3D Plot3

1 Introdução

Esta série de tutoriais sobre *Lógica Matemática* foi escrita usando o **Microsoft Windows 7 Ultimate**, **Microsoft Office 2013**, software matemática **Maple** versão 15, referências na internet, site Wolfram|Alpha e notas de aula do professor quando estudante. Ela cobre desde indução até quantificadores, passando pelos argumentos, implicações, tabelas-verdade etc.

Nós entendemos que você já tem conhecimento matemático suficiente e entende certas notações matemáticas de uso comum no meio acadêmico. Conhecimentos de internet e alguma linguagem de programação também são bem-vindas, mas não é condição necessária.

Não adotaremos um livro texto, mas você tem a liberdade de ler ***Iniciação à Lógica Matemática***, Editora Nobel, de Edgard de Alencar Filho. Nele você encontrará todo o assunto que iremos abordar, mas não tão simplificado e com exemplos abundantes quanto aqui.

Se você seguiu todos os passos até aqui, está pronto para prosseguir com este tutorial.

2 Proposições associadas a uma condicional

2.1 Proposição recíproca

p ↛ q: q ↛ p

Como podemos ver foi feito uma troca entre a antecedente (p) e a consequente (q) para obter-se a recíproca cuja tabela esta abaixo:

p	**q**	**p ↛ q**	**q ↛ p**
V	**V**	V	V
V	**F**	F	V
F	**V**	V	F
F	**F**	V	V

Exemplo:

p ↛ q: Se triângulo é equilátero, então é isósceles.

A recíproca da condicional é

q ↛ p: Se triângulo é isósceles, então é equilátero.

(A condicional p ↛ q é verdadeira (V), mas sua recíproca q ↛ p é falsa (F)).

2.2 Proposição contrária

Basta negar a antecedente (p) e a consequente (q) para obtermos a proposição contrária.

p ↛ q: ¬p ↛ ¬q

p	**q**	**¬ p**	**¬ q**	**p ↛ q**	**¬p ↛ ¬q**

V	**V**	F	F	V	V
V	**F**	F	V	F	V
F	**V**	V	F	V	F
F	**F**	V	V	V	V

2.3 Proposição contrapositiva

p ⇨ q: ¬q ⇨ ¬p

Para encontramos a contra positiva basta juntar os passos da recíproca e da contrária, ou seja, deve se inverter os lugares do antecedente e do consequente e negar ambos. A proposição contra positiva tem o mesmo resultado que a proposição original.

p	**q**	**¬ p**	**¬ q**	**p ⇨ q**	**¬q ⇨ ¬p**
V	**V**	F	F	V	V
V	**F**	F	V	F	F
F	**V**	V	F	V	V
F	**F**	V	V	V	V

Exemplos:

p ⇨ q: Se Carlos é professor, então é pobre.

A contrapositiva é

¬q ⇨ ¬p: Se Carlos não é pobre, então não é professor.

Portanto, (p ⇨ q ⇔ ¬q ⇨ ¬p)

p: x é menor que zero

q: x é negativo

q ⇨ p: Se x é negativo, então x é menor que zero.

A contrapositiva é

¬p ⇨ ¬q: Se x não é menor que zero, então x não é negativo.

Portanto, (q ⇨ p ⇔ ¬p ⇨ ¬q)

2.4 Tabela-verdade das proposições associadas

p	**q**	**p ⇨ q**	**q ⇨ p**	**¬p ⇨ ¬q**	**¬q ⇨ ¬p**

V	**V**	V	V	V	V
V	**F**	F	V	V	F
F	**V**	V	F	F	V
F	**F**	V	V	V	V

Equivalências

p 🡒 q ⇔ ¬q 🡒 ¬p e q 🡒 p ⇔ ¬p 🡒 ¬q

A condicional (p 🡒 q) é equivalente a sua contrapositiva (¬q 🡒 ¬p) e a recíproca da condicional (q 🡒 p) é equivalente à contrária da condicional (¬p 🡒 ¬q).

3 Álgebra das Proposições I

3.1 Propriedades da conjunção

A conjunção lógica tem algumas propriedades. Destacam-se:

- p ∧ q ≡ q ∧ p (comutativa)
- (p ∧ q) ∧ r ≡ p ∧ (q ∧ r) (associativa)
- p ∧ q ≡ ¬(¬p ∨ ¬q) (leis de De Morgan)
- p ∧ ¬p ≡ F
- p ∧ V ≡ p
- p ∧ F ≡ F
- p ∧ (p ∨ q) ≡ p
- p ∧ (q ∨ r) ≡ (p ∧ q) ∨ (p ∧ r) (distributiva em relação à disjunção lógica)

O símbolo ≡ significa “equivale logicamente a”.

3.1.1 "∧" e "mas"

Um assunto da lógica e da linguagem menos comentado é a regra da palavra "mas". Logicamente, a sentença "está chovendo, mas o sol está brilhando" é equivalente a "está chovendo e o sol está brilhando", então logicamente, "mas" é equivalente a "E". Entretanto, como demonstrado pela sentença precedente, "mas" e "E" são semanticamente distintos. A sentença anterior sugere que a última sentença é geralmente um contradição.

Uma forma de resolver esse problema de correspondência entre a lógica simbólica e a linguagem natural é observar que a primeira sentença (que usa "mas"), implica a existência de uma suposição escondida mas confundida, saber que o sol não brilha quando chove. Essa implicação captura a diferença semântica "E" e "mas" sem se perturbar com sua equivalência lógica.

3.2 Propriedades da disjunção

A disjunção lógica tem algumas propriedades. Destacam-se:

- p ∨ q ≡ q ∨ p (comutativa)
- (p ∨ q) ∨ r ≡ p ∨ (q ∨ r) (associativa)
- p ∨ q ≡ ¬(¬p ∧ ¬q) (leis de De Morgan)
- p ∨ ¬p ≡ V
- p ∨ F ≡ p

- $p \vee V \equiv V$
- $p \vee (q \wedge p) \equiv p$
- $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (distributiva em relação à conjunção lógica)

3.3 Propriedades da conjunção e da disjunção

3.3.1 Distributiva

$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

p	q	r	1 $q \vee r$	2 $p \wedge (1)$	3 $p \wedge q$	4 $p \wedge r$	$(3) \vee (4)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V
V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

p	q	r	1 $q \wedge r$	2 $p \vee (1)$	3 $p \vee q$	4 $p \vee r$	$(3) \wedge (4)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	F	F	F	V	F
F	F	F	F	F	F	F	F

3.3.2 Absorção

$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$

3.3.3 Regras de DE MORGAN

Augustus De Morgan (1806-1871), analista, teórico de probabilidade e teórico em lógica inglês nascido na Índia, foi o primeiro professor de matemática na University College, em Londres, e o primeiro presidente da London Mathematical Society. Ele também abordou questões filosóficas, clarificou a natureza da Indução matemática, e generalizou a noção de álgebra, como também iniciou a revisão da tradicional lógica Aristotélica.

Primeiras leis de DE MORGAN

$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

Essas regras podem exprimir-se dizendo que a negação transforma a conjunção em disjunção e a disjunção em conjunção.

As Regras de DE MORGAN mostram como é possível definir a disjunção a partir da conjunção e da negação, ou a conjunção a partir da disjunção e da negação.

$p \vee q \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$

$p \wedge q \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$

4 Negação da Condicional

Do exposto até agora, a condicional $p \rightarrow q$, equivale a $\neg p \vee q$.

Tem-se então: $\neg(p \rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q)$. Aplicando o princípio da negação da disjunção resulta:

$\neg(p \rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q)$, que por De Morgan nos dá

$$\neg(\neg p) \wedge \neg q \Leftrightarrow p \wedge \neg q$$

Portanto,

$$\mathbf{\neg(p \rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q}$$

Assim, a negação da proposição "se chove então faz frio" é "chove e não faz frio".

5 Negação da Bicondicional

Da equivalência $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$, tira-se $\neg(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)]$. Usando a negação da conjunção:

$\neg(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow \neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee p)$.

Aplicando a negação da disjunção nos dois termos, resulta:

$\neg(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$

Usando a distributividade da disjunção em relação à conjunção:

$\neg(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \vee q) \wedge ((p \wedge \neg q) \vee (\neg p))$

Reaplicando a distributividade da disjunção em relação à conjunção:

$\neg(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge(\neg q \vee q)) \wedge((p \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee \neg p))$.

Ora, $(\neg q \vee q)$ e $(p \vee \neg p)$ são verdades absolutas. O julgamento de uma proposição qualquer ligada a uma verdade absoluta pelo conectivo **e**, depende apenas da veracidade ou não de tal proposição.

Deste modo, conclui-se que:

$$\mathbf{\neg(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p)}$$

Assim, a negação da proposição "*Maria fica feliz se e somente se Pedro está presente*" é "*Maria fica feliz ou Pedro está presente e Maria não fica feliz e Pedro não está presente".*

6 Negação conjunta e disjunta de duas proposições ($\downarrow$ e $\uparrow$)

Os operadores $\downarrow$ e $\uparrow$ também são chamados conectivos de **SCHEFFER**.

A negação conjunta é representada pelo conector $\downarrow$, significa a negação de duas proposições envolvendo o conector **E**.

Exemplo: $p \wedge q \Leftrightarrow \neg p \downarrow \neg q$.

A negação disjunta é representada pelo conector $\uparrow$, significa a negação de duas proposições envolvendo o conector **OU**.

Exemplo: $p \vee q \Leftrightarrow \neg p \uparrow \neg q$.

Abaixo estão representadas as tabelas verdades das duas negações.

p	**q**	**p ↓ q**		**p**	**q**	**p ↑ q**
V	**V**	F		**V**	**V**	F
V	**F**	F		**V**	**F**	V
F	**V**	F		**F**	**V**	V
F	**F**	V		**F**	**F**	V

7 Exercícios Resolvidos

1. Determinar:
   a) a contrapositiva da contrapositiva de $p \rightsquigarrow q$.
   A contrapositiva de $p \rightsquigarrow q$ é $\neg q \rightsquigarrow \neg p$. E a contrapositiva de $\neg q \rightsquigarrow \neg p$ é $\neg\neg p \rightsquigarrow \neg\neg q \Leftrightarrow p \rightsquigarrow q$.

   b) a contrapositiva da recíproca de $p \rightsquigarrow q$.
   A recíproca de $p \rightsquigarrow q$ é $q \rightsquigarrow p$. E a contrapositiva de $q \rightsquigarrow p$ é $\neg p \rightsquigarrow \neg q$.

   c) a contrapositiva da contrária de $p \rightsquigarrow q$.
   A contrária de $p \rightsquigarrow q$ é $\neg p \rightsquigarrow \neg q$. E a contrapositiva de $\neg p \rightsquigarrow \neg q$ é $\neg\neg q \rightsquigarrow \neg\neg p \Leftrightarrow q \rightsquigarrow p$.

   Observe que a recíproca e a contrária são cada uma a contrapositiva da outra e que a condicional e a contrapositiva são cada uma a contrapositiva da outra.

8 Exercícios Propostos

1. Determinar:
   a) a contrapositiva de $p \rightsquigarrow \neg q$.
   b) a contrapositiva de $\neg p \rightsquigarrow q$.
   c) a contrapositiva da recíproca de $p \rightsquigarrow \neg q$.
   d) a recíproca da contrapositiva de $\neg p \rightsquigarrow \neg q$.
   e) a contrapositiva da recíproca de $x = 0 \rightsquigarrow x < 1$.
   f) a contrapositiva da contrária de $x < 1 \rightsquigarrow x < 3$.

2. Determinar $\neg(x = 0 \wedge x < 1)$.

3. Determinar $\neg(x < 1 \vee x < 3)$.

4. Determinar a contrapositiva $P \rightsquigarrow Q$, onde P: $\neg(x = 0 \wedge x < 1)$ e Q: $\neg(x < 1 \vee x < 3)$.

5. Determinar a contrapositiva da recíproca de $P \rightsquigarrow Q$, onde P: $\neg(x = 0 \wedge x < 1)$ e Q: $\neg(x < 1 \vee x < 3)$.

6. Determinar a contrapositiva da contrária de $P \rightsquigarrow Q$, onde P: $\neg(x = 0 \wedge x < 1)$ e Q: $\neg(x < 1 \vee x < 3)$.

10 Terminamos

Terminamos por aqui.

Corra para o próximo tutorial.