

ΘΕΜΑΤΑ Γ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ

A. Ν' αποδείξετε ότι : $(\alpha - 3)^2 + (\beta - 1)^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 6\alpha - 2\beta + 10$

B. Ν' αποδείξετε ότι : $\alpha^2 + \beta^2 - 6\alpha - 2\beta + 10 \geq 0$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Γ. Για ποιες τιμές των α , β ισχύει η ισότητα στην παραπάνω ανισότητα;

ΘΕΜΑ

A. Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση : $A = x^3 - 2x^2 + 3x - 6$

B. Να απλοποιήσετε την παράσταση : $B = \frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 6}{x^3 - 4x^2 + 4x}$

Γ. Να λύσετε την εξίσωση : $x^3 - 2x^2 + 3x - 6 = 0$

ΘΕΜΑ

A. Να αποδείξετε ότι :

A1. $|x^2 - 1| = |1 - x^2|$

A2. $|2x^2 - 2| = 2|x^2 - 1|$

B. Να λύσετε την εξίσωση : $\frac{|x^2 - 1| - 2}{6} + |1 - x^2| = 1 + \frac{|2x^2 - 2| - 1}{3}$

ΘΕΜΑ

A. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις x^2-1 , x^2+x

B. Να βρείτε το Ε.Κ.Π (x^2-1 , $2x$, x^2+x)

Γ. Για ποιες τιμές του x ισχύει : Ε.Κ.Π (x^2-1 , $2x$, x^2+x) $\neq 0$

Δ. Να λύσετε την εξίσωση : $\frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{x^2+x} = 0$

ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2|x-3|-7$

A. Να λύσετε τις εξισώσεις:

A1. $f(x) = 1$

A2. $f(x) = f(2x)$

B. Να λύσετε την ανίσωση: $f(x) > |3x - 9|$

ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \sqrt{9x^2 - 6x + 1}$

A. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

B. Να αποδείξετε ότι : $f(x) = |3x - 1|$

Γ. Να λύσετε την εξίσωση : $f(x) = f(2)$

ΘΕΜΑ

Δίνεται η παράσταση $A(x) = 2|x - 3| + x - 5$

A. Να αποδείξετε ότι για $x < 3$ ισχύει : $A(x) = 1 - x$

B. Να αποδείξετε ότι για $x \geq 3$ ισχύει : $A(x) = 3x - 11$

Γ. Να λύσετε την εξίσωση: $A(x) = x$

ΘΕΜΑ

Δίνεται η παράσταση: $A = \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$

A. Να αποδείξετε ότι : $A = 2\sqrt{2} + 1$

B. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A^2 - 2A$

ΘΕΜΑ

Δίνεται η παράσταση: $A(x) = \frac{x^2 + x - 2}{2x^2 - x - 1}$

A. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η $A(x)$

B. Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του x του προηγούμενου ερωτήματος ισχύει:

$$A(x) = \frac{x+2}{2x+1}$$

Γ. Να λύσετε την εξίσωση: $A(x) = x$

ΘΕΜΑ

Δίνεται η εξίσωση : $x^2 + (\lambda - 2)x - 2\lambda = 0$

A. Ν' αποδείξετε ότι έχει πραγματικές ρίζες για κάθε πραγματικό αριθμό λ .

B. Αν έχει δύο ρίζες άνισες να βρείτε το λ έτσι ώστε :

I. οι ρίζες να είναι αντίστροφοι αριθμοί

II. να ισχύει : $x_1 + x_2 = 11$

ΘΕΜΑ

Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - (\lambda + 3)x + 3\lambda = 0$

A. Να αποδείξετε ότι έχει δύο ρίζες άνισες όταν $\lambda \neq 3$

B. Αν η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες τις x_1, x_2 να βρείτε το λ ώστε :

$$2x_1 + 2x_2 = \lambda^2 + \lambda$$

ΘΕΜΑ

Δίνεται το πολυώνυμο : $P(x) = x^2 - (\lambda - 1)x + \frac{3(\lambda - 1)}{4}, \lambda \in \mathbb{R}$

A. Για ποιες του λ η εξίσωση : $P(x) = 0$ έχει μία ρίζα διπλή.

B. Για την μεγαλύτερη τιμή του λ του προηγούμενου ερωτήματος να παραγοντοποιήσετε τα πολυώνυμα : I) $P(x)$ και II.

$$Q(x) = P(x) + \left(x + \frac{3}{2}\right)^{10}$$

ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$

A. Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = 0$

B. Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση: $A = f(x) + (2x - 1)^3$

Γ. Να λύσετε την ανίσωση: $f(x) < 0$

ΘΕΜΑ

A. Να λύσετε τις εξισώσεις : $x^2 - 9 = 0$, $-x^2 + 2x + 3 = 0$

Β. Να απλοποιήσετε την παράσταση : $A = \frac{-x^2 + 2x + 3}{x^2 - 9}$

Γ. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων : $x^2 - 9 \leq 0$ και $-x^2 + 2x + 3 < 0$

ΘΕΜΑ

Α. Να λύσετε τις εξισώσεις : $2x^2 - 5x + 2 = 0$ και $4x(x - 1) = -1$

Β. Να απλοποιήσετε την παράσταση : $A = \frac{2x^2 - 5x + 2}{4x^2 - 4x + 1}$

Γ. Να λυθεί η διπλή ανίσωση : $5x^2 - 3x + 1 < x^2 + x \leq 3x^2 - 4x + 2$

ΘΕΜΑ

Δίνεται το πολυώνυμο : $P(x) = x^2 + 3\lambda x + \lambda^2 + \frac{5}{4}, \lambda \in R$

Α. Για ποιες του λ η εξίσωση : $P(x) = 0$ έχει μία ρίζα διπλή.

Β. Για ποιες τιμές του λ ισχύει $P(x) > 0$ για κάθε $x \in R$

ΘΕΜΑ

Δίνονται οι αριθμοί : $x + 2, |x|, x + 1$

Α. Να βρείτε την τιμή του x , ώστε να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

Β. Να βρείτε την τιμή του x , ώστε να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου.

ΘΕΜΑ

Δίνονται οι αριθμοί : $\frac{5(x+1)}{4}$, $10 - x$, $\frac{3(x+3)}{2}$, $x \in \mathbb{R}$

Αν αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1 = -9$:

A. Να αποδείξετε ότι $x = 3$

B. Να βρείτε την τάξη των παραπάνω όρων.

Γ. Να υπολογίσετε το άθροισμα: $S = \alpha_{16} + \alpha_{17} + \alpha_{18} + \dots + \alpha_{29} + \alpha_{30}$

ΘΕΜΑ

A. Ποιον αριθμό x πρέπει να προσθέσουμε στους αριθμούς : 1, 3, 2 ώστε να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου.

B. Για την τιμή του x που βρήκατε να βρείτε τους διαδοχικούς όρους καθώς και τον λόγο της προόδου.

Γ. Αν ο πρώτος όρος της προόδου είναι $\alpha_1 = \frac{8}{3}$ να βρείτε την τάξη των προηγούμενων διαδοχικών όρων.

ΘΕΜΑ

Δίνεται μια αριθμητική πρόοδος με $\alpha_5 = 5x + 2$, $\alpha_{10} = 15x + 2$, όπου $x \in \mathbb{R}$

A. Να εκφράσετε τον πρώτο όρο και την διαφορά της προόδου συναρτήσει του x .

B. Να λύσετε την εξίσωση : $S_{12} = 180$

ΘΕΜΑ

Δίνεται μια αριθμητική πρόοδος με $\alpha_1 = -2$ και $\alpha_{12} = 31$.

A. Να υπολογίσετε την διαφορά ω της προόδου.

B. Να υπολογίσετε τους όρους της : α_{21} και α_{97}

B. Να υπολογίσετε το άθροισμα : $S = a_{21} + a_{22} + a_{23} + \dots + a_{97} + 2\omega$

ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = a\sqrt{x-1} + \frac{1}{x-2}$, $\alpha \in R$

A. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

B. Να βρείτε το α ώστε $f(5) = -\frac{5}{3}$

Αν $\alpha = -1$:

Γ. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο

$A(10, -23/8)$

ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \frac{ax+1}{x^2-5x+6}$, $\alpha \in R$

A. να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

B. να υπολογίσετε το α ώστε $f(1) = \alpha^2$

Γ. για την μεγαλύτερη τιμή του α του προηγούμενου ερωτήματος να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.

ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = (\kappa^2 - 3\kappa)x + \kappa$, $\kappa \in R$

A. Να βρείτε το κ ώστε η C_f να είναι παράλληλη προς την ευθεία $y = -2x+21$

B. Για την μεγαλύτερη τιμή του κ του προηγούμενου ερωτήματος να βρείτε τα σημεία τομής B, Γ της C_f με τους άξονες x και y αντίστοιχα.

Γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου OBG

ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \alpha x^4 + (\alpha + 1)x^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$

A. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων O.

B. Να βρείτε την τιμή του α ώστε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο A(-1,3)

Αν $\alpha = 1$

Γ. Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = 3$