

Ce sujet aborde les principes physiques de différentes techniques de spectroscopie couramment utilisées en laboratoire : spectroscopie IR, UV visible, et RMN.

Les trois parties du sujet sont très largement indépendantes.

La longueur du sujet ne doit pas décourager les candidats : l'indépendance de ses trois parties, la progressivité de chacune d'entre elles, la diversité des thèmes abordés permettront à chacun, en évitant d'éventuels blocages, de révéler sa compréhension de la Physique dans des domaines variés. Toutefois, il doit rester clair qu'un traitement superficiel de quelques questions dans chaque partie sera peu valorisé.

La plus grande importance sera donnée à la qualité de la rédaction et de la présentation .

Notations et données numériques :

Constante de Boltzmann : $k_B = 1,381.10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$

Constante de Planck réduite : $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,055.10^{-34} \text{ J.s}$

Charge élémentaire : $e = 1,602.10^{-19} \text{ C}$

Masse du proton : $m_P = 1,673.10^{-27} \text{ kg}$

PARTIE I

Spectroscopie Infrarouge par Transformée de Fourier

Dans cette partie, on étudie le principe de la Spectroscopie Infrarouge par Transformée de Fourier (IRTF). Bien que le principe en soit connu depuis Rayleigh et Michelson qui l'utilisa pour déterminer des largeurs de raies optiques (1892), l'essor de cette technique dans le proche Infrarouge date des années 1960. Elle repose en particulier sur les travaux de J. et P. Connes, et sur le développement de l'algorithme de transformée de Fourier rapide (FFT) inventé en 1965 par Cooley et Tuckey. Un des grands avantages de cette technique est « l'avantage multiplexe » ou de Fellgett : l'acquisition simultanée de toutes les fréquences du signal se déroule pendant toute la prise de mesure, ce qui permet de réduire l'erreur aléatoire sur les fluctuations de la source de façon importante. La méthode a été largement utilisée en astronomie avant d'être pratiquée de façon courante en analyse chimique.

Dans cette partie et la suivante, on utilisera le modèle scalaire de la lumière, et les notations complexes usuelles pour les grandeurs vibratoires. La lumière est représentée par une

vibration scalaire complexe $\psi(\vec{r}, t) = a(\vec{r}, t) e^{j\varphi(\vec{r}, t)}$ (avec $j^2 = -1$), où $a(\vec{r}, t)$, amplitude réelle de l'onde, varie lentement avec la position et le temps, et la phase en un point $\varphi(\vec{r}, t)$ varie sur des échelles de temps de l'ordre de 10^{-12} s. En raison de la linéarité des équations de Maxwell décrivant la propagation de la lumière, la vibration lumineuse en un point est la somme des vibrations dues aux différentes sources de lumière. L'intensité lumineuse

détectée par tout appareil de mesure est alors proportionnelle à $\langle |\psi(\vec{r}, t)|^2 \rangle = \langle a(\vec{r}, t)^2 \rangle$, où

$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$ représente la moyenne temporelle sur le temps de réponse $T \sim 10^{-4}$ s du détecteur.

I-A Interférences à deux ondes

On considère deux sources de lumière monochromatiques S_1 et S_2 , de fréquence $\nu = \omega / 2\pi$, de longueur d'onde dans le vide notée λ_0 , cohérentes et en phase, et d'amplitudes notées

a_1 et a_2 : $\psi_{S_1} = a_1 e^{j\omega t}$ et $\psi_{S_2} = a_2 e^{j\omega t}$. Ces vibrations lumineuses se propagent dans un milieu d'indice n uniforme, jusqu'au point P (Cf. figure I-1).

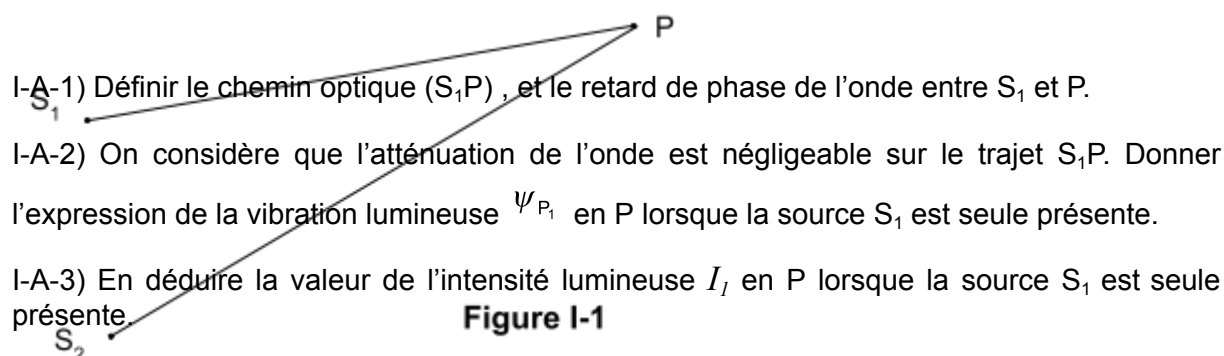


Figure I-1

I-A-4) On considère alors l'action des deux sources. Montrer que dans ce cas, l'intensité lumineuse en P vaut :

$$I_P = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(2\pi \sigma \delta_P)$$

où le nombre d'onde est défini par $\sigma = \omega / 2\pi c = 1/\lambda_0$. Donner l'expression de la différence de marche δ_P au point P en fonction des chemins optiques. Qu'appelle-t-on « terme d'interférence » ?

I-A-5) Représenter sur un graphe les variations de l'intensité I_P en fonction de δ_P , en indiquant en particulier la valeur et la position des maxima et des minima d'intensité.

$$C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

I-A-6) On définit le facteur de contraste C par : . Donner la valeur de C en fonction de I_1 et I_2 . A quelle condition C est-il maximum ? Quelle est la valeur de ce maximum ?

I-A-7) La présentation de ce paragraphe laisse penser qu'il est très simple d'obtenir des interférences en superposant la lumière de deux lampes spectrales convenablement filtrées, comme on peut le faire pour des ondes sonores. Que vaut, en fait, l'intensité lumineuse au point P lorsque les sources sont incohérentes ?

Expliquer pourquoi il est nécessaire que les ondes 1 et 2 soient obtenues par division d'une onde issue d'une source unique S. Que représente le temps de cohérence ?

Nous étudierons au paragraphe suivant une méthode pour réaliser cette division.

I-B Interféromètre de Michelson

Le schéma de principe d'un interféromètre de Michelson est donné ci-dessous (figure I-2) :

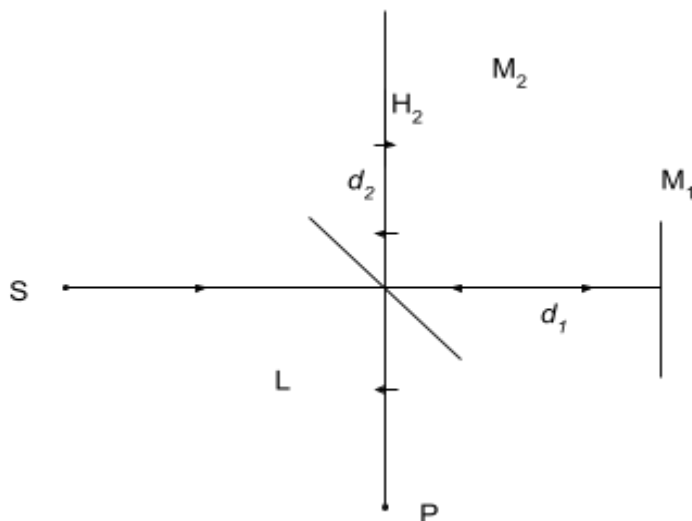


Figure I-2

L'air est assimilé à un milieu d'indice $n = 1$. La lumière issue de la source S est divisée en deux faisceaux par la séparatrice L, lame de verre placée à 45° du faisceau incident issu de S, et dont la face d'entrée est traitée de façon à obtenir des facteurs de réflexion et de transmission en intensité égaux à 0,5 pour cette incidence. Deux miroirs plans M_1 et M_2 , supposés parfaits, et situés à distances d_1 et d_2 de L réfléchissent la lumière des deux faisceaux vers L. Ces deux faisceaux se recombinent après réflexion ou transmission sur L, et sont reçus par un détecteur P, supposé pour l'instant ponctuel.

Dans notre schéma simplificateur, L ne crée pas d'atténuation à la traversée, et n'introduit pas de déphasage dans les vibrations lumineuses. On peut donc l'assimiler à une lame semi-réfléchissante idéale d'épaisseur nulle (l'étude du dispositif pratique permettant une telle simplification n'est pas demandée ici).

I-B-1) L'intensité de la source S est notée I_0 . On néglige l'atténuation de la vibration lumineuse au cours de sa propagation. Quelles sont les intensités en P, I_1 et I_2 , de chacun des deux faisceaux provenant de chacune des deux voies de l'interféromètre ? Où va l'énergie lumineuse qui ne parvient pas en P ?

I-B-2) Afin de simplifier au maximum l'étude de ce dispositif, on se ramène à l'étude d'un système centré d'axe PH_2 orthogonal à M_2 . On fera la figure dans le cas $d_1 > d_2$.

- a) Pour cela, placer soigneusement sur un schéma
 - la source S,
 - le miroir M_2 ,
 - l'image M'_1 du miroir M_1 à travers la séparatrice L,
 - l'image S' de la source S à travers la séparatrice L.
 - Enfin, placer les images S_1 et S_2 de S' à travers le miroir M_2 et M'_1 .
- b) Que vaut la distance, notée dans la suite e , entre M_2 et M'_1 ?
- c) En déduire la distance entre les deux sources virtuelles S_1 et S_2 .

On admettra que, pour l'étude du Michelson, le déphasage en P est le même que celui que l'on observerait en P entre les vibrations issues des deux sources synchrones S_1 et S_2 , en l'absence de l'interféromètre.

I-B-3) La source S est supposée monochromatique de fréquence $\nu = \omega / 2\pi = c\sigma$, d'intensité I_0 . Déduire de ce qui précède que l'intensité détectée en un point P situé sur l'axe optique vaut :

$$I_P = \frac{I_0}{2} (1 + \cos(2\sigma e))$$

Dans quelle configuration obtient-on une différence de marche nulle ? Que vaut alors l'intensité détectée ? Lever la contradiction apparente avec la dernière réponse du I-B-1).

I-B-4) Le miroir M_1 peut être translaté perpendiculairement à son plan, de façon à faire varier d_1 de quelques centimètres de part et d'autre de d_2 . En utilisant un laser He-Ne de longueur d'onde $\lambda_0 = 632,8$ nm, le signal détecté en P, encore supposé ponctuel, permet le contrôle de la position de M_1 . Pour une telle source laser :

- a) tracer la courbe de I_P en fonction de d_1 , de part et d'autre de d_2 .
- b) Quelle distance ε faut-il faire parcourir à M_1 entre deux maxima de lumière consécutifs ? Donner la valeur numérique de ε .
- c) Sachant qu'un photorécepteur standard peut détecter des variations de I_P de l'ordre de $0,01 I_0$, quel est le déplacement de M_1 observable (on notera δd_1 sa

valeur) ? Pour quelle(s) différence(s) de marche δd_1 est-il le plus petit ? Déterminer puis calculer cette valeur minimale du déplacement observable.

I-B-5) Pour l'utilisation de l'interféromètre en IR, on place le détecteur P « à l'infini », c'est-à-dire dans le plan focal image d'une lentille convergente F de distance focale f' . Le détecteur possède une pupille d'entrée de diamètre φ (voir figure I-3).

a) En reprenant le schéma obtenu au I-B-2-a) montrer que la différence de marche entre deux faisceaux provenant de S_1 et S_2 et atteignant P sous un angle θ vaut $\delta_\theta = 2e \cos(\theta)$.

b) En déduire l'expression de l'intensité I_θ recueillie à une incidence θ .

c) On veut que sur toute la plage d'utilisation de l'interféromètre (donc pour toute valeur de e entre $-e_{max}$ et e_{max}), la variation d'un point à l'autre du détecteur P de l'ordre d'interférence $p = \sigma \cdot \delta$ reste inférieure à 0,5. Donner l'expression de la valeur maximale φ_{max} du diamètre φ de la pupille d'entrée du détecteur pour qu'il en soit ainsi.

d) A.N. on donne $\sigma = 2000 \text{ cm}^{-1}$, $e_{max} = 5 \text{ cm}$, $f' = 30 \text{ cm}$. Calculer φ_{max} .

I-B-6) Dans la configuration du I-B-5) que se passe-t-il si la source ponctuelle S est placée en dehors de l'axe optique ? On pourra considérer les sources secondaires S_1 et S_2 associées à cette source ponctuelle décalée, et on donnera la différence de marche δ_θ au point P, associé à l'incidence θ . En déduire quel peut être le grand avantage de cette utilisation de l'interféromètre de Michelson, dans le cas où la source est étendue (et spatialement incohérente).

I-C Spectrométrie de Fourier

Dans toute la suite de cette partie, on supposera l'ouverture du détecteur suffisamment faible pour ne tenir compte que de l'incidence normale $\theta = 0$, correspondant au schéma de la figure I-3. Par contre, la source S est supposée polychromatique ; pour des valeurs du nombre d'onde comprises entre σ et $\sigma + d\sigma$, son intensité vaut $I_1(\sigma) d\sigma$.

I-C-1) Justifier physiquement, mais sans calcul, le fait que l'intensité totale détectée en P soit la somme des intensités correspondant à chaque fréquence de la source :

$$I_P^{total} = \int_0^\infty \frac{I_1(\sigma)}{2} (1 + \cos(2\sigma e)) \sigma d\sigma$$

I-C-2) En déduire que l'intensité enregistrée en P en fonction de la différence de marche δ s'écrit comme la somme de deux termes :

$$I_P(\delta) = \bar{I}_P + \frac{1}{2} V(\delta)$$

$$V(\delta) = \int_0^\infty I_1(\sigma) \cos(2\pi\sigma\delta) d\sigma$$

où . Donner l'expression de $\bar{I}_P$. Que représente ce terme ?

Par la suite, on ne s'intéressera qu'à $V(\delta)$, la partie du signal qui varie avec δ . On voit qu'il s'agit de la *transformée de Fourier* (TF) en cosinus de la densité spectrale $I_1(\sigma)$ de la source.

L'enregistrement de $V(\delta)$ permet donc d'espérer remonter à $I_1(\sigma)$. En effet, on montre (**théorème d'inversion de Fourier**) que :

$$I_1(\sigma) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} V(\delta) e^{-2j\pi\sigma\delta} d\delta$$

formule que l'on utilisera sans démonstration.

I-C-3) En réalité, il est impossible de réaliser l'enregistrement de $V(\delta)$ pour $-\infty \leq \delta \leq \infty$. On se limite en pratique à une plage finie de différences de marche $-a \leq \delta \leq a$, et on souhaite étudier l'influence de cette restriction.

a) Donner, sans nouveau calcul, l'expression de $V(\delta)$ pour une source monochromatique d'intensité I_0 , de nombre d'onde σ_0 .

b) Donner, sous la forme d'une intégrale, l'expression correspondante de la fonction, notée $I_2(\sigma)$, obtenue par inversion de Fourier tronquée dans l'intervalle $-a \leq \delta \leq a$.

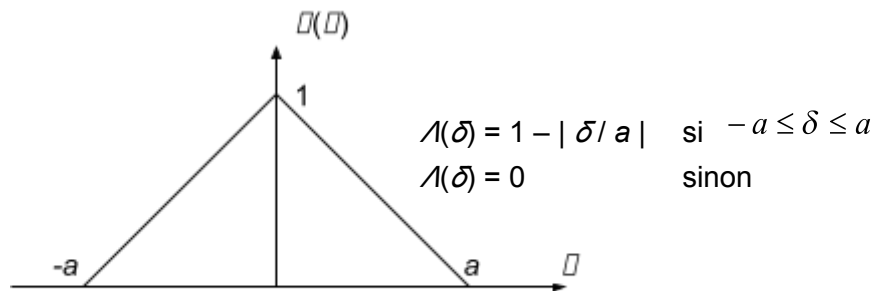
c) Déterminer l'expression de $I_2(\sigma)$, et montrer que l'on obtient :

$$I_2(\sigma) = 2a.I_0 \left[\frac{\sin(2\pi a(\sigma - \sigma_0))}{2\pi a(\sigma - \sigma_0)} + \frac{\sin(2\pi a(\sigma + \sigma_0))}{2\pi a(\sigma + \sigma_0)} \right]$$

d) Tracer le graphe de $I_2(\sigma)$, pour les nombres d'onde $\sigma > 0$, de part et d'autre de σ_0 (on négligera pour cela le deuxième terme de la somme ci-dessus). Donner la demi-largeur $\Delta\sigma_2$ de la raie centrale du spectre $I_2(\sigma)$ ainsi obtenu. En déduire une estimation de la limite de résolution de la méthode de spectrométrie par Fourier en fonction de a . Comment varie cette résolution avec la position de la raie σ_0 ?

I-C-4) Traitement du signal, apodisation

Un des inconvénients de la troncature brutale réalisée au I-C-3) est l'apparition d'oscillations dans le spectre reconstruit $I_2(\sigma)$, qui en rendent la lecture et l'interprétation difficile. Une façon de limiter ce problème consiste à réaliser une troncation plus « douce » du signal $V(\delta)$, en le multipliant par une fonction fenêtre $\Lambda(\delta)$ schématisée ci-dessous (figure I-4), avant d'appliquer l'inversion de Fourier.



a) Montrer que dans ce cas la fonction, notée $I_3(\sigma)$, obtenue par inversion de Fourier, toujours dans le cas d'une source monochromatique d'intensité I_0 et de nombre d'onde σ_0 , peut s'écrire :

$$I_3(\sigma) = 2 I_0 \int_0^a \left(1 - \frac{\delta}{a}\right) \left[\cos(2\pi\delta(\sigma - \sigma_0)) + \cos(2\pi\delta(\sigma + \sigma_0)) \right] d\delta$$

b) On admet l'expression suivante, obtenue à l'aide d'une intégration par parties :

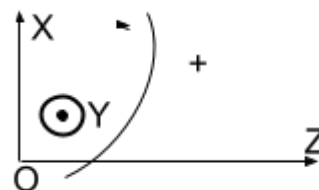
$$I_3(\sigma) = a I_0 \left[\left(\frac{\sin(\pi a(\sigma - \sigma_0))}{\pi a(\sigma - \sigma_0)} \right)^2 + \left(\frac{\sin(\pi a(\sigma + \sigma_0))}{\pi a(\sigma + \sigma_0)} \right)^2 \right]$$

Tracer le graphe de $I_3(\sigma)$ pour $\sigma > 0$, au voisinage de $\sigma \approx \sigma_0$ (on négligera pour cela le deuxième terme de la somme ci-dessus). Montrer que l'on a bien réduit les oscillations par rapport au I-C-3-d). Donner la demi-largeur $\Delta\sigma_3$ de la raie centrale du spectre $I_3(\sigma)$ ainsi obtenu, et comparer cette valeur à $\Delta\sigma_2$. En déduire les limites de ce genre de traitement sur la limite de résolution de la méthode de spectrométrie de Fourier.

PARTIE II

Spectroscopie à réseau

Dans toute cette partie, $OXYZ$ désigne un trièdre orthogonal direct. Dans le plan ZOX , la convention angulaire est trigonométrique.



II-A Interférences par division du front d'onde

Dans toute cette partie, on utilisera le modèle scalaire de la lumière, présenté dans le préambule de la partie I du sujet problème. De plus, on pourra utiliser sans démonstration les résultats établis au cours de la partie I-A, en particulier la formule établie au I -A - 4). L'air est assimilé à un milieu d'indice $n = 1$.

II -A-1) Donner un exemple d'obtention de sources cohérentes par division du front d'onde.

II -A-2) On perce dans un plan opaque XOY deux fentes fines identiques de largeur négligeable, et de grande longueur L . La grande dimension L est parallèle à OY, le petit coté est parallèle à OX. Les centres des fentes, notés O_1 et O_2 , sont alignés sur OX. **La distance O_1O_2 est notée $2a$.** Le plan XOY est éclairé par une onde plane et monochromatique, supposée illimitée, de longueur d'onde dans le vide $\lambda = 550 \text{ nm}$; son vecteur d'onde, situé dans le plan XOZ, fait avec OZ l'angle d'incidence $i = 5^\circ$. On étudie les interférences à l'infini entre les 2 fentes.

- a) comment peut-on observer ces interférences à l'infini ?
- b) à quelle couleur correspond la longueur d'onde de 550 nm ?
- c) exprimer le déphasage entre les vibrations perçues en O_1 et O_2 , en fonction de i , a et λ .

II -A-3) a) Déterminer , en fonction de a , i , et α la différence de marche à l'infini entre les ondes dans une direction du plan XOZ faisant l'angle α avec OZ. En déduire l'interfrange angulaire, dans le cas des petits angles.

b) AN : $a = 0,25 \text{ mm}$: calculer l'interfrange angulaire et la position angulaire du centre de l'image d'interférences.

c) Si on place un écran dans le plan focal image d'une lentille mince convergente placée perpendiculairement à l'axe OZ, derrière le dispositif des fentes, pourra-t-on voir ces franges sachant que la distance focale de la lentille est de 1 m ?

II -A-4) Quel est le principal phénomène qui limite le nombre de franges observables sur l'écran ?

II-B Interférences à N ondes. Réseau par transmission

On suppose maintenant que le plan opaque XOY contient N fentes (au lieu de deux), ces N fentes, de largeur négligeable, étant toutes identiques et régulièrement espacées, disposées parallèlement les unes aux autres comme les 2 précédentes. On suppose $N \gg 1$. **La distance, ou « pas », entre 2 fentes consécutives est noté $2a$.** L'ensemble est toujours éclairé par la même onde plane et monochromatique, de longueur d'onde dans le vide $\lambda = 550 \text{ nm}$, l'angle d'incidence restant égal à : $i = 5^\circ$. On étudie les interférences entre les N ondes, à l'infini dans le plan XOZ.

II-B-1) Quelle est la différence de marche entre 2 fentes consécutives (séparées par la distance $2a$) pour l'onde émergente, en un point à l'infini dans la direction faisant l'angle α avec OZ ?

II-B-2) En déduire les directions angulaires suivant lesquelles on obtient un maximum de lumière. On fera intervenir un entier k dans la relation trouvée.

II-B-3) Calculer l'amplitude complexe s_p diffractée à l'infini dans la direction α , par la $p^{\text{ème}}$ fente éclairée. En déduire l'amplitude complexe totale diffractée par les N fentes. Calculer ensuite l'intensité observable dans la direction α . On rappelle les relations

$$1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^{N-1} = \frac{1 - z^N}{1 - z} \quad \text{et} \quad \frac{e^{j\phi} - e^{-j\phi}}{2j} = \sin(\phi), \quad \text{avec } j^2 = -1,$$

valables pour tout nombre complexe z différent de 1, et pour tout nombre réel ϕ .

II-B-4) AN : $a = 1 \mu\text{m}$, $i = 5^\circ$ déterminer le nombre d'ordres observables (c'est-à-dire le nombre de valeurs entières possibles de l'entier k introduit à la question II-B-2).

Dans la pratique tous ces ordres ont-ils la même luminosité ? Pourquoi ?

II-C Interférences entre N miroirs. Réseau par réflexion

Les N fentes sont remplacées par N miroirs très fins ayant la forme des fentes c'est-à-dire des bandes réfléchissantes parallèles et identiques, de pas $2a$. L'ensemble est toujours éclairé par la même onde plane et monochromatique, supposée illimitée, de longueur d'onde dans le vide $\lambda = 550 \text{ nm}$, et d'angle d'incidence $i = 5^\circ$. On étudie, à l'infini, l'onde réfléchie dans la direction faisant, dans XOZ, l'angle α avec OZ'. On rappelle ici que, pour i comme pour α , la convention de signe est trigonométrique ; les valeurs possibles de l'angle α sont comprises entre -90° et $+90^\circ$.

II-C-1) Quelle est la nouvelle différence de marche entre 2 miroirs consécutifs ?

II-C-2) En déduire les directions angulaires suivant lesquelles on obtient un maximum de lumière. On fera intervenir à nouveau un entier k dans la relation trouvée. Commenter.

II-C-3) En déduire **sans nouveau calcul** l'amplitude complexe, puis l'intensité observable dans la direction α .

II-C-4) AN : avec $a = 1 \mu\text{m}$, $i = 5^\circ$, déterminer la position des maxima d'ordres $+1$, -1 . Commenter.

Cet ensemble constitue un réseau par réflexion, élément disperseur d'un grand nombre de spectromètres dans le visible et les proches UV et IR.

II-D Utilisation du réseau par réflexion

On s'intéresse maintenant à un monochromateur à réseau, c'est-à-dire à un dispositif permettant d'obtenir une onde quasi monochromatique à partir d'une source de lumière blanche. Le réseau a 500 bandes réfléchissantes (ou traits) par mm et $N = 10000$ traits au total. Il est éclairé sous l'incidence i . Une lentille convergente mince de distance focale image $f' = 1 \text{ m}$, a son axe normal au plan du réseau et une fente fine se trouve centrée au foyer image de la lentille F_0 (voir la figure II-1).

II -D-1) Quelle valeur doit prendre l'incidence i pour que la radiation de longueur d'onde $\lambda_0 = 550 \text{ nm}$ soit obtenue en F_0 dans le spectre d'ordre 2 ? On conservera cette incidence pour la suite.

II -D-2) Pour une longueur d'onde λ un peu différente de λ_0 les rayons diffractés par le réseau dans l'ordre 2 convergent en un foyer secondaire image de la lentille d'abscisse x ; donner une expression approchée de x en fonction de $\lambda - \lambda_0$ si l'on ne considère que les longueurs d'onde voisines de λ_0 .

II -D-3) La fente placée au foyer de la lentille a une largeur $b = 0,1 \text{ mm}$ et ne laisse donc passer que les radiations dont les longueurs d'onde sont comprises entre $\lambda_0 - \Delta\lambda / 2$ et $\lambda_0 + \Delta\lambda / 2$; calculer l'intervalle $\Delta\lambda$. Caractériser la bande passante du monochromateur. Commenter.

Figure II-4

PARTIE III

Spectroscopie par résonance magnétique nucléaire (RMN)

Dans toute la suite, (R_o) désigne le référentiel du laboratoire, assimilé à un référentiel galiléen. (Ox, Oy, Oz) est un système d'axes orthogonaux, fixes dans (R_o) ; la base associée, orthonormée directe, est notée $\left(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\right)$.

On ne prendra pas en compte l'effet du champ de pesanteur.

Dans (R_o) chaque noyau possède, du fait de son spin, un moment cinétique intrinsèque noté ici $\vec{\sigma}$, et peut être assimilé à un dipôle magnétique de moment magnétique noté $\vec{M}$.

Pour chaque noyau, les moments cinétique $\vec{\sigma}$ et magnétique $\vec{M}$ sont liés par la relation $\vec{M} = \gamma \vec{\sigma}$, dans laquelle γ désigne le rapport gyromagnétique du type de noyau étudié.

Les seuls noyaux étudiés dans ce problème sont les noyaux ^1_1H , constitués d'un unique proton.

Dans ce cas, le rapport gyromagnétique vaut $\gamma = 2,675 \cdot 10^8 \text{ rad.s}^{-1} \cdot \text{T}^{-1}$.

III-A Obtention d'un signal RMN dans un circuit d'antenne

On considère un grand nombre N de protons soumis à un champ magnétique intense $\vec{B}_o = B_o \vec{u}_z$ supposé uniforme et permanent dans (R_o) .

En l'absence de précision contraire, les interactions entre noyaux ne seront pas prises en compte ; en particulier, on négligera dans une première approche le champ magnétique qu'ils créent.

III-A.1) a) En quoi l'utilisation de bobines supraconductrices permet la création de champs magnétiques très intenses ?

b) Quel est l'ordre de grandeur de la valeur maximale de B_o qu'on produit actuellement dans les appareils de résonance magnétique nucléaire (RMN) ?

III-A.2 Effet gyroscopique

On soumet un proton de moment magnétique $\vec{M} = \gamma \vec{\sigma}$, placé en O, à un champ magnétique uniforme et permanent dans (R_o) : $\vec{B}_o = B_o \vec{u}_z$ ($B_o > 0$) .

III-A.2.1) Si on assimile ce dipôle magnétique à une petite boucle fermée de courant, que peut-on dire de la résultante des forces magnétiques subies par ce dipôle ?

III-A.2.2) On rappelle l'expression de l'énergie potentielle du dipôle dans le champ $\vec{B}_o$: $E_p = -\vec{M} \cdot \vec{B}_o$. En déduire quels doivent être la direction et le sens de $\vec{M}$ pour qu'il y ait équilibre stable .

Dans la suite , la direction de $\vec{M}$ est supposée a priori quelconque .

On rappelle l'expression du moment des actions exercées par un champ magnétique $\vec{B}$ sur un dipôle : $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$.

Par ailleurs, le théorème du moment cinétique stipule que : $\left(\frac{d\vec{\sigma}}{dt} \right)_{R_o} = \vec{\Gamma}$.

III-A.2.3) a) Montrer que $\|\vec{M}\|$ est une constante.

b) Montrer que $M_z = \vec{M} \cdot \vec{u}_z$ est une constante .

c) En déduire la constance de l'angle θ entre $\vec{M}$ et $\vec{B}_o$ (θ est compris entre 0 et π) .

d) Montrer que l'extrémité du vecteur $\vec{M}$ décrit un cercle d'axe Oz, et déterminer le rayon de ce cercle en fonction de $\|\vec{M}\|$ et de l'angle θ .

III-A.2.4) Montrer que le vecteur-rotation $\vec{\omega}_o$ associé à la précession de $\vec{M}$ autour du champ $\vec{B}_o$ (donc au mouvement circulaire introduit ci-dessus) a pour expression littérale : $\vec{\omega}_o = -\gamma \vec{B}_o$; on pourra, au besoin, écrire le système différentiel vérifié par les deux

composantes $M_x = \vec{M} \cdot \vec{u}_x$ et $M_y = \vec{M} \cdot \vec{u}_y$, en déduire, par combinaison, l'équation différentielle vérifiée par la quantité $\vec{M} = M_x + j M_y$ (avec $j^2 = -1$) et montrer enfin que $\vec{M}$ peut s'écrire sous la forme $A e^{j(-\omega_o t + \alpha)}$, A et α étant deux constantes réelles d'intégration (avec $A > 0$).

Dans toute la suite, on posera $\omega_o = -\gamma B_o$, où $\omega_o = \gamma B_o$ est une constante positive, nommée vitesse angulaire (ou pulsation) de précession.

III-A.2.5) Calculer la valeur de la fréquence de précession des protons $f_o = \frac{\omega_o}{2\pi}$ lorsque $B_o = 4,70$ T.

III-A.3 Etude du phénomène d'aimantation paramagnétique associée aux noyaux

On rappelle que la composante σ_z du moment cinétique du moment cinétique $\vec{\sigma}$ de spin du proton ne peut prendre que les valeurs $\pm \frac{\hbar}{2}$, $\hbar$ étant la constante de Planck réduite : $\hbar = \frac{h}{2\pi}$.

Cette composante σ_z et la composante M_z du moment magnétique du proton sont liées par la relation : $M_z = \gamma \sigma_z$.

L'étude porte sur un ensemble de protons identiques discernables, d'interactions mutuelles très faibles, soumis au champ $\vec{B}_o = B_o \vec{u}_z$ et peuplant, selon la loi statistique de Maxwell-Boltzmann correspondant à la température T, les 2 états correspondant aux deux valeurs possibles de σ_z .

On rappelle à nouveau l'expression de l'énergie potentielle d'un dipôle magnétique dans le champ $\vec{B}_o$: $E_p = -\vec{M} \cdot \vec{B}_o$.

III-A.3.1) Exprimer l'écart d'énergie entre les deux états de spins ; que remarque-t-on sur la pulsation d'une transition radiative entre ces deux états ?

On note N le nombre **total, très grand**, de protons étudiés, N^+ (respectivement N^-) celui des protons de σ_z égal à $\frac{\hbar}{2}$ (respectivement $-\frac{\hbar}{2}$).

III-A.3.2) Déterminer le quotient $\frac{N^+}{N^-}$ en fonction des quantités B_o, γ, T , de $\hbar$, et de la constante de Boltzmann k_B .

III-A.3.3) En déduire les expressions de N^+ et de N^- en fonction de N et de $x' = \beta \gamma \hbar B_o$, avec $\beta = \frac{1}{k_B T}$. Tester la pertinence de ces deux expressions dans deux cas-limites.

Dans toute la suite, $\overline{M}$ désigne la somme des moments magnétiques des N protons, et $\overline{M}_o$ désigne désormais sa valeur à l'équilibre thermodynamique à la température T , en présence du champ magnétique $\overline{B}_o = B_o \overline{u}_z$.

III-A.3.4) Montrer que $\overline{M}_o = N \gamma \frac{\hbar}{2} \tanh\left(\frac{x'}{2}\right) \overline{u}_z$, où la notation « tanh » désigne la fonction tangente hyperbolique.

III-A.3.5) a) On donne $T = 300$ K et $B_o = 4,70$ T. Evaluer numériquement la quantité x' .

b) Commenter ce résultat, et en déduire une expression simplifiée de $\overline{M}_o$ en fonction de $N, \gamma, \hbar, x'$ et de $\overline{u}_z$, puis de $N, \gamma, \hbar, B_o, k_B, T$ et $\overline{u}_z$; on rappelle que, lorsque $|\epsilon| \ll 1$, $\tanh(\epsilon) \approx \epsilon$.

Dans toute la suite, seule cette expression simplifiée de $\overline{M}_o$ sera utilisée.

III-A.3.6) a) Comment $\overline{M}_o$ dépend-il de γ ?

b) Comment $\overline{M}_o$ dépend-il de B_o ?

c) Comment $\overline{M}_o$ dépend-il de la température T ?

d) Commenter physiquement ces deux dernières réponses.

III-A.3.7) $\overline{M}_o$ est-il affecté par la précession décrite précédemment –dans la partie « effet gyroscopique »- autour du champ permanent $\overline{B}_o = B_o \overline{u}_z$? Justifier.

III-A.4 Prise en compte de la relaxation dans l'étude de la résonance magnétique

On note $\overline{M}_o$ sous la forme $\overline{M}_o = \overline{M}_o \overline{u}_z$.

Partant de l'équilibre thermodynamique précédent, et grâce à une impulsion qui sera étudiée dans la partie III.C, on fait « basculer » rapidement le moment total $\vec{M}$ sur une direction du plan xoy ; on admet que, lors de ce basculement, la norme de $\vec{M}$ est conservée.

On suppose pour simplifier l'étude ultérieure, qu'à la date $t = 0$, **juste après l'impulsion**, le moment $\vec{M}$ vaut : $\vec{M}(t=0) = -M_0 \vec{u}_y$, valeur qu'on veillera à ne pas confondre avec $M_0 = M_0 u_z$.

Lorsque $\vec{M}(t)$ diffère, à un instant t , de la valeur d'équilibre $\vec{M}_0 = M_0 \vec{u}_z$, $\left(\frac{d\vec{M}}{dt} \right)_{R_0}$ est la somme de deux contributions :

- l'une déjà mentionnée qui vaut, après l'impulsion, $\vec{\omega}_0 \wedge \vec{M}$ avec $\vec{\omega}_0 = -\gamma \vec{B}_0 = -\omega_0 \vec{u}_z$;
- l'autre, due aux phénomènes de relaxation, dont l'expression est :

$\frac{M_0 - M_z u_z}{T_1} - \frac{M_{\perp}}{T_2}$; $M_z u_z$ et $M_{\perp}$ représentent ici les composantes de $\vec{M}$ respectivement parallèle et orthogonale à l'axe Oz, tandis que T_1 et T_2 désignent les constantes de temps des relaxations respectivement longitudinale et transversale .

III-A.4.1) Ecrire l'équation différentielle vérifiée par $M_z(t)$.

III-A.4.2) Résoudre cette équation différentielle, sachant qu'à la date $t = 0$, juste après l'impulsion, le moment $\vec{M}$ vaut : $-M_0 \vec{u}_y$.

III-A.4.3) Montrer que l'équation différentielle vérifiée par la composante $M_\perp$ s'écrit :

$$\left(\frac{dM_\perp}{dt} \right)_{R_0} = -(\omega_0 \vec{u}_z \wedge \vec{M}_\perp) - \frac{M_\perp}{T_2}.$$

III-A.4.4) On pose : $\vec{M}_1 = \vec{M}_\perp(t) e^{+j\frac{t}{T_2}}$. Montrer que $\left(\frac{d\vec{M}_1}{dt} \right)_{R_0} = -(\omega_0 \vec{u}_z \wedge \vec{M}_1)$.

III-A.4.5) a) Ecrire le système différentiel vérifié par les deux composantes $M_{1x} = \vec{M}_1 \cdot \vec{u}_x$ et $M_{1y} = \vec{M}_1 \cdot \vec{u}_y$.

b) En déduire, par combinaison, l'équation différentielle vérifiée par la quantité $\underline{M}_1 = M_{1x} + j M_{1y}$ (avec $j^2 = -1$).

c) En tenant compte des conditions initiales, montrer que $\underline{M}_1 = -j M_0 e^{j(-\omega_0 t)}$.

d) En déduire M_1 et montrer que $M_x = -M_0 \sin(\omega_0 t) e^{-\frac{t}{T_2}}$.

On suppose que tous les protons de l'échantillon étudié se trouvent sur l'axe d'une bobine (souvent nommée « antenne ») fixe dans (R_0) . L'axe orienté de la bobine est supposé confondu avec l'axe Ox . Cette bobine est un des éléments d'un circuit série (dit « de détection »), également fixe dans (R_0) , et dont l'étude est détaillée plus loin, à la question III.A.5).

On admet que, dans ces conditions, le flux du champ magnétique créé par les N protons à travers l'ensemble des spires orientées de la bobine est donné par la relation :

$\Phi_{\text{prot} \rightarrow \text{bob}} = k \cdot M_x$, dans laquelle k est une constante positive dont la valeur ne dépend que de la géométrie de l'échantillon étudié, de celle de la bobine, et de leur disposition relative.

Dans toute la suite, la constante k est supposée connue.

III-A.4.6) On admet que les dimensions du circuit de détection sont inférieures au décimètre. La fréquence de précession f_0 étant voisine de 200 MHz, les conditions de validité de l'approximation des états quasi-stationnaire sont-elles remplies pour ce circuit ?

III-A.4.7) On rappelle que $M_x = -M_b \sin(\omega_o t) e^{-\frac{t}{T_2}}$. Du fait de la variation de M_x au cours du temps, $\Phi_{\text{prot} \rightarrow \text{bob}} = k \cdot M_x$ dépend du temps et une force électromotrice apparaît dans le circuit orienté de la bobine. A quel phénomène physique correspond cette force électromotrice, notée $e(t)$ dans la suite ?

III-A.4.8) Déterminer $e(t)$ en fonction de k, M_b, ω_o, T_2 et de t .

En pratique, $f_o = \frac{\omega_o}{2\pi}$ est de l'ordre de la centaine de mégahertz, et T_2 est de l'ordre de la seconde.

III-A.4.9) Montrer que dans ces conditions, on peut considérer que $e(t)$ obéit à la relation :

$$e(t) = k M_b \omega_o \cos(\omega_o t) e^{-\frac{t}{T_2}} ; \text{ cette relation sera retenue dans toute la suite.}$$

III-A.4.10) a) Dédurre de ce résultat, en remplaçant ω_o par sa valeur et M_b par son expression simplifiée trouvée à la question III-A.3.5, la façon dont l'amplitude de $e(t)$ dépend de la valeur de B_o et de celle de γ .

b) Quel est l'intérêt d'opérer avec des valeurs importantes de B_o ?

III-A.5 Etude du circuit de l'antenne

La bobine de détection, d'auto-inductance L et de résistance r , fait partie d'un circuit de filtrage des données, modélisé ici par un circuit de type « RLC série ».

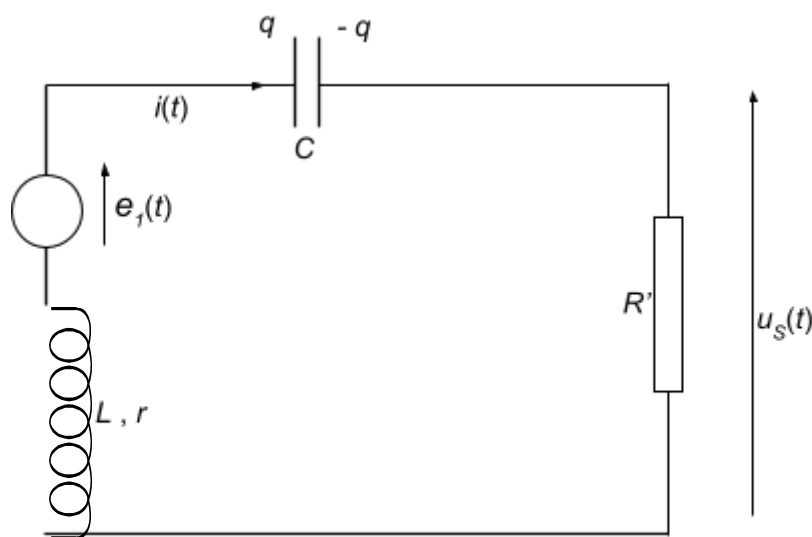


Figure III-1

La capacité du condensateur est choisie de telle sorte que $LC\omega_o^2 = 1$, ω_o désignant toujours la vitesse angulaire de précession des protons.

On note $R = (r + R')$ la résistance totale du circuit série et on pose : $a = \frac{R'}{R} = \frac{R'}{(r + R')}$.
 R' représente la résistance d'entrée d'un « détecteur en quadrature », qui sera étudié dans la partie III.B.

Enfin, on suppose que le quotient $Q = \frac{L\omega_o}{R}$ est égal à 100.

III-A.5.1) On nomme souvent ce facteur Q facteur de surtension à la résonance en intensité ; justifier cette expression.

III-A.5.2) a) Sachant que $f_o = \frac{\omega_o}{2\pi}$ vaut 200 MHz et que R est de l'ordre de l'ohm, calculer les valeurs de L et de C .
 b) Commenter ces résultats.

Dans un premier temps, on étudie la réponse de ce filtre, en régime permanent sinusoïdal, à une excitation notée $e_1(t) = E \cdot \cos(\omega t)$, ω étant une pulsation quelconque. La tension de sortie est u_s .

III-A.5.3) Quelle est la nature de ce filtre ? On justifiera simplement la réponse, sans calcul, par une étude des comportements limites aux basses et hautes fréquences.

III-A.5.4) Déterminer la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \frac{u_s}{e_1}$ en fonction de R' , r , L , C et ω .

III-A.5.5) Montrer que $\underline{H}(j\omega) = \frac{a}{1 + jQ\left(u - \frac{1}{u}\right)}$ avec : $u = \frac{\omega}{\omega_o}$ et $a = \frac{R'}{(r + R')}$

III-A.5.6) a) Quelle est la signification physique de $H = |\underline{H}|$? Quelle est, lorsqu'on fait varier ω , la valeur maximale de $H = |\underline{H}|$, notée H_{max} dans la suite ?

b) Déterminer l'écart $\Delta\omega$ entre les deux pulsations (dites « de coupure ») telles

que $H = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}}$.

c) On caractérise l'acuité de ce filtre par le quotient $Q' = \frac{\omega_o}{\Delta\omega}$, nommé facteur de qualité du filtre. Montrer que $Q' = Q$.

III-A.6 Mise en forme du signal RMN

Dans la suite de cette partie, $e_1(t) = e(t)$, force électromotrice induite par la précession des protons.

III-A.6.1) Quel vous semble être l'intérêt du filtre de la partie III-A.5 dans le cas précis de la détection de la RMN?

La forme -précédemment établie- du signal réel d'entrée $e(t)$ correspond à des composantes de Fourier qu'on suppose –pour simplifier- centrées sur la pulsation ω_o , et localisées dans une bande de $\frac{1}{2}$ largeur en pulsation égale à $\frac{3}{T_2}$.

III-A.6.2) Déterminer l'ordre de grandeur des valeurs de $\left(u - \frac{1}{u}\right) = \frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega}$ aux extrémités de cette bande, sachant que $f_o = \frac{\omega_o}{2\pi}$ est de l'ordre de la centaine de mégahertz, et T_2 est de l'ordre de la seconde.

III-A.6.3) La fonction $g(u) = \left(u - \frac{1}{u}\right)$ étant croissante, que peut-on dire de la valeur de $\underline{H}(j\omega) = \frac{a}{1 + jQ\left(u - \frac{1}{u}\right)}$ pour toute pulsation présente dans le spectre de $e(t)$?

III-A.6.4) Montrer que : $u_s(t) = a \cdot e(t)$, avec $a = \frac{R'}{(r + R')}$, en régime établi.

III-A.6.5) a) Montrer que, de façon générale, la charge $q(t)$ et l'intensité du courant $i = \frac{dq}{dt}$ définies sur la figure III-1 vérifient l'équation différentielle : $L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = e(t)$;
b) en déduire l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$.

c) Montrer que le terme transitoire de $i(t)$ vérifie l'équation différentielle linéaire homogène : $\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{\omega_o}{Q} \frac{di}{dt} + \omega_o^2 i = 0$.

III-A.6.6) En tenant compte du fait que $Q = 100$, montrer que la solution générale de cette équation homogène peut être présentée sous la forme :

$$i(t) = e^{-\frac{\omega_o t}{2Q}} \left[A \cos(\omega_o t) + B \sin(\omega_o t) \right]$$

III-A.6.7) Pour tout $t < 0$, $e(t)$ était nulle et le condensateur totalement déchargé. En déduire, en les justifiant soigneusement, les valeurs à l'instant $t = 0^+$ de $i(t)$ et de sa dérivée.

La résolution –non demandée ici- de l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$ indique, si l'on tient compte du fait que $Q = 100$, que pour tout $t > 0$:

$$u_s(t) = a k M_b \omega_o \cos(\omega_o t) \cdot \left[e^{-\frac{t}{T_2}} - e^{-\frac{\omega_o t}{2Q}} \right] .$$

III-A.6.8) a) Chercher à quelle condition sur la date t le quotient de $e^{-\frac{\omega_o t}{2Q}}$ par $e^{-\frac{t}{T_2}}$ est inférieur à 10^{-2} .

b) Montrer que, pour un enregistrement de durée supérieure à T_2 , on peut considérer que $u_S(t) = a k M_b \omega_o \cos(\omega_o t) \cdot e^{-\frac{t}{T_2}}$ pendant quasiment toute la durée de l'enregistrement ; on rappelle que $f_o = \frac{\omega_o}{2\pi}$ est de l'ordre de la centaine de mégahertz, et que T_2 est de l'ordre de la seconde.

Dans toute la suite, on supposera que, pendant **toute la durée de l'enregistrement**, la

tension u_S est donné par la relation simplifiée : $u_S(t) = a k M_b \omega_o \cos(\omega_o t) \cdot e^{-\frac{t}{T_2}} = a e(t)$,
pour un groupe de protons de fréquence de précession $f_o = \frac{\omega_o}{2\pi}$.

En pratique, les protons de l'échantillon peuvent présenter plusieurs valeurs, notées f_i , de la fréquence de précession, en fonction des différents groupements chimiques auxquels ils appartiennent (le champ local ressenti par les protons de chaque groupement dépend du coefficient d'écran de ce groupement) ; **dans toute la suite, la fréquence f_o de résonance du filtre est choisie au centre (environ 200 MHz) de la fenêtre spectrale à explorer, dont la demi-largeur est ici supposée de l'ordre du kHz.**

III-A.6.9) On note $e_i(t)$ et $u_{Si}(t)$ les contributions respectives à $e(t)$ et $u_S(t)$ d'un groupe de protons, numéro i , de fréquence de précession f_i . Expliquer simplement pourquoi la relation $u_{Si}(t) = a \cdot e_i(t)$ est également vérifiée.

On en déduit immédiatement que $u_S(t) = a e(t)$.

III-A.6.10) On souhaite estimer la loi $u_S(t)$ en effectuant un nombre élevé N' d'enregistrements de la tension expérimentale $u_{S\text{exp}}(t)$ aux bornes de la résistance R' ; pour chaque date t de mesure, le signal relevé lors de l'enregistrement numéro k ($k = 1$ à N') a pour valeur : $u_{S\text{exp } k}(t) = u_S(t) + b_k(t)$, et est stocké dans un fichier informatique ; tous les termes de bruit $b_k(t)$ étant ici des signaux aléatoires centrés (de valeurs moyennes nulles, donc) de même variance notée σ_b^2 , et statistiquement indépendants.

a) Déterminer, pour chaque date t , la valeur moyenne et la variance $\sigma_{bN'}^2$ de la somme de tous les $b_k(t)$.

b) On pose $u_{S\text{exp total}}(t) = \sum_{k=1}^{N'} u_{S\text{exp } k}(t)$; déterminer la valeur moyenne de $u_{S\text{exp total}}(t)$ à l'instant t en fonction de $u_S(t)$.

c) On définit ici le rapport signal sur bruit, à $t = 0$, comme le rapport entre

$\frac{N' a k}{\sqrt{2}} M_b \omega_o$, valeur efficace initiale de $u_{S \text{ exp total}}(t)$ et l'écart type $\sigma_{bN'}$ de la somme de tous les $b_k(t)$. Quelle est l'influence de N' sur ce rapport ?

d) Commenter.

Dans la suite de l'étude, on s'intéresse uniquement, sauf mention contraire, à un groupe de

N_i protons correspondant tous à une même valeur $f_i = \frac{\omega_i}{2\pi}$ de la fréquence de précession,

et on pose $u_{Si}(t) = U_i \cos(\omega_i t) \cdot e^{-\frac{t}{T_2}}$, avec $U_i = K B_0^2 N_i$.

K étant une constante –qu'on ne demande pas de déterminer- dont on suppose, pour simplifier, la valeur commune à tous les groupes de protons (les valeurs des termes $\cos(\omega_i t)$ sont, bien sûr, supposés distinctes, contenant la date t).

III-B . Traitement du signal $u_R(t)$; obtention d'un spectre RMN par le procédé de détection synchrone en quadrature

A l'aide de multiplieurs -non décrits ici- et de deux signaux sinusoïdaux en quadrature, de fréquence égale à celle, notée f_o , de résonance du filtre, on obtient les deux tensions :

$$u_1 = u_{Si}(t) \cdot \cos(\omega_o t) \quad \text{et} \quad u_2 = u_{Si}(t) \cdot \sin(\omega_o t) .$$

On traite d'abord le cas simplifié où $u_{Si}(t) = U_i \cos(\omega_i t)$.

Les deux signaux u_1 et u_2 sont traités par deux filtres linéaires passe-bas identiques de fréquence de coupure f_c .

On rappelle les deux relations trigonométriques :

$$2 \cos(a) \cdot \cos(b) = \cos(a + b) + \cos(a - b) \quad \text{et} \quad 2 \sin(a) \cdot \cos(b) = \sin(a + b) + \sin(a - b) .$$

III-B.1) Pourquoi doit-on utiliser ces relations pour étudier l'effet sur u_1 et u_2 des deux filtres linéaires passe-bas ?

III-B.2) On rappelle que $(f_i - f_o) = \frac{\omega_i - \omega_o}{2\pi}$ a une valeur absolue de l'ordre du kHz.

A quelle condition sur la valeur de f_c les deux signaux en sortie des filtres passe-bas

auront-ils pour valeurs : $u_{D1} = \frac{U_i}{2} \cos[(\omega_i - \omega_o)t]$ et $u_{D2} = -\frac{U_i}{2} \sin[(\omega_i - \omega_o)t]$. Dans toute la suite, on suppose cette condition réalisée.

III-B.3) On pose : $\underline{u}_D = u_{D1} - j u_{D2}$; déterminer $\underline{u}_D$, à partir des expressions précédentes de u_{D1} et de u_{D2} .

En réalité, $u_{Si}(t) = U_i \cos(\omega_i t) \cdot e^{-\frac{t}{T_2}}$. On admet que, dans ce cas, $\underline{u}_D$ a pour expression :

$\underline{u}_D = \frac{U_i}{2} e^{j[(\omega_i - \omega_o)t]} e^{-\frac{t}{T_2}}$. Un ordinateur permet de déterminer la quantité $\underline{u}_D$ (avec

$\int_{-f_{\max}}^{+f_{\max}} \underline{u}_D(t) e^{j2\pi f t} dt$ pour toute valeur de f comprise entre $-f_{\max}$ et $+f_{\max}$ ($f_{\max}$ étant légèrement supérieure à la demi-largeur -ici **supposée de l'ordre du kHz-** de la fenêtre spectrale à explorer). On pose :

$f_D = \frac{f - f_o}{2}$ et $f_D = \frac{f - f_o}{2}$; le décalage en fréquence f_D est positif pour une moitié de la fenêtre spectrale à explorer, et négatif pour l'autre moitié.

III-B.4) Montrer que : $TF(\underline{u}_D)(f) = \frac{U_i}{2} \frac{T_2}{1 + j2\pi f_D T_2}$.

On note respectivement $u_{DFRe}(f)$ et $u_{DFIm}(f)$ les parties réelle et imaginaire pure de la transformée de Fourier $TF(\underline{u}_D)(f)$. On a donc : $TF(\underline{u}_D)(f) = u_{DFRe}(f) + j \cdot u_{DFIm}(f)$

III-B.5) Dans les conditions proposées ici, le signal exploité est $u_{DFRe}(f)$. Déterminer ce

signal ; on rappelle la relation $\frac{1}{a + jb} = \frac{a - jb}{a^2 + b^2}$.

III-B.6) Montrer que le graphe de $u_{DFRe}(f)$ est une courbe lorentzienne (souvent nommée raie d'absorption, et dont la **forme** est rappelée sur la figure III-2 ci-dessous) centrée en $f = f_D$.

Figure III-2

A titre d'information, on indique ci-dessous, figure III-3, l'allure qu'a, dans ces conditions, le graphe de $u_{DFIm}(f)$ (signal de type « dispersion », moins exploitable que le signal lorentzien, car plus « large »).

X

Figure III-3

III-B.7) Etablir la relation entre la largeur à mi-hauteur de la Lorentzienne $u_{\text{DFRe}}(f)$ et la constante de temps T_2 .

En pratique, au début de l'acquisition (de date $t = 0$), les différents groupes de protons ont déjà tourné, depuis le début de l'impulsion radiofréquence, autour de Oz d'angles de valeurs

différentes, car proportionnelles à $f_i \propto \frac{\gamma_i}{2\pi}$. On pose : $f_{Di} \propto \frac{\gamma_i \gamma_o}{2\pi}$.

On admet que, dans ces conditions, $u_{Di} = \frac{U_i}{2} e^{j\gamma_i \gamma_o \tau} e^{-\frac{t}{T_2}}$ pour le groupe de protons n°i.

Le « retard » ici noté τ est supposé de l'ordre de 100 microsecondes, donc très petit devant T_2 ; au même titre que τ , ce retard est supposé de valeur commune à tous les groupes de protons étudiés. La valeur de τ prend également en compte l'effet de la présence des filtres passe-bas.

III-B.8) Montrer simplement que la présence de τ et de τ a pour effet de multiplier la transformée de Fourier $TF(u_{Di})(f)$ du groupe de protons n°i par la quantité $e^{j2\pi f_{Di} \tau}$.

On note $TF2(\underline{u}_{Di})(f)$ la nouvelle valeur de la transformée de Fourier de ce groupe de protons. La partie réelle de $TF2(\underline{u}_{Di})(f)$ n'étant pas aisément exploitable, un traitement conjoint de la partie réelle et de la partie imaginaire de $TF2(\underline{u}_{Di})(f)$ s'impose.

III-B.9) Montrer que, compte tenu de l'inégalité forte $\tau \ll T_2$, l'ancienne valeur et la nouvelle valeur de la transformée de Fourier vérifient sensiblement la relation suivante :

$$TF2(\underline{u}_{Di})(f) = TF(\underline{u}_{Di})(f) \cdot e^{j[2\pi f\tau + \alpha]}.$$

Cette relation peut être étendue à l'ensemble du spectre sous la forme (plus pratique pour la suite de l'étude) : $TF(\underline{u}_D)(f) = TF2(\underline{u}_D)(f) \cdot e^{-j[2\pi f\tau + \alpha]}.$

On note respectivement $u_{DF2Re}(f)$ et $u_{DF2Im}(f)$ les parties réelle et imaginaire pure de la transformée de Fourier $TF2(\underline{u}_D)(f)$.

III-B.10) En exploitant cette dernière relation entre $TF(\underline{u}_D)(f)$ et $TF2(\underline{u}_D)(f)$, montrer qu'on peut trouver deux quantités A et B – et les déterminer en fonction de τ et de α – telles que la combinaison $\cos(Af + B) \cdot u_{DF2Re}(f) + \sin(Af + B) \cdot u_{DF2Im}(f)$ redonne une somme de signaux lorentziens semblables à celui trouvé à la question III-B.6.

Expérimentalement, cette opération -dite de correction de phase- s'effectue par essais successifs, jusqu'à l'obtention de l'allure caractéristique des lorentziennes, comme l'indique la figure III-4, ci-dessous.

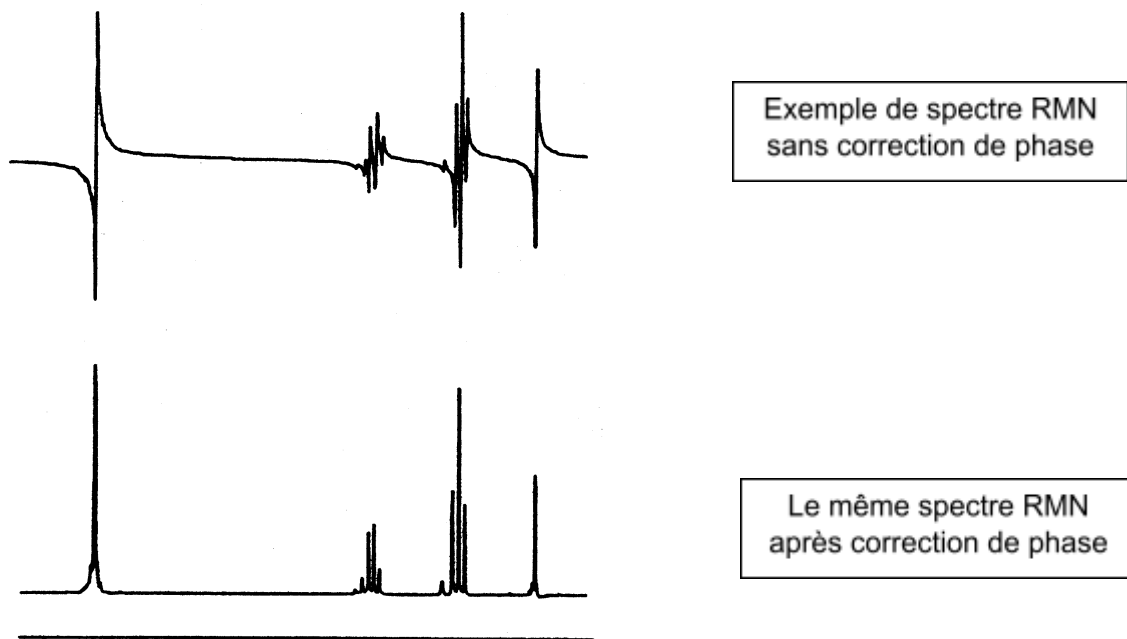


Figure III-4

Dans toute la suite, on suppose que la correction de phase a été réalisée ; on dispose donc d'un spectrogramme constitué d'une somme de lorentziennes analogues à celle obtenue à la question III-B.6.

III-B.11) a) On considère deux groupes de protons de populations comparables, de fréquences de précession notées f_i et $f_i + \delta f$ très proches, et de même valeur de T_2 . Déduire du résultat de la question III-B.7 l'ordre de grandeur de la valeur minimale $\delta f_{\min}$ de δf pour qu'on puisse séparer les deux groupes de protons.

b) Application numérique : T_2 est de l'ordre de la seconde, et $f_i = 200$ MHz, pour la

valeur choisie de B_0 . Calculer le pouvoir de résolution spectrale $R = \frac{f_i}{\delta f_{\min}}$.

c) Commenter ce résultat.

On rappelle que le champ local B'_o ressenti par chaque proton d'un même groupe n°i a pour valeur $B'_o = B_o \cdot (1 - \sigma_i)$, où σ_i représente le coefficient d'écran du groupe n°i.

III-B.12) Déduire du résultat précédent, en fonction de B_o , γ et T_2 la valeur minimale de l'écart $\delta\sigma$ entre les deux coefficients d'écran pour qu'on puisse séparer les deux groupes de protons, et l'intérêt qu'il peut y avoir à travailler avec des valeurs importantes de B_o .

Dans toute la suite, on se place de nouveau dans le cas $B_o = 4,70$ T.

III-B.13) a) Calculer $\delta\sigma_{\min}$.

b) Commenter ce résultat, sachant que la fenêtre des valeurs de σ à explorer a une largeur de l'ordre de 10 ppm, soit $10 \cdot 10^{-6}$.

III-B.14) On rappelle que, pour le groupe de protons n°i, $U_i = K B_o^2 N_i$, K étant une constante –dont on ne demande pas le calcul– dont la valeur est commune à tous les groupes de protons. Montrer que, pour des pics nettement séparés, l'aire de chaque pic est proportionnelle au nombre N_i de protons concernés. On pourra utiliser le fait que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$$

III-B.15) a) Quelle condition supplémentaire doit-on imposer à la fréquence de coupure f_c des deux filtres passe-bas (mentionnés dans l'introduction de la question III-B) si la fenêtre spectrale à explorer a une demi-largeur de l'ordre du kHz ?

b) Les deux conditions sur f_c , obtenues aux questions III-B.2 et III-B.15.a) sont-elles aisément conciliables ?

III-C . Réalisation des impulsions radiofréquences

On superpose au champ magnétique permanent un champ magnétique uniforme, perpendiculaire à Oz et tournant à la vitesse angulaire négative : (voir figure ci-contre) ; est constant et positif . On rappelle que la fréquence est choisie au centre (environ 200 MHz) de la fenêtre spectrale à explorer , dont la demi-largeur est de l'ordre du kHz.

On note (R_1) le référentiel lié aux axes OX, OY et Oz, ainsi animé par rapport à (R_0) d'un mouvement de rotation uniforme autour de Oz , à la vitesse angulaire constante et

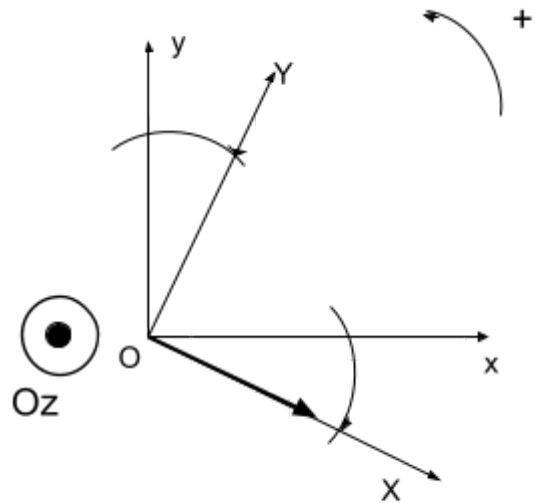


Figure III-5

négative ω_0 ; la base associée, orthonormée directe, est notée $\{u_X, u_Y, u_Z\}$.

Dans ce référentiel (R_1) , le champ magnétique $\vec{B}_1$ est donc uniforme et permanent. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, les axes Ox et OX sont confondus .

On s'intéresse d'abord à un groupe de N_i protons correspondant tous à une même valeur $f_i = \frac{\gamma_i}{2\pi}$ (avec $\gamma_i = \gamma B_0 \hbar \gamma_i$) de la fréquence de précession autour de $\vec{B}_0$; avant

l'impulsion, leur moment magnétique total, colinéaire à $\vec{B}_0$ vaut $M_{0i} u_Z$. On pose : $\vec{M}_D = \sum_i M_i u_{0i}$ et $\vec{M}_1 = \sum_i M_i \vec{B}_1$.

La durée des impulsions est supposée très faible devant les temps de relaxation T_1 et T_2 .

Dans ces conditions, on ne prend pas en compte, dans toute cette partie III-C, l'effet des phénomènes de relaxation.

III-C.1) Montrer que : $\left(\frac{d\vec{M}_i}{dt} \right)_{R_0} = \gamma_1 \hbar \gamma_i u_Z \vec{M}_i$.

On donne la relation : $\left(\frac{d\vec{M}_i}{dt} \right)_{R_0} = \left(\frac{d\vec{M}_i}{dt} \right)_{R_1} + \omega_0 u_Z \vec{M}_i$.

III-C.2) En déduire l'expression de $\frac{d\vec{M}_i}{dt}$ en fonction de $\vec{\omega}_1$, $\vec{\omega}_D$, $\vec{u}_z$ et de $\vec{M}_i$.

III-C.3) Montrer simplement que le vecteur $\vec{\omega}_1$ est fixe dans le référentiel (R_1) .

On souhaite que, dans (R_1) , le mouvement de précession de $\vec{M}_i$ se fasse sensiblement autour de l'axe OX colinéaire à $\vec{B}_1$ et de même direction que $\vec{\omega}_1$.

On impose ainsi $\|\vec{\omega}_1\| \gg |\omega_D| |\omega_i| |\omega_o|$.

III-C.4) La pulsation ω_o étant choisie au centre de la fenêtre des pulsations ω_i à explorer, montrer qu'on doit choisir $\|\vec{B}_1\|$ suffisamment importante pour que la condition précédente soit réalisée pour tout groupe de protons.

On impose le critère $\|\vec{\omega}_1\| = 10 \omega_o$, la demi-largeur en fréquence Δf de la plage à explorer valant 2 kHz.

III-C.5) Sachant que $\omega_o = 2,675 \cdot 10^8 \text{ rad.s}^{-1}$, calculer la valeur de $\|\vec{B}_1\|$ correspondant à ce critère.

On choisit la durée t_p d'une impulsion de telle sorte que, pour tout groupe de protons de la fenêtre à explorer, le moment dipolaire total $\vec{M}_i$ du groupe effectue, dans (R_1) , une rotation d'un quart de tour, et soit aligné avec OY à la fin de l'impulsion (impulsion dite « $\frac{\pi}{2}$ »).

III-C.6) Déterminer, puis calculer t_p , $\|\vec{\omega}_1\|$ étant égale à $10 \Delta\omega$.

Dans le référentiel (R_o) , l'impulsion radiofréquence induit une excitation sinusoïdale de pulsation ω_o , de durée t_p . Or, l'énergie d'interaction de chaque groupement avec le champ permanent augmente (elle passe d'une valeur négative à la valeur nulle).

L'impulsion sinusoïdale, de pulsation ω_o et de durée t_p permet donc des absorptions de photons d'énergies différentes : E_{photon} vaut $\hbar \omega_i$, la pulsation ω_i pouvant prendre, selon le groupement, plusieurs valeurs dans la fenêtre explorée de demi-largeur en pulsation $\Delta\omega$.

III-C.7) Interpréter avec soin ce phénomène, en s'appuyant sur l'expression littérale de t_p obtenue à la question III-C.6.

III-C.8) Le champ $\vec{B}_1$ est remplacé par un champ $\vec{B}_2$ alternatif, de direction fixe dans (R_o) : $B_2 = 2B_1 \cos(\omega_o t) u_x$, créé par la bobine du circuit antenne, d'axe Ox ; en montrant au préalable que $\vec{B}_2$ peut être considéré comme la somme de deux champs, tournant dans (R_o) dans deux sens inverses, expliquer, sans calcul, pourquoi l'effet de $\vec{B}_2$ sur $\vec{M}$ est, dans (R_1) , sensiblement le même que celui de $\vec{B}_1$.

III-C.9) Pour créer le champ $\vec{B}_2$ introduit à la question III-C.8, on utilise le circuit d'antenne, alimenté par un générateur externe de caractéristiques de Thévenin ($e_2(t)$, R') (voir la figure III-6, ci-dessous). Quelle doit être la forme de la dépendance temporelle de l'intensité $i(t)$ passant dans le circuit d'antenne ci-dessous, pendant la durée de l'impulsion (on ne demande pas la valeur de l'amplitude de cette intensité).

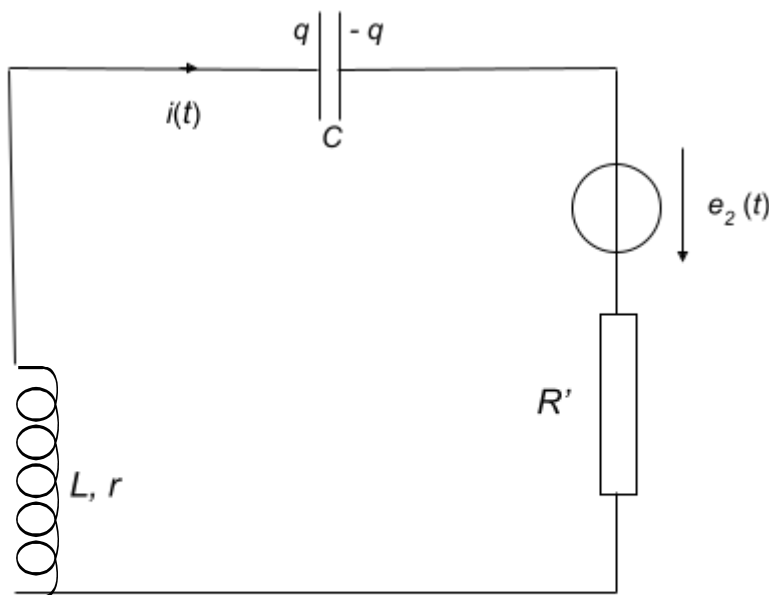


Figure III-6

Pendant la durée de l'impulsion, la fém induite par la précession des protons est négligeable, car le champ magnétique $\vec{B}_2$ est beaucoup plus intense que celui créé par la précession des protons.

$$T_o = \frac{2\pi}{\omega_o}$$

On suppose que la durée de l'impulsion est un multiple entier de la période $\frac{2\pi}{\omega_o}$; on montre que, dans ces conditions, les effets des termes transitoires de $i(t)$ au début et à la fin de l'impulsion se compensent.

III-C.10) On rappelle que $LC\omega_o^2 = 1$. Quelle doit être la forme de $e_2(t)$ pendant l'impulsion, dans ces conditions ?

III-C.11) Quelle devrait être la forme de $e_2(t)$ pour que le moment dipolaire total $\vec{M}_i$ du groupe étudié effectue, dans (R_1), une rotation autour de OY, cette fois (et non autour de OX comme précédemment) ?

III-C.12) Temps mort à la suite d'une impulsion

Dès la fin de chaque impulsion, il convient d'évacuer, avant le début de la détection, l'énergie magnétique associée à la répartition de champ $\vec{B}_2$: la précession des protons autour de $\vec{B}_0$ doit être libre, la présence d'un « résidu » de $\vec{B}_2$ fausserait la mesure et, de plus, saturerait le détecteur en quadrature, car $\vec{B}_2$ est d'un ordre de grandeur bien plus important que le champ magnétique créé par les protons en précession.

A cette fin, on évacue l'énergie par le même circuit résonnant, $e_2(t)$ étant nulle. L'effet de la fém induite par la précession des protons reste négligeable, tant qu'une part significative de l'énergie associée à la répartition de champ $\vec{B}_2$ reste présente.

a) Sachant que $i(t) = I e^{-\frac{\omega_o t}{2Q}} \cos \omega_o t$, on respecte, entre la fin de l'impulsion et le début de la détection, un temps mort égal à 15 fois la constante de temps du terme exponentiel. Calculer la durée de ce temps mort. On rappelle que $f_o = 200$ MHz et que $Q = 100$.

b) On souhaite diminuer ce temps mort ; une solution consiste à ce qu'une partie de la résistance R' (voir figure III-6) soit fonction croissante de la valeur efficace du courant qui traverse le circuit.

Expliquer en quoi ce procédé (dit auto-adaptatif) permet de diminuer le temps mort, sans faire varier f_o , ni la valeur de Q pendant la détection.

FIN DU SUJET