---

uc3m Universidad Carlos III de Madrid	**UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID** EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso **2023-2024** **MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	**E**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a cinco preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.

Cada ejercicio se valorará sobre 2 puntos, y si consta de dos apartados, cada apartado se valorará sobre 1 punto.
DURACIÓN: 90 minutos.

1. (2 puntos) Se consideran las matrices M, P y N dadas por: $M = (a\ b\ c\ 1)$, $P = (-\ 1\ \ -\ 3\ )$, $N = (-\ 1\ 2\ )$

a) Determine los valores de los parámetros a, b, c ∈ R para los que se verifica:

$$MN = 2N \ \text{ y } \ (N^tM)^t + MP = N$$

Resolución

$MN = 2N \Rightarrow (a\ b\ c\ 1\ )(-\ 1\ 2\ ) = 2(-\ 1\ 2\ ) \Rightarrow (-\ a\ +\ 2b\ \ -\ c\ +\ 2\ ) = (-\ 2\ 4\ ) \Rightarrow$
$\{-\ a\ +\ 2b\ = -\ 2\ \ -\ c\ +\ 2\ =\ 4 \rightarrow c\ = -\ 2\ ,\ M\ = (a\ b\ \ -\ 2\ 1\ )$

$\left(N^tM\right)^t\ +\ MP\ =\ N \Rightarrow [(-\ 1\ 2\ )(a\ b\ \ -\ 2\ 1\ )]^t\ +\ (a\ b\ \ -\ 2\ 1\ )(-\ 1\ \ -\ 3\ ) = (-\ 1\ 2\ )$ Operando,

$[(-\ a\ -\ 4\ \ -\ b\ +\ 2\ )]^t\ +\ (-\ a\ -\ 3b\ \ -\ 1\ ) = (-\ 1\ 2\ ) \Rightarrow (-\ a\ -\ 4\ \ -\ b\ +\ 2\ ) + (-\ a\ -\ 3b\ \ -\ 1\ ) = (-\ 1$
.

Igualando, $\{-\ 2a\ -\ 3b\ -\ 4\ = -\ 1 \rightarrow -\ 2a\ -\ 3b\ =\ 3\ \ -\ b\ +\ 1\ =\ 2 \rightarrow b\ = -\ 1\ ,$
$-\ 2a\ -\ 3(-\ 1) = 3 \Rightarrow a\ =\ 0$

Observamos que para los avalores hallados se cumple también $-\ a\ +\ 2b\ = -\ 2$ pues $0\ +\ 2(-\ 1)\ = -\ 2$

Conclusión: debe ser a = 0, b = −1, c = −2 y queda $M\ = (0\ \ -\ 1\ \ -\ 2\ 1\ )$

b) Para a = 0, b = −1 y c = −2, compruebe que $M^2 = M + 2I$, donde I denota la matriz identidad de tamaño 2 × 2, y utilice dicha igualdad para calcular M^{-1} y M^3.

Resolución

$M = (0\ \ -\ 1\ \ -\ 2\ 1\ )$;
$M^2 = (0\ \ -\ 1\ \ -\ 2\ 1\ )(0\ \ -\ 1\ \ -\ 2\ 1\ ) = (2\ \ -\ 1\ \ -\ 2\ 3\ ) = (0\ \ -\ 1\ \ -\ 2\ 1\ ) + 2(1\ 0\ 0\ 1\ ) = M\ +\ 2I$

Observa $M^2 = M + 2I$. Trasponiendo términos, $M^2 - M = 2I \Rightarrow \frac{1}{2}\left(M^2\ -\ MI\right) = I$

Como $\frac{1}{2}MM\ -\ \frac{1}{2}IM\ =\ I$, sacando factor común M, por la derecha, $\left(\frac{1}{2}M\ -\ \frac{1}{2}I\right)M\ =\ I$

Como $M\frac{1}{2}M\ -\ M\frac{1}{2}I\ =\ I$, sacando factor común M, por la derecha, $M\left(\frac{1}{2}M\ -\ \frac{1}{2}I\right) = I$

Luego, por la definición de inversa $M^{-1}\ =\ \frac{1}{2}M\ -\ \frac{1}{2}I\ =\ \frac{1}{2}(M\ -\ I)$; $M^3\ =\ M^2M\ =\ (M\ +\ 2I)M\ =$

$= M^2\ +\ 2M\ =\ M\ +\ 2I\ +\ 2M\ =\ 3M\ +\ 2I\ =\ 3(0\ \ -\ 1\ \ -\ 2\ 1\ ) + 2(1\ 0\ 0\ 1\ ) = (2\ \ -\ 1\ \ -\ 2\ 3\ )$

2. (2 puntos)

a) Encuentre el valor del parámetro real a tal que $\int_0^1 \left(\sqrt{x} - a\right) dx = \frac{2}{3}$

Resolución

Una primitiva de $f(x) = \sqrt{x} - a = x^{1/2} - a$ es $F(x) = \frac{x^{3/2}}{3/2} - ax = \frac{2\sqrt{x^3} - 3ax}{3}$. Por la regla de Barrow,

$\int_0^1 \left(\sqrt{x} - a\right) dx = \frac{2}{3} = F(1) - F(0) = \frac{2\sqrt{1^3} - 3a1}{3} - \frac{2\sqrt{0^3} - 3a0}{3} = \frac{2-3a}{3} \Rightarrow 2 = 2 - 3a$, de donde a = 0

b) Sea $f(x) = \{x^2 - b,\ \ si\ x < 0\ 3x + 2,\ \ si\ x \geq 0$. Determine para qué valores del parámetro b ∈ R se tiene que f(x) es
una función continua en su dominio. Estudie la derivabilidad de la función para esos valores del parámetro b.

Resolución

Para x ≠ 0, f es continua en su dominio, que es R, independientemente del valor de a por serlo las funciones polinómicas.

f debe ser continua en x = 0 ⇒ $f(x) = f(x) = f(0) \Rightarrow\ 0^2 - b = 3.0 + 2 \Rightarrow b = -2$

Conclusión: debe ser $b = -2$ y queda $f(x) = \{x^2 + 2,\ \ si\ x < 0\ 3x + 2,\ \ si\ x \geq 0$
Para x ≠ 0, f es derivable por serlo las funciones polinómicas, siendo $f'(x) = \{2x,\ \ si\ x < 0\ 3,\ \ si\ x > 0$

$f'(x) = 2.0 = 0 \neq f'(x) \ = 3$.

Conclusión: f NO es derivable en x = 0, f sólo es derivable en R – {0}

3. (2 puntos) Sea f(x) una función real de variable real cuya derivada viene dada por la siguiente expresión: $f'(x) = \frac{-1}{x^2} + a$

a) Obtenga el valor del parámetro real a para que la función f(x) pase por los puntos (1, 3) y $\left(2, \frac{7}{2}\right)$.
Escriba la expresión de la función f(x).

Resolución

Observa que $f(x) = \int f'(x)\, dx = \int \left(\frac{-1}{x^2} + a\right) dx = \frac{1}{x} + ax + b$

f(x) pasa por (1, 3) ⇒ $f(1) = \frac{1}{1} + a1 + b = 3 \Rightarrow a + b = 2$

f(x) pasa por $\left(2, \frac{7}{2}\right) \Rightarrow f(2) = \frac{1}{2} + a2 + b = \frac{7}{2} \Rightarrow 2a + b = 3$

Queda el sistema $\{a + b = 2\ \ 2a + b = 3$. Resolviendo, a = 1, b = 1 y $f(x) = \frac{1}{x} + x + 1$

b) Para a = 1, determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f(x), clasificando sus extremos relativos, si procede.

Resolución

Sabemos que $f(x) = \frac{1}{x} + x + b$; $f'(x) = \frac{-1}{x^2} + 1 = \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Tabla de signos de f´(x):

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$

---

f´(x)	+	0	–	∄	–	0	+
f(x)	creciente	máximo	decreciente	∄	decreciente	mínimo	creciente

f es creciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y decreciente en $(-1, 1) - \{0\}$

Máximo relativo en $x = -1$. Mínimo relativo en $x = 1$.

4. (2 puntos) Se considera la siguiente función real de variable real: $f(x) = \frac{x^2+4}{x^2-4}$

a) Determine las asíntotas de esta función.

Resolución

$f(x) = \frac{(-2)^2+4}{(-2)^2-4} = \frac{8}{0} = \pm\infty \Rightarrow$ f tiene una asíntota vertical en x = –2 de ecuación A.V. : x = –2

Además, $f(x) = \frac{8}{0^+} = +\infty$ y $f(x) = \frac{8}{0^-} = -\infty$

$f(x) = \frac{2^2+4}{2^2-4} = \frac{8}{0} = \pm\infty \Rightarrow$ f tiene una asíntota vertical en x = 2 de ecuación A.V. : x = 2

Además, $f(x) = \frac{8}{0^-} = -\infty$ y $f(x) = \frac{8}{0^+} = +\infty$

$f(x) = \frac{x^2+4}{x^2-4} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow$ f tiene asíntota horizontal en $\pm\infty$, que es la recta A.H.: y = 1

$Si\ x \to \pm\infty,\ y_{gráfica} - y_{asíntota} = \frac{x^2+4}{x^2-4} - 1 = \frac{8}{x^2-4} > 0 \Rightarrow$ la gráfica está "por encima" de la asíntota

b) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa x = 1.

Resolución

$f(x) = \frac{x^2+4}{x^2-4}$ y $f'(x) = \frac{2x(x^2-4)-(x^2+4)2x}{(x^2-4)^2} = \frac{-16x}{(x^2-4)^2}$

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en un punto $A(x_0, f(x_0))$ es

rtg: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. En este caso, $x_0 = 1$, $f(x_0) = f(1) = \frac{1^2+4}{1^2-4} = \frac{-5}{3}$

$f'(x_0) = f'(1) = \frac{-16.1}{(1^2-4)^2} = \frac{-16}{9} \Rightarrow rtg: y = \frac{-16}{9}(x-1) + \frac{-5}{3} \Rightarrow rtg: y = \frac{-16x+1}{9}$

5. (2 puntos) De entre todos los números reales no negativos y menores o iguales que 10 se buscan dos números tales que el doble del primero menos el segundo no pase de 10 y que el triple del primero más el doble del segundo sea al menos 12. Además, se desea que su suma sea lo menor posible. ¿Cuáles son estos números? ¿Cuál es la suma mínima obtenida?

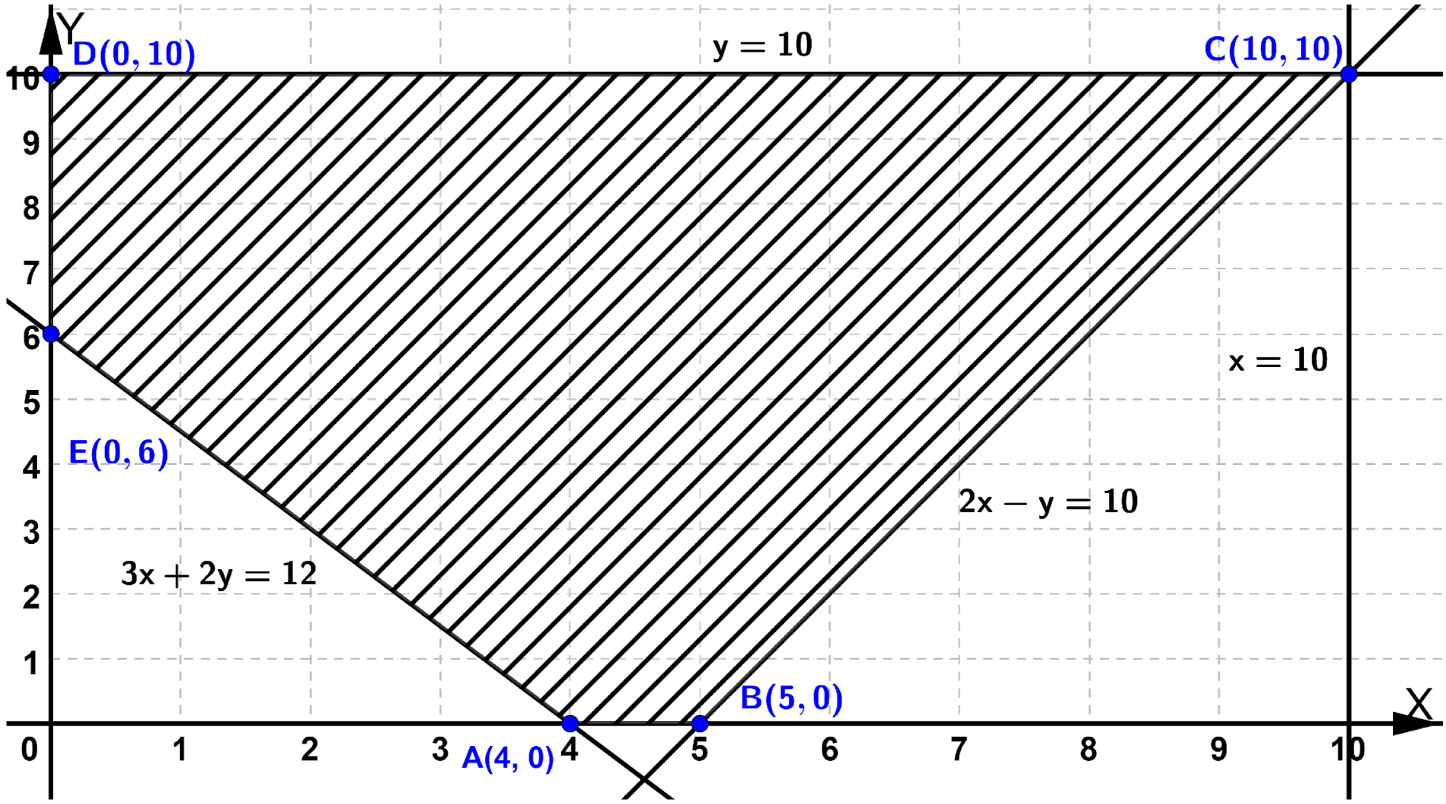
Resolución

Sean x, y los números. Las restricciones son

$\{x \le 10\ ;\ y \le 10\ 2x - y \le 10\ 3x + 2y \ge 12\ x \ge y + 30\ x \ge 0,\ y \ge 0$

Función a optimizar (minimizar), la suma $f(x, y) = x + y$.

Dibujamos los ejes de coordenadas y hacemos la escala adecuada



Veamos en qué vértice, A(4, 0), B(5, 0), C(10, 10), D(0, 10) ó E(0, 6) alcanza el valor mínimo la suma $f(x, y) = x + y$: $f(A) = f(4, 0) = 4 + 0 = 4$ $f(B) = f(5, 0) = 5 + 0 = 5$ $f(C) = f(10, 10) = 10 + 10 = 20$

$f(D) = f(0, 10) = 0 + 10 = 10$ $f(E) = f(0, 6) = 0 + 6 = 6$

El valor mínimo es 4. Los números buscados son 4 y 0 y la suma mínima es 4.

6. (2 puntos) En una tienda de música se tienen 70 instrumentos distribuidos en tres tipos: guitarras, pianos y violines. Se sabe que la cantidad de pianos más la cantidad de violines es igual a la cantidad de guitarras. Si tuviéramos el mismo número de violines, pero el doble de pianos y cuatro veces el de guitarras, el total de instrumentos en la tienda sería de 180. Plantee un sistema de ecuaciones y determine el número de instrumentos de cada tipo en la tienda.

Resolución

Sean x, y, z el nº de guitarras, pianos y violines, respectivamente. Según el enunciado,

$$\begin{cases} x + y + z = 70 \\ y + z = x \\ 4x + 2y + z = 180 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + z + y + z = 70 \\ 4(y + z) + 2y + z = 180 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y + 2z = 70 \\ 6y + 5z = 180 \end{cases} :2 \quad \begin{cases} y + z = 35 \to z = 35 - y \\ 6y + 5z = 180 \end{cases}$$

Resolvemos: $6y + 5(35 - y) = 180$; $y + 175 = 180$, $y = 5$; $z = 35 – 5 = 30$; $x = 5 + 30 = 35$

Por tanto, hay 35 guitarras, 5 pianos y 10 violines.

7. (2 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro a ∈ R:

$$\{2x + y + 3z = 2\ 3x + y + z = 0\ 8x + ay + 5z = 2$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores de a.
b) Resuelva el sistema de ecuaciones para a = 3.

Resolución

Las matrices de coeficientes y ampliada son $A = (2\ 1\ 3\ 3\ 1\ 1\ 8\ a\ 5)$ y $A^{*} = (2\ 1\ 3\ 2\ 3\ 1\ 1\ 0\ 8\ a\ 5\ 2)$

det A = 10 + 8 + 9a – 24 – 2a – 15 = 7a – 21= 0 ⇔ a = 3

– Si a ≠ 3, rg A = 3 = rg A* = nº de incógnitas. Luego, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única

– Si a = 3, det A = 0, $A = (2\ 1\ 3\ 3\ 1\ 1\ 8\ 3\ 5)$. Como $|2\ 1\ 3\ 1| = -1 \neq 0$, rg A = 2

$A^{*} = (2\ 1\ 3\ 2\ 3\ 1\ 1\ 0\ 8\ 3\ 5\ 2)\quad f2 - f1\ f3 - 3f1\ (2\ 1\ 3\ 2\ 1\ 0\ -2\ -2\ 2\ 0\ -4\ -4)\quad -f2\ f3 = 2f2\quad (2\ 1\ 3\ 2$

Como $|2\ 1\ -1\ 0| = 1 \neq 0$, rg A* = 2. Luego, rg A* = rg A = 2 < nº de incógnitas. Por el teorema de Rouché-
Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones. Resolvámoslo:

La matriz del sistema es equivalente a $(2\ 1\ 3\ 2\ -1\ 0\ 2\ 2)$, que corresponde al sistema $\{2x + y + 3z = 2\ -x + 2z = 2$.

Despejando, x = 2z – 2 ; y = 2 – 2x – 3z = 2 – 2(2z – 2) – 3z = 6 – 7z.

Llamando z = k, las infinitas soluciones son $\{x = 2k - 2\ y = 6 - 7k\ z = k$, con k ∈ R.

8. (2 puntos) La observación meteorológica para los días de otoño en Madrid establece que el día está nublado en un 50% de las ocasiones y que la temperatura baja de los 10 grados un 7% de los días. Además, el 35% de los días son nublados o la temperatura baja de los 10 grados. Escogiendo un día de otoño al azar, calcule la probabilidad de que:
a) Esté nublado y la temperatura baje de los 10 grados.
b) No esté nublado, sabiendo que la temperatura no baja de los 10 grados.

Resolución

A = estar nublado B = la temperatura baja de los 10 grados. Según el enunciado

p(A) = 0,5 p(B) = 0,07 p(A ∪ B) = 0,35

a) Se pide p(A ∩ B). Como p(A ∪ B) = p(A) + p(B) – p(A ∩ B), entonces despejando

p(A ∩ B) = p(A) + p(B) – p(A ∪ B) = 0,5 + 0,07 – 0,35 = 0,22 = 22%

b) Se pide $p\left(\frac{A^c}{B^c}\right) = \frac{p(A^c \cap B^c)}{p(B^c)} = \frac{p(A \cup B)^c}{p(B^c)} = \frac{1 - p(A \cup B)}{1 - p(B)} = \frac{1 - 0{,}35}{1 - 0{,}07} \cong 0,6989 = 69.89\%$

Hemos usado una de las leyes de Morgan: $p\left(A^c \cap B^c\right) = p(A \cup B)^c$

---

9. (2 puntos) El porcentaje de aprobados en asignaturas de primer año en la universidad española se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media μ y desviación típica σ = 8 puntos porcentuales.
a) Se toma una muestra aleatoria simple de 20 asignaturas de primer año y se obtiene que el porcentaje medio de aprobados en la muestra es de 65 puntos porcentuales. Determine un intervalo de confianza al 99% para μ.

Resolución

X = porcentaje de aprobados $\rightarrow N(\mu, 8)$. El intervalo de confianza a nivel de confianza del 95% para el porcentaje medio, μ, es $I_c = (\overline{x} - E, \overline{x} + E)$, siendo $\overline{x} = 65$ la media de la muestra de tamaño n = 20 y $E = z_{\alpha/2} . \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, el máximo error de estimación.

$z_{\alpha/2}$ es el valor de la N(0, 1) que cumple $p(Z < z_{\alpha/2}) = \frac{1+n_c}{2} = \frac{1+0{,}99}{2} = 0,995$

Como $p(Z < z_{\alpha/2}) = 0,995$ $\quad usando\ la\ tabla\ de\ la\ N(0,1)\ por\ interpolación \quad \rightarrow z_{\alpha/2} = 2,575$.
Sustituyendo,

$$E = z_{\alpha/2} . \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,575 . \frac{8}{\sqrt{20}} \cong 4,61\ ;\ I_c = (65 - 4,61 ; 65 + 4,61) = (60,39 ; 69,61)$$

b) Suponga que μ = 67 puntos porcentuales. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 asignaturas la media muestral, $\overline{X}$, esté comprendida entre 65 y 69 puntos porcentuales.

Resolución

X = porcentaje de aprobados $\rightarrow N(\mu, 8)$. Sabemos, por el teorema central del límite que si $X \rightarrow N(\mu, \sigma)$ y $\overline{X}$= media de las muestras de tamaño n, entonces $\overline{X} \rightarrow N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. En este caso μ = 67 ; n = 10 y σ = 8.
Sustituyendo, $\overline{X} \rightarrow N\left(67 ; \frac{8}{\sqrt{10}}\right) \cong N(67 ; 2,53)$. Tipificando, $Z = \frac{\overline{X}-67}{2{,}53} \rightarrow N(0, 1)$

Nos piden $p(65 < \overline{X} < 69) = p\left(\frac{65-67}{2{,}53} < \frac{\overline{X}-67}{2{,}53} < \frac{69-67}{2{,}53}\right) = p(-0,79 < Z < 0,79) =$

$= p(Z < 0,79) - [1 - p(Z < 0,79)] = 2\,p(Z < 0,79) - 1 = 2 . 0,7852 - 1 = 0,5704 = 57,04\%$

10. (2 puntos) Según los datos del INE, el 45,68% de las familias españolas tienen una renta mensual de 1500 a 3000 euros y el 23,98% de las familias tienen una renta mensual superior a 3000 euros. Entre las familias con menos de 1500 euros mensuales solo el 10% viaja por vacaciones, si el ingreso es de 1500 a 3000 euros mensuales viajan el 40% y si el ingreso es mayor de 3000 euros mensuales viajan el 85%. Eligiendo al azar una familia española, calcule la probabilidad de que:
a) Viaje por vacaciones.
b) Sabiendo que viaja por vacaciones, su ingreso mensual sea mayor de 1500 euros.

Resolución

A = tener renta mensual mayor de 3000 € B = tener renta mensual de 1500 € a 3000 €
C = tener renta mensual menor de 3000 € D = viajar por vacaciones.

Según el enunciado, p(A) = 0,2398 p(B) = 0,4368 p(C) = 1 – 0,4568 – 0,2398 = 0,3034
p(D/A) = 0,1 p(D/B) = 0,4 y p(D/C) = 0,85

a) Se pide p(D), que usando el teorema de probabilidad total, es

p(D) = p(A) p(D/A) + p(B) p(D/B) + p(C) p(D/C) = 0,2398 . 0,85 + 0,4368 . 0,4 + 0,3034 . 0,1 ≅ 41,69%

b) Se pide $p\left(\frac{A \cup B}{D}\right) = \frac{p[(A \cup B) \cap D]}{p(D)} = \frac{p(A)\, p(D/A) + p(B)\, p(D/A)}{p(D)} \cong \frac{0{,}2398\ .\ 0{,}85 + 0{,}4368\ .\ 0{,}4}{0{,}4169} \cong 92{,}72\%$