$$\log_{36} 243 = \frac{1}{\frac{2}{5} [\log_3 2 + \log_3 3]} = \frac{5}{2 \left[\frac{1}{m} + 1 \right]}$$

$$\log_{36} 243 = \frac{5m}{2(1+m)}$$

- 3) Reduzca la siguiente expresión

$$M = \log_8 16^{\log_4 3^{(\log_2 3)^{-1}}}$$

Resolución

$$M = \log_8 16^{\log_4 3^{\left(\frac{1}{\log_2 3}\right)}}$$

$$M = \frac{\log_8 16^{\log_4 3^{\log_3 2}}}{\log_8 16^{\log_4 2}} =$$

$$M = \log_8 16^{\frac{1}{2}} = \log_2 3 (2^2) = \frac{2}{3}$$

Teorema 4 (cambio de base)

Si $y, a \in \mathbb{R}^+ - \{1\} \wedge x > 0$

$$\frac{\log_a x}{\log_a y} = \log_y x$$

$$\text{Como: } x = \frac{\log \log 3}{\log \log 2}$$

$$x = \log_2 3$$

2) La suma de los valores de x que verifican la ecuación $\log_2 (x^2 - 1) = 3$ es igual a

Resolución

Definición

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x; \quad x > 0; \quad a > 0; \quad a \neq 1$$

Se tiene:

$$\log_2 (x^2 - 1) = 3$$

$$2^3 = x^2 - 1$$

$$8 = x^2 - 1$$

$$8 + 1 = x^2$$

$$9 = x^2$$

$$x^2 = 9$$

$$x^2 = (\pm 3)^2$$

Por ser ecuación cuadrática, x tiene dos soluciones: $x_1 = 3$ $x_2 = -3$

La suma de los valores de x que verifican la ecuación es $3 + (-3) = 0$ **(Respuesta)**

PRÁCTICA DIRIGIDA

1) El valor de x en $2^x = 3$ es

Resolución

De la consecuencia 1, del teorema 2

$$\log_a x^n = n \log_a x; \quad n \in \mathbb{R} \rightarrow \log_a a^n = n$$

Reemplazando

Logaritmo a ambos miembros

$$\log 2^x = \log 3$$

$$x (\log 2) = \log 3$$

$$x = \frac{\log \log 3}{\log \log 2}$$

3) El valor negativo de x que verifica $2^{3x^2} = 8$ es

Resolución

$$2^{3x^2} = 2^3$$

Los exponentes de la base 2, deben ser iguales

$$3^{x^2} = 3$$

$$3^{x^2} = 3^1$$

Por comparación

$$x^2 = 1$$

$$x^2 = (\pm 1)^2$$

Por ser ecuación cuadrática, x tiene dos soluciones:

$$x_1 = 1 \quad x_2 = -1 \text{ (Respuesta)}$$

4) Si $\log 2 = a$ y $\log 3 = b$, entonces el logaritmo de 18 es

Resolución

$$\begin{array}{c|c} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad 18 = 2 \times 3 \times 3 = 2 \times 3^2$$

$$\log 18 = \log 2 \times 3^2$$

Teorema 1: $\forall x > 0; \forall y > 0 \wedge a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log 18 = \log 2 \times 3^2$$

$$\log 18 = \log 2 + \log 3^2$$

$$\log 18 = \log 2 + 2(\log 3)$$

Reemplazando

$$\log 18 = a + 2(b)$$

$$\log 18 = a + 2b \text{ Respuesta}$$

5) Calcule el valor de S

$$S = 2^{\log_4 5} - 5^{\log_4 2} + 6^{\log_6 7} - 12^{\log_{12} 10}$$

Resolución

$$S = 2^{\log_4 5} - 5^{\log_4 2} + 6^{\log_6 7} - 12^{\log_{12} 10}$$

Regla del intercambio $x, y > 0, a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

$$x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$$

$$S = 5^{\log_4 2} - 5^{\log_4 2} + 6^{\log_6 7} - 12^{\log_{12} 10}$$

Regla del intercambio
Se cancelan

$$S = 6^{\log_6 7} - 12^{\log_{12} 10}$$

$$a^{\log_a x} = x \quad \forall x > 0 \wedge a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$$

$$S = 7 - 10$$

$$S = -3 \text{ Respuesta}$$

6) Calcule el valor de x que verifica la ecuación

$$3^{\sqrt{x}} = 2$$

Resolución

Logaritmo a ambos miembros

$$\log 3^{\sqrt{x}} = \log 2$$

$$\sqrt{x} \log 3 = \log 2$$

$$\sqrt{x} = \frac{\log \log 2}{\log \log 3}$$

$$\sqrt{x} = \log_3 2$$

Elevo al cuadrado

$$x = (\log_3 2)^2 \text{ Respuesta}$$

7) Reduzca la expresión

$$E = \log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \dots \cdot \log_{m+1} m.$$

Resolución

Teorema 4 (cambio de base)

Si $y; a \in \mathbb{R}^+ - \{1\} \wedge x > 0$

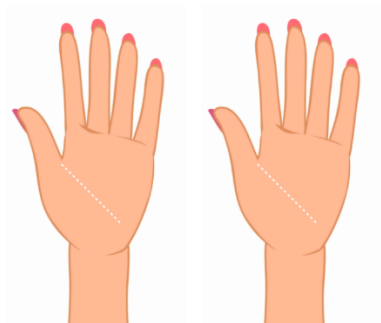
$$\log_y x = \frac{\log_a x}{\log_a y}$$

$$E = \log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \dots \cdot \log_{m+1} m$$

$$E = \frac{\log \log 2}{\log \log 3} \cdot \frac{\log 3}{\log \log 4} \cdot \frac{\log \log 4}{\log \log 5} \cdot \dots \cdot \frac{\log \log m}{\log (m+1)} =$$

$$E = \frac{\log \log 2}{\log \log (m+1)}$$

$$E = \log_{(m+1)} 2$$



$$8 = 8_{(10)}$$

$$8 + 5 = ?$$

10 DEDOS



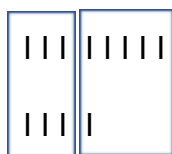
$$= 13_{(10)} = 13$$

8 DEDOS



$$= 15_{(8)}$$

6 DEDOS



$$= 21_{(6)}$$