МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД

«ПОДІЛЬСЬКИЙ ЦЕНТР ПРОФЕСІЙНО-ТЕХНІЧНОЇ ОСВІТИ»

БАРАБАШ І.О.

ГЕОМЕТРІЯ. ОПОРНІ КОНСПЕКТИ. ТЕСТИ. ЗАДАЧІ.

(НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК)

Кам’янець-Подільський, 2021

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«ПОДІЛЬСЬКИЙ ЦЕНТР ПРОФЕСІЙНО-ТЕХНІЧНОЇ ОСВІТИ»

БАРАБАШ І.О.

ГЕОМЕТРІЯ. ОПОРНІ КОНСПЕКТИ. ТЕСТИ. ЗАДАЧІ.

(НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК)

Кам'янець-Подільський, 2020

Посібник розглянуто та ухвалено на засіданні педагогічної ради ДНЗ «Подільський центр ПТО» до подальшого розгляду на науково-методичній раді НМЦ ПТО ПК у Хмельницькій області (протокол №1 від 30.08.2020р.).

Рецензенти:

І. Сікірніцька, викладач математики ДЗП(ПТ)О «Старокостянтинівський аграрно-промисловий ліцей»

Барабаш І. О. Геометрія. Опорні конспекти. Тести. Задачі: навчальний посібник /Ірина Барабаш. - Кам'янець-Подільський: 2020. − 50с

Навчальний посібник відповідає чинній програмі з математики для закладів середньої освіти Рівень стандарту. Він містить опорні конспекти, тести, задачі до всіх тем курсу з геометрії.

Матеріали забезпечують диференційований підхід до навчання здобувачів освіти. Завдання зорієнтовані на досягнення базового рівня засвоєння шкільного курсу геометрії.

Рекомендовано для викладачів математики та здобувачів освіти ЗП(ПТ)О.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Навчальний посібник відповідає чинній програмі з математики для закладів середньої освіти Рівень стандарту. Він містить опорні конспекти, тести, задачі до всіх тем курсу з геометрії.

Матеріали забезпечують диференційований підхід до навчання здобувачів освіти. Завдання зорієнтовані на досягнення базового рівня засвоєння шкільного курсу геометрії.

Особливістю цього навчального посібника є стисле викладення навчального матеріалу. У посібнику крім теоретичного матеріалу наведено приклади розв'язання типових задач, запропоновано індивідуальні варіанти завдань для самостійної та позааудиторної роботи.

Навчальний посібник містить комплект опорних схем, що допоможе здобувачам освіти повторити опорні факти курсу геометрії, узагальнити їх, поглибити знання предмета, навчитися розв'язувати геометричні задачі.

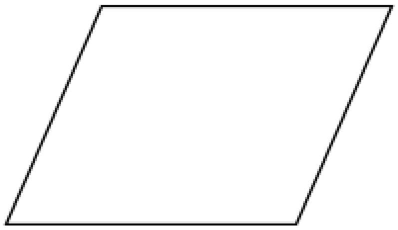
Чітке, лаконічне наочне подання навчального матеріалу у вигляді опорних конспектів дозволить це зробити швидко, полегшить визначення головної (опорної) інформації, її запам'ятовування і використання при розв'язуванні задач.

РОЗДІЛ 1. СТЕРЕОМЕТРІЯ

1.1. ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ТА ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ У ПРОСТОРІ

Стереометрія — це розділ геометрії, у якому вивчаються фігури у просторі. Основні фігури.

- точка .
- пряма
- площина



1.2. АКСІОМИ СТЕРЕОМЕТРІЇ

С1. Яка б не була площина, існують точки, що належать цій площині, і точки, які не належать їй.

С2. Якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, що проходить через цю точку.

С3. Якщо дві різні прямі мають спільну точку, то через них можна провести площину, і до того ж тільки одну.

І. Яка б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій і точки, що не належать їй. Через будь-які дві точки можна провести пряму і тільки одну.

ІІ. З трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими.

ІІІ. Кожний відрізок має певну довжину, більшу від нуля. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається будь-якою його точкою.

IV. Пряма, що належить площині, розбиває цю площину на дві півплощини.

V. На будь-якій півпрямій від її початкової точки можна відкласти відрізок даної довжини і тільки один.

VI. Кожний кут має певну градусну міру, більшу від нуля. Розгорнутий кут дорівнює 180°. Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на який він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами.

VII. Від півпрямої на площині, що містить її, можна відкласти у задану півплощину кут з даною градусною мірою, меншою 180°, і тільки один.

VIII. Який би не був трикутник, існує трикутник, що дорівнює йому, у даній площині у заданому розміщенні відносно даної півпрямої у цій площині.

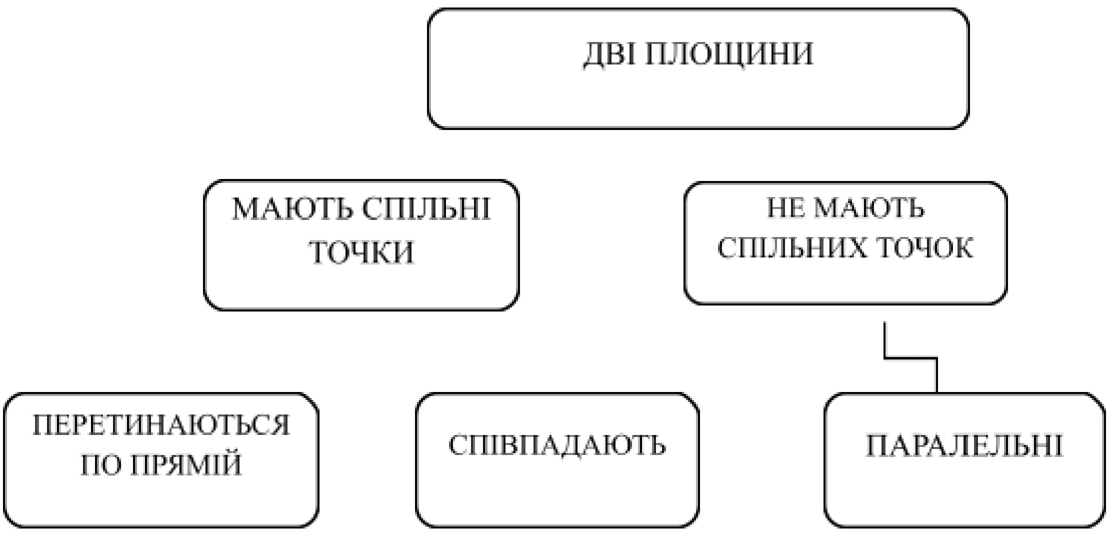
IX. На площині через дану точку, що не лежить на даній прямій, можна провести не більш як одну пряму, паралельну даній.

1.3. ПЛОЩИНИ У ПРОСТОРІ

Площину в просторі визначають

Три точки, що не лежать на одній прямі	Дві прямі, що перетинаються	Пряма і точка, яка їй не належить

1.3.1. ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ДВОХ ПЛОЩИН У ПРОСТОРІ



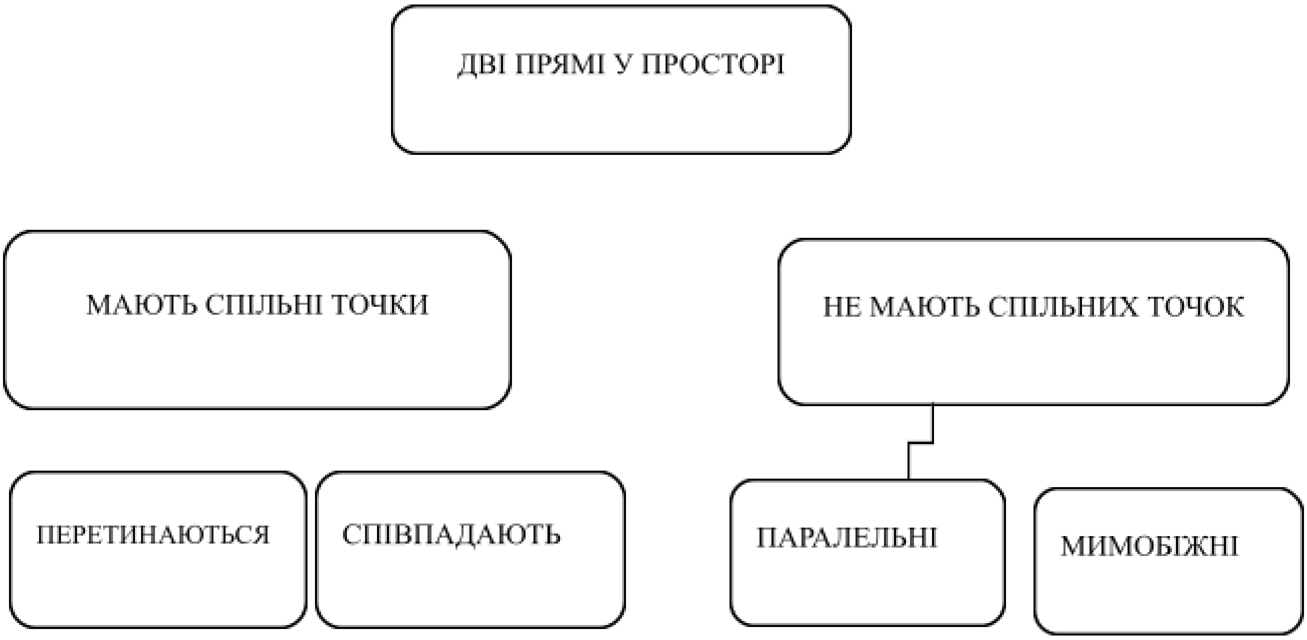
Якщо дві площини в просторі мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій.

<u>Ознака паралельності двох площин</u>

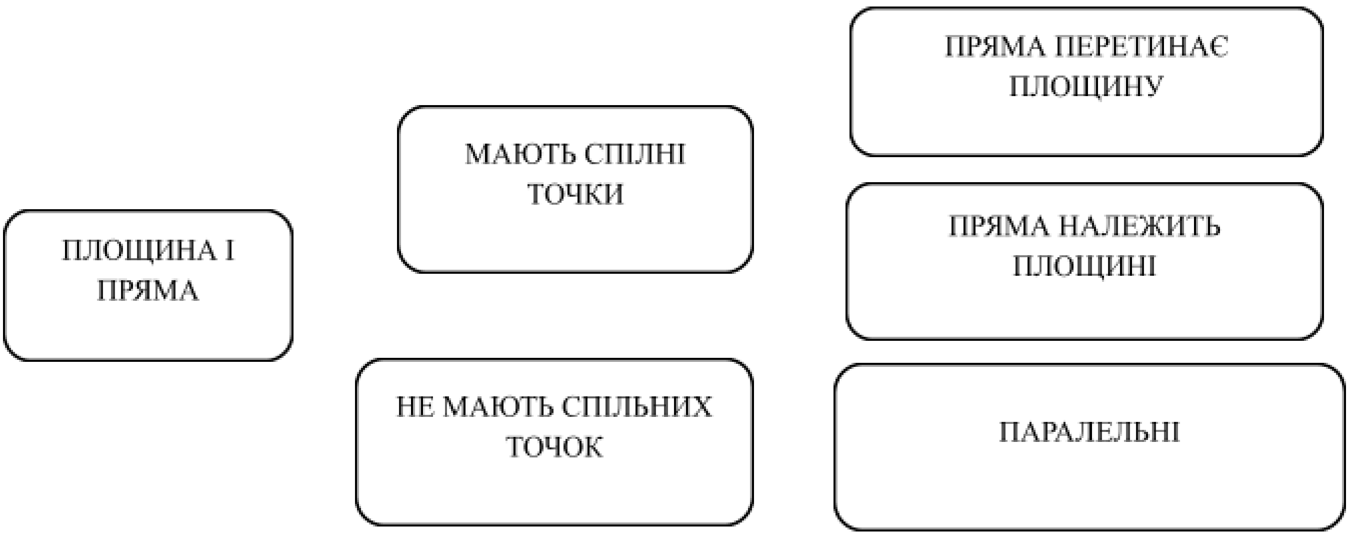
Якщо дві прямі, що перетинаються, в одній площині відповідно паралельні двом прямим в іншій площині, то такі площини паралельні.

1.4. ПРЯМІ У ПРОСТОРІ

1.4.1. ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ДВОХ ПРЯМИХ У ПРОСТОРІ



1.4.2. ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПЛОЩИН І ПРЯМИХ У ПРОСТОРІ



1.5. ЗОБРАЖЕННЯ ПРОСТОРОВИХ ФІГУР НА ПЛОЩИНІ

Для зображення просторових фігур на площині, як правило, користуються паралельним проектуванням. Беремо довільну пряму h, яка перетинає площину рисунка, проводимо через довільну точку А фігури пряму, паралельну h.

Точка перетину цієї прямої з площиною рисунка буде зображенням точки А. Побудувавши таким чином зображення кожної точки фігури, дістанемо зображення самої фігури. Такий спосіб зображення фігури на площині і є паралельне проектування. У випадку, коли пряма h перпендикулярна до площини , кажуть, що проведено ортогональне проектування.

Властивості паралельного проектування

1. Прямолінійні відрізки фігури зображаються на площині рисунка відрізками або точками. (Якщо відрізок, що проектується, паралельний напрямку проектування, він проектується в точку.)

2. Паралельні відрізки фігури зображаються на площині рисунка паралельними відрізками.

3. Відношення відрізків однієї прямої або паралельних прямих зберігається при паралельному проектуванні. При паралельному проектуванні не зберігаються ні довжина відрізка, ні величина кута.

Наслідки

1. Будь-який трикутник може бути зображений довільним трикутником.

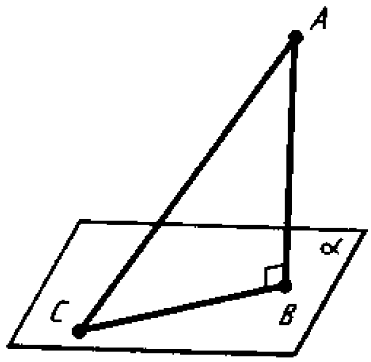
2. Якщо проектується трикутник, то медіани проектуються в медіани, середні лінії — у середні лінії, а висоти й бісектриси не проектуються у висоти й бісектриси. Проте основа проекції бісектриси поділяє сторону проекції трикутника у тому ж відношенні, що основа бісектриси поділяє сторону трикутника.

3. Паралелограм зображається паралелограмом. Прямокутник, квадрат, ромб — паралелограмом загального виду.

4. Трапеція зображається трапецією. Рівнобічність або прямокутність не зберігається.

5. Коло зображається еліпсом.

1.6. ПЕРПЕНДИКУЛЯР І ПОХИЛА



Нехай дано площину і точку, яка не лежить на ній.

Перпендикуляром, опущеним з даної точки на дану площину, називається відрізок, що сполучає дану точку з точкою площини і лежить на прямій, перпендикулярній до площини. Кінець цього відрізка, який лежить у площині, називається *основою перпендикуляра*.

Похилою, проведеною з даної точки до даної площини, називається будь-який відрізок, який сполучає дану точку з точкою площини і не є перпендикуляром до площини. Кінець відрізка, що лежить у площині, називається *основою похилої*.

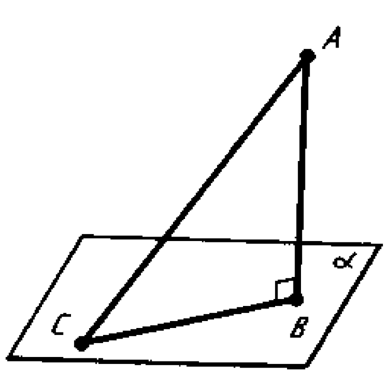
Відрізок, який сполучає основи перпендикуляра і похилої, проведених з однієї і тієї самої точки, називається *проекцією похилої*.

Теорема про три перпендикуляра

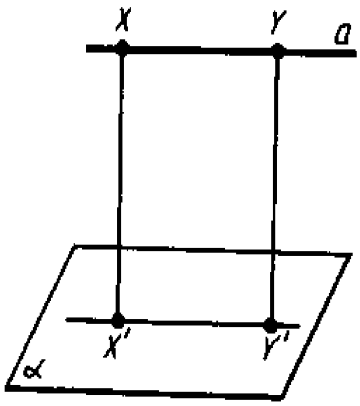
Якщо пряма, проведена на площини через основу похилої, перпендикулярна до її проекції, то вона перпендикулярна до похилої. І навпаки: якщо пряма на площині перпендикулярна до похилої, то вона перпендикулярна і до проекції похилої.

1.7. ВІДСТАНІ У ПРОСТОРІ

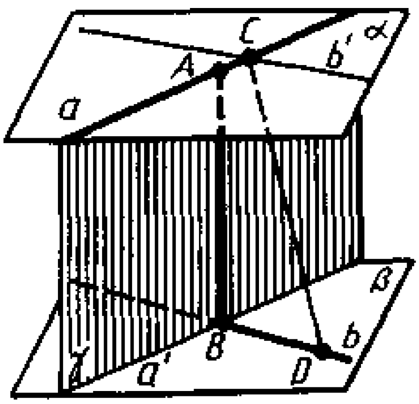
Відстанню від точки до площини називається довжина перпендикуляра, опущеного з цієї точки на площину.



Відстанню від прямої до паралельної їй площини називається відстань від будь-якої точки цієї прямої до площини.



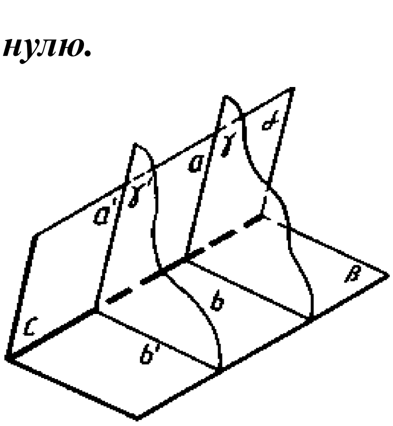
Відстанню між мимобіжними прямими називається довжина їх спільного перпендикуляра. Вона дорівнює відстані між паралельними площинами, які проходять через ці прямі.



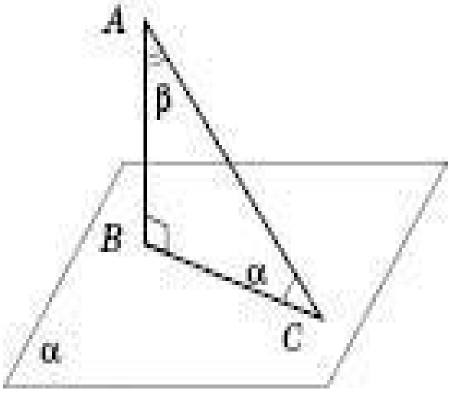
Відстанню між паралельними площинами називається відстань від будь-якої точки однієї площини до другої площини.

1.8. КУТИ У ПРОСТОРІ

Кут між паралельними площинами вважається таким, що дорівнює нулю.



Нехай дані площини перетинаються. Проведемо площину, перпендикулярну до прямої їх перетину. Вона перетинає дані площини по двох прямих. *Кут між цими прямими називається кутом між даними площинами.*



Означений так кут між площинами не залежить від вибору січної площини.

Кутом між прямою та площиною називається кут між прямою та її проєкцією на дану площину

Алгоритм
побудови кута між прямою і площиною

Нехай дані пряма *l* і площина α ,яка її перетинає в т. А.

1. Виберіть на прямій *l* довільну т. В, яка не співпадає з т. А.
2. Із т. В опустіть перпендикуляр на α. С– основа перпендикуляра.
3. Проведіть пряму АС.

Кут ВАС – кут між прямою і площиною.

Алгоритм
побудови проекції прямої на площину

Нехай дані пряма *l* і площина α ,яка її перетинає в т. А.

1. Виберіть на прямій *l* довільну т. В, яка не співпадає з т. А.
2. Із т. В опустіть перпендикуляр на α. С– основа перпендикуляра.
3. Проведіть пряму АС.

Пряма АС – проекція прямої *l* на площину α.

Алгоритм
побудови кута між двома площинами

Нехай дані площини α і β, які перетинаються на прямій *l*.

1. Виберіть на прямій *l* т. А.
2. Через т. А проведіть в площині α пряму АС, що перпендикулярна *l*.
3. Через А проведіть в β пряму АВ, що перпендикулярна *l*.

Кут САВ– кут між α і β.

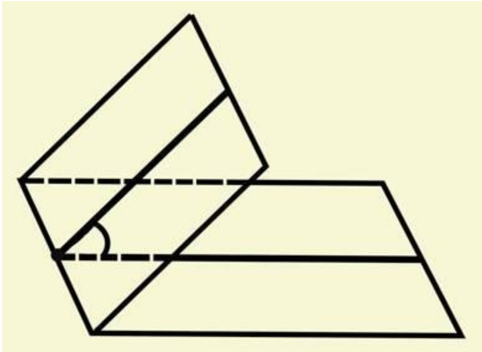
Алгоритм
побудови кута між мимобіжними прямими

Нехай прямі *a* і *b* мимобіжні.

1. Виберіть на прямій *a* довільну точку С.
2. Через С проведіть пряму *m* паралельну *b*.

Величина кута між прямими *m* і *b* дорівнює величині кута між прямими *a* і *b*.

1.9. ДВОГРАННИЙ КУТ



Двогранним кутом називається фігура, утворена двома півплощинами із спільною прямою, що їх обмежує. Півплощини називаються *гранями*, а пряма, що їх обмежує, — *ребром* двогранного кута.

Площина, перпендикулярна до ребра двогранного кута, перетинає його грані по двох півпрямих. Кут, утворений цими півпрямими, називається *лінійним кутом* двогранного кута.

За *міру двогранного кута* приймається міра відповідного йому лінійного кута.

Усі лінійні кути двогранного кута суміщаються паралельним перенесенням, а отже, вони рівні.

Тому міра двогранного кута не залежить від вибору лінійного кута.

1.10. ВЕКТОРИ У ПРОСТОРІ

Вектором називається напрямлений відрізок.

Координатами вектора з початком у точці A_1 $(x_1; y_1; z_1)$ і кінцем у точці A_2 $(x_2; y_2; z_2)$ називають число

$$x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1$$

Рівні вектори мають відповідно рівні координати, і, навпаки, вектори з відповідно рівними координатами, рівні.

1.10.1. ДІЇ НАД ВЕКТОРАМИ У ПРОСТОРІ

- додавання,
- множення на число
- скалярний добуток

Сумою векторів a $(a_1; a_2; a_3)$, b $(b_1; b_2; b_3)$ називається вектор

$$\mathbf{c}\ (a_1 + b_1;\ a_2 + b_2;\ a_3 + b_3).$$

Добутком вектора a $(a_1; a_2; a_3)$ на число λ називається вектор

$$\lambda a = (\lambda a_1;\ \lambda a_2;\ \lambda a_3)$$

Скалярним добутком векторів a ((a_1; a_2; a_3) і b (b_1; b_2 ;b_3) називається число

$$\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b} = a_1\mathbf{b}_1 + a_2\mathbf{b}_2 + a_3\mathbf{b}_3$$

Також, скалярний добуток векторів дорівнює добутку їх абсолютних величин на косинус кута між векторами. Тому

$$\cos\varphi = \rightarrow \frac{AB}{|AB|} * \frac{CD}{|CD|} \quad \cos\varphi = \rightarrow \frac{AB}{|AB|} * \frac{CD}{|CD|}$$

Абсолютна величина вектора λ a дорівнює a , а напрям збігається з напрямом вектора a , якщо $\lambda > 0$, і протилежний напряму вектора a , якщо $\lambda < 0$.

ЗАВДАННЯ до розділу
ТЕСТИ

1. Дві прямі паралельні, якщо вони:
а) не перетинаються;
б) не перетинаються і лежать в одній площині;*
в) не перетинаються і не лежать в одній площині.

2. Дві прямі мимобіжні, якщо вони:
а) не перетинаються;
б) не перетинаються і лежать в одній площині;
в) не перетинаються і не лежать в одній площині.*

3. Пряму у просторі визначають:
а) три точки;
б) дві точки;*
в) одна точка.

4. Через три точки, що не лежать на одній прямій можна провести:
а) безліч площин;
б) одну площину;
в) тільки одну площину.*

5. Через дві прямі, що перетинаються можна провести:
а) безліч площин;
б) одну площину;
в) тільки одну площину.*

6. Через пряму і точку, що їй не належить, можна провести:
а) безліч площин;
б) одну площину;
в) тільки одну площину.*

7. Через точку поза даною прямою можна провести пряму паралельну даній:
а) тільки одну;*
б) безліч;
в) декілька.

8. Пряма паралельна площині, якщо вона паралельна:
а) будь-якій прямій цієї площини;
б) якій-небудь прямій цій площини;*
в) одній прямій цій площині.

9. Відрізки паралельних прямих, що містяться між дома паралельними площинами:
а) різні;
б) рівні;*
в) подібні.

10. Пряма перпендикулярна до площини, якщо вона перпендикулярна до:
а) будь-якої прямої цієї площини;
б) деякої прямої цієї площини;
в) будь-якої прямої цієї площини й проходить через точку перетину.*

11. Перпендикуляр – це відрізок, що:
а) сполучає дану точку і будь-яку точку на площині;
б) лежить на прямій, перпендикулярній до площини;
в) сполучає дану точку і будь-яку точку на площині та лежить на прямій, перпендикулярній до площини.*

12. Похилою, проведеною з даної точки до даної площини, називається будь-який відрізок, що:
а) сполучає дану точку з точкою на площині;
б) сполучає дану точку з точкою на площині і не є перпендикуляром;*
в) лежить на прямій, яка перетинає площину.

13. Перпендикуляр, похила та її проекція, що проведені із однієї точки до площини утворюють:
а) трикутник;
б) рівнобедрений трикутник;
в) прямокутний трикутник.*

14. Відстань від точки до площини – це довжина:
а) перпендикуляра, що опущений із даної точки на площину;*
б) відрізка, що сполучає дану точку із точкою на площині;
в) відрізка, що лежить на прямій, яка перпендикулярна до даної площини.

15.Спільним перпендикуляром до двох мимобіжних прямих називається відрізок:
а) з кінцями на цих прямих;
б) з кінцями на цих прямих, перпендикулярний до кожної з них;*
в) перпендикулярний до кожної з них.

16. Дві мимобіжні прямі мають:
а) один спільний перпендикуляр;
б) тільки один спільний перпендикуляр;*
в) декілька спільних перпендикулярів.

17. Кутом між двома прямими, що перетинаються називається кутова міра:
а) будь-якого кута, що утворюється ними;
б) меншого з кутів;*
в) більшого з кутів.

18. Кутом між мимобіжними прямими називається кут між прямими:
а) які перетинаються;
б) які паралельні даним мимобіжним прямим;

в) які перетинаються та які паралельні даним мимобіжним прямим.*

19. Кутом між прямою і площиною називається кут між:
а) цією прямою і її проекцією на площину;*
б) цією прямою і будь-якою прямою на цій площині;
в) цією прямою і якої-небудь прямою на цій площині.

20. Кутом між двома площинами називається кут між:
а) будь-якими двома прямими цих площин;
б) двома прямими, що перпендикулярні до ліній перетину і проходять через спільну точку;*
в) двома прямим, що проходять через спільну точку.

21.Відстань між паралельними прямими – це довжина:
а) їх спільного перпендикуляра;*
б) будь-якого відрізка, що їх сполучає;
в) перпендикуляра.

22. Відстань між прямою і площиною – це довжина:
а) їх спільного перпендикуляра;*
б) будь-якого відрізка, що їх сполучає;
в) перпендикуляра.

23. Скільки точок визначають пряму в просторі?
а) одна;
б) дві;*
в) три.

24. Скільки точок визначають площину в просторі?
а) одна;
б) дві;*
в) три.

ТЕСТИ – ЗАДАЧІ

1. Прямі А і В перетинаються в точці А. З'ясуйте, скільки прямих можна провести через точку А так, щоб вони не лежали у площині, яка визначається прямими *a* і *b:*
а) жодної
б) одну і тільки одну
в) безліч*

2. Виберіть правильне твердження:
а) якщо точки А і В не лежать у площині α, відрізок АВ не має з нею спільних точок, то пряма АВ паралельна площині α;
б) дві площини, паралельні одній і тій самій прямій, - паралельні;
в) якщо пряма перетинає одну з двох паралельних площин, то вона перетинає й другу*.

3. Діагоналі ромба ABCD перетинаються в точці О, МА – перпендикуляр до площини АВС. З'ясуйте взаємне розміщення BD і МО:
а) BD і МО перетинаються під гострим кутом;*
б) BD і МО мимобіжні;
в) BD і МО перпендикулярні.

4. Через точки А, В, С простору проведено дві різні площини. Укажіть неможливе розміщення цих точок у даному випадку:
а) точки А, В, С не лежать на одній прямій*;
б) точки А, В, С збігаються;
в) точки А, В, С лежать на одній прямій.

5. Прямі *a* і *b* - мимобіжні. Точка С не належить цім прямим. З'ясуйте взаємне розміщення площин, які визначені прямою *a* і точкою С та прямою *b* і точкою С:
а) площини мають едину спільну точку;
б) площини перетинаються*:
в) площини паралельні.

6. Площина, паралельна діагоналі паралелограма. Перетинає дві його сторони в точках М і N. Знайдіть довжину відрізка MN, якщо М – середина сторони паралелограма. А його діагоналі дорівнюють 6см і 4см:
а) 3см;
б) 2см;
в)3см або 2см.*

Задачі

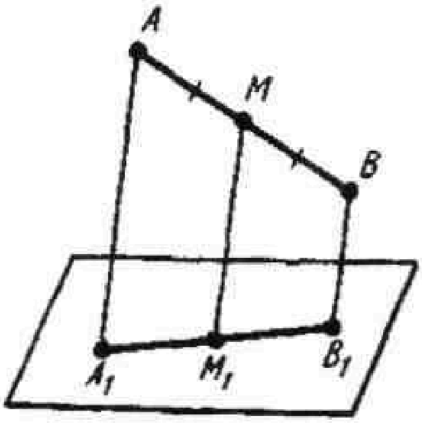
§1

1. Точки А, В, С, D не лежать на одній площині. Доведіть, що прямі АВ і CD не перетинаються.

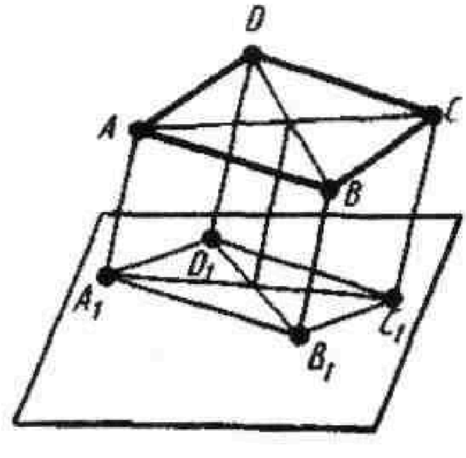
2. Чи можна через точку перетину двох даних прямих провести третю пряму, яка не лежить з ними в одній площині? Відповідь поясніть.
3. Точки А, В, С лежать у кожній з двох різних площин. Доведіть, що ці точки лежать на одній прямій.
5. Дано дві площини, які перетинаються по прямій а, і пряму Ь, яка лежить в одній з цих площин і перетинає другу. Доведіть, що прямі а і b перетинаються.
6. Чотири точки не лежать в одній площині. Чи можуть будь-які три з них лежати на одній прямій? Відповідь поясніть.
7.Доведіть, що через пряму можна провести дві різні площини.

§2

1. Доведіть, що коли прямі АВ і CD мимобіжні, то прямі АС і BD теж мимобіжні.
2. Чи можна через точку С, яка не належить мимобіжним прямим а і Ь, провести дві різні прямі, кожна з яких перетинає прямі а і Ь? Відповідь поясніть.
3. Доведіть, що усі прямі, які перетинають дві дані паралельні прямі, лежать в одній площині.
4. Прямі а і b перетинаються. Доведіть, що усі прямі, які паралельні прямій b і перетинають пряму а, лежать в одній площині.
5. Через кінці відрізка АВ і його середину М проведено паралельні прямі, що перетинають деяку площину в точках А, В і М. Знайдіть довжину відрізка ММ1, якщо відрізок АВ не перетинає площину (мал. 30) і коли: 1) АА1=5 м, ВВ1 = 7 м; 2) АА1 = 3,6 дм, ВВ1 = 4,8 дм; 3) АА1 = 8,3 см, ВВ1 = 4,1 см; 4) АА1 = а, ВВ1 = Ь.



Мал. 30



Мал. 31

6. Через кінець А відрізка АВ проведено площину. Через кінець В і точку С цього відрізка проведено паралельні прямі, які перетинають площину в точках В1 і С1. Знайдіть довжину відрізка ВВ1, якщо: 1) СС1 = 15 см, АС:ВС = 2:3; 2) СС1 = 8,1 см, АВ:АС=11:9; 3) АВ = 6 см, АС:СС1 = 2:5; 4) АС = а, ВС = Ь, СС1 = с.

7. Прямі a i b не лежать в одній площині. Чи можна провести пряму с, паралельну прямим a i Ь?
8. Точки A, B, C, D не лежать в одній площині. Доведіть, що пряма, яка проходить через середини відрізків AB і BC, паралельна прямій, яка проходить через середини відрізків AD і CD.

9. Дано трикутник ABC. Площина, паралельна прямій AB, перетинає сторону AC цього трикутника в точці A1, а сторону BC — в точці B1. Знайдіть довжину відрізка A1B1, якщо: 1) AB = 15см, AA1:AC = 2:3; 2) AB = 8 см, AA1 : A1C = 5:3; 3) B1C=10 см, AB:BC = 4:5; 4)AA1 =a,AB = Ь, A1C = c.
10. Доведіть, що через дві мимобіжні прямі можна провести паралельні площини.

§3

1.Доведіть, що через будь-яку точку прямої у просторі можна провести перпендикулярну до неї пряму.
2. Доведіть, що через будь-яку точку прямої у просторі можна провести дві різні перпендикулярні до неї прямі. 3. Прямі AB, AC і AD попарно перпендикулярні. Знайдіть відрізок CD, якщо: 1)AB = 3см, BC = 7CM, AD = 1,5 CM; 2) BD = 9 CM, BC = 16 CM, AD = 5CM; 3) AB = b, BC = a, AD = d; 4) BD = c, BC = a, AD = d.
3. Через вершину A прямокутника ABCD проведено пряму AK, перпендикулярну до його площини. Відстані від точки K до рештивершин прямокутника дорівнюють 6м, 7м і 9м. Знайдіть відрізок AK.
4. Через вершину A прямокутника ABCD проведено пряму AK, перпендикулярну до його площини. Відстані від точки K до решти вершин прямокутника дорівнюють 6м, 7м і 9м. Знайдіть відрізок AK.
5. Доведіть, що через будь-яку точку A можна провести пряму, перпендикулярну до даної площини α.
6. Через точки A і B проведено прямі, перпендикулярні до площини α, які перетинають її в точках C і D. Знайдіть відстань між точками A і B, якщо AC = 3 м, BD = 2 м, CD = 2,4 м і відрізок AB не перетинає площину α.
7. Верхні кінці двох вертикальних стовпів, які знаходяться на відстані 3,4 м один від одного, з'єднано поперечкою. Висота одного стовпа 5,8 м, а другого 3,9 м. Знайдіть довжину поперечки.
8. З точки до площини проведено дві похилі, які дорівнюють 10см і 17см. Різниця проекцій цих похилих становить 9 см. Знайдіть проекції похилих.
9. З точки до площини проведено дві похилі. Знайдіть довжини похилих, якщо: 1) одна з них на 26см більша від другої, а проекції похилих дорівнюють 12см і 40см; 2) похилі відносяться, як 1:2, а проекції похилих дорівнюють 1см і 7см.

10. З точки до площини проведено дві похилі, які дорівнюють 23 см і 33 см. Знайдіть відстань від цієї точки до площини, якщо проекції похилих відносяться, як 2:3.
11. Через вершину прямото кута С прямокутного трикутника АВС проведено площину, паралельну до гіпотенузи, на відстані 1м від неї. Проекції катетів на цю площину дорівнюють 3м і 5 м. Знайдіть гіпотенузу.
12. Через одну сторону ромба проведено площину на відстані 4м від протилежної сторони. Проекції діагоналей на цю площину дорівнюють 8м і 2м. Знайдіть проекції сторін.
13. Відстань від даної точки до площини трикутника дорівнює 1,1 м, а до кожної з його сторін 6,1 м. Знайдіть радіус кола, вписаного в цей трикутник.

14. З вершини рівностороннього трикутника АВС проведено перпендикуляр AD до площини трикутника. Знайдіть відстань від точки D до сторони ВС, якщо AD = 13 см, ВС = 6 см.

§4

1. Дано чотири точки: *А* (2; 7; —3), *В (1;* 0; 3), С (—3; —4; 5), *D(*—2; 3; —1). Вкажіть серед векторів *АВ, ВС, DC, AD, АС і BD* рівні вектори.
2. Дано три точки А (1; 0; 1), *В* (—1; 1; 2), С(0; 2; —1). Знайдіть точку *D (х; у; z),* якщо вектори *АВ* і *CD* рівні.
3. Знайдіть точку *D* в задачі 51, якщо сума векторів *АВ* і *CD* дорівнює нулю.
4. Дано вектори (2; *n;* 3) і (3; 2; *m)*. При яких *m* і *n* ці вектори колінеарні?
5. Дано вектор *а (1;* 2; 3). Знайдіть колінеарний йому вектор з початком у точці *А* (1; 1;. 1) і кінцем у точці *В* на площині *ху.*
6. При яких значеннях *п* дані вектори перпендикулярні: 1) а (2; —1; 3), b(1;3; *n*); 2) *а (n;* —2; 1), *b(n; — n;* 1)); 3) *а* (m*;*2; 1), *b(n;* 2 *n*; 4); 4) а (4; *2n;* —1), b(-1; 1; *n*)?
7. Дано точки: *А(0;* 0; 1), В(—1; 1; 2), С(0; 2; —1): Знайдіть на осі *z* таку точку *D* (0; 0; с), щоб вектори *АВ* і *CD* були перпендикулярні.
8.Вектори *а і b* утворюють кут 60°, а вектор *с* перпендикулярний до них. Знайдіть абсолютну величину вектора *а* + *b* + *с.*

РОЗДІЛ 2. МНОГОГРАННИКИ

2.1. ПРИЗМА

Поверхня призми

Основа

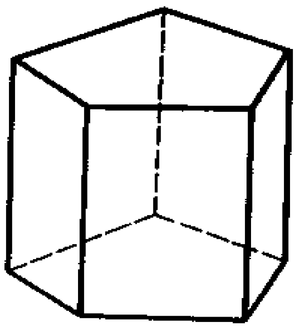
Многогранник

Бічна поверхня

Паралелограми

2.1.1. ЕЛЕМЕНТИ ПРИЗМИ

- **Основи**
- **Бічна**
- **Ребра**
- **Вершини**



- **Висота**
- **Діагоналі основи**
- **Діагоналі призми**
- **Діагоналі бічних граней**

2.1.2. ВИДИ ПРИЗМИ

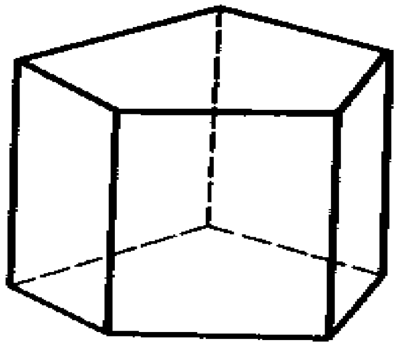
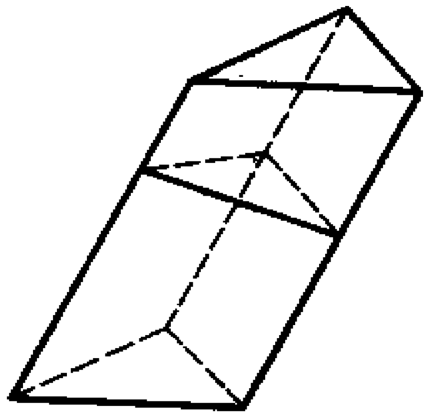
ПРИЗМА

ПРЯМА

ПОХИЛА

ЗВИЧАЙНА
(в основі лежить довільний многокутник)

ПРАВИЛЬНА
(в основі лежить правильний многокутник)

Призма називається *прямою*, якщо її бічні ребра перпендикулярні до основ. 	Призма називається *похилою*, якщо її бічні ребра не перпендикулярні до основ. 

Бічні грані прямої призми — прямокутники.

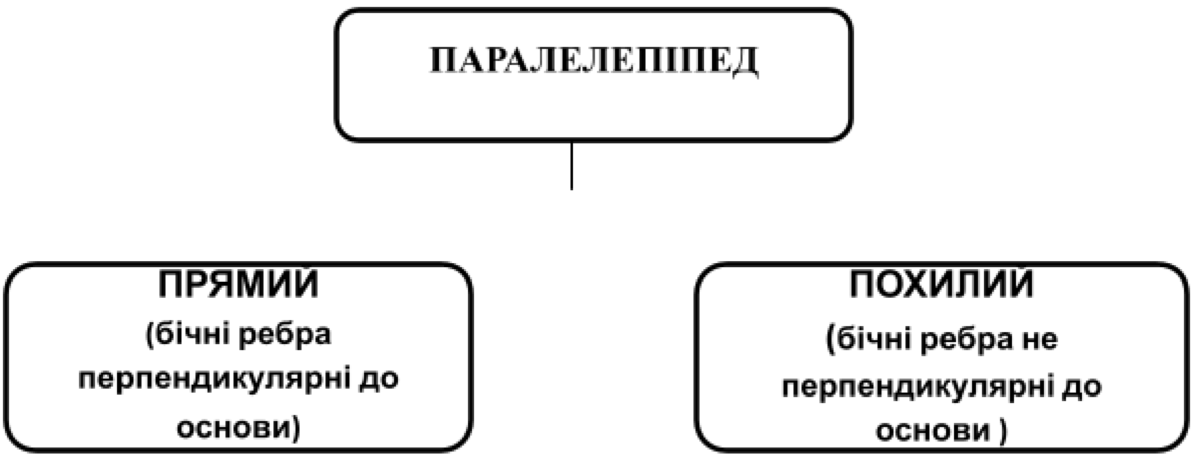
Пряма призма називається *правильною*, якщо її основи є правильними многокутниками.

Бічною поверхнею (точніше, площею бічної поверхні) призми називається *сума площ бічних граней*.

Повна поверхня призми дорівнює сумі бічної поверхні і площ основ.

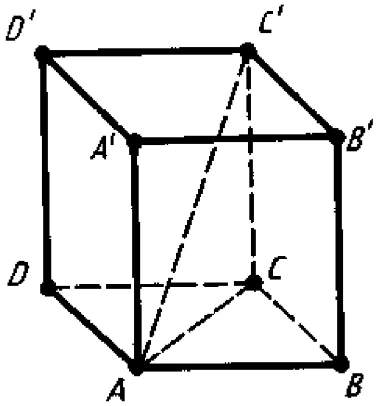
Бічна поверхня прямої призми дорівнює добутку периметра основи на висоту призми, тобто на довжину бічного ребра.

2.2. ПАРАЛЕЛЕПІПЕД

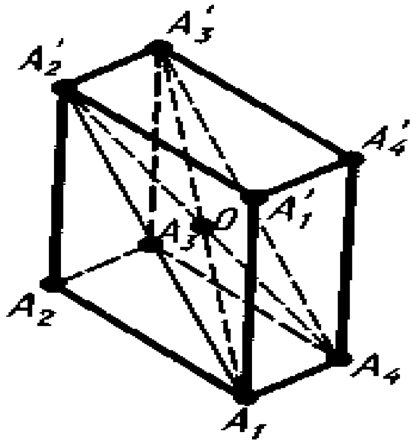


2.2.1. ЕЛЕМЕНТИ ПАРАЛЕЛЕПІПЕДА

- **Основи**
- **Бічні грані**
- **Ребра**
- **Вершини**
- **Висота**
- **Діагоналі основи**
- **Діагоналі призми**
- **Діагона**лі бічних граней



Діагоналі паралелепіпеда перетинаються в одній точці і точкою перетину діляться пополам.



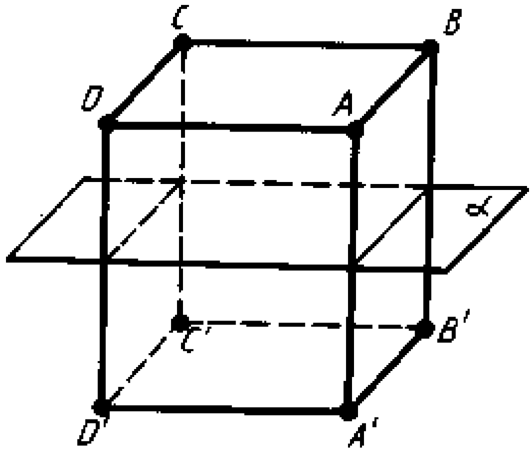
2.2.2. ПРЯМОКУТНИЙ ПАРАЛЕЛЕПІПЕД

Прямий паралелепіпед, у якого основою є прямокутник, називається *прямокутним паралелепіпедом*.

Усі *грані* прямокутного паралелепіпеда — прямокутники.

Прямокутний паралелепіпед, у якого всі ребра рівні, називається *кубом*.

Довжини непаралельних ребер прямокутного паралелепіпеда називаються його *лінійними розмірами (вимірами)*.

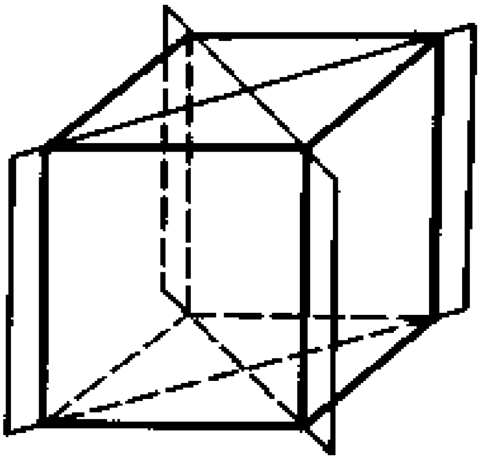


У прямокутного паралелепіпеда три лінійні виміри.

У прямокутному паралелепіпеді квадрат будь-якої діагоналі дорівнює сумі квадратів трьох його вимірів.

У прямокутного паралелепіпеда *центр симетрії* — точка перетину його діагоналей.

Прямокутний паралелепіпед має три *площини симетрії*, які проходять через центр симетрії паралельно граням.



Якщо у паралелепіпеда всі лінійні розміри різні, то він не має інших площин симетрії, крім названих.

Якщо у паралелепіпеда два лінійних розміри однакові, то він має ще дві площини симетрії

Якщо у паралелепіпеда всі лінійні розміри однакові, тобто він є кубом, то площина будь-якого його діагонального перерізу є площиною симетрії.

Таким чином, *куб має дев'ять площин симетрії*.

2.3. ПІРАМІДА

ПОВЕРХНЯ ПІРАМІДИ

ОСНОВА — **МНОГОКУТНИК**

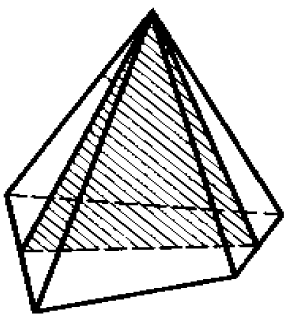
БІЧНА ПОВЕРХНЯ — **ТРИКУТНИКИ**

ЗВИЧАЙНА ПІРАМІДА	• **В ОСНОВІ ЛЕЖИТЬ ДОВІЛЬНИЙ МНОГОКУТНИК**
ПРАВИЛЬНА ПІРАМІДА	• **В ОСНОВІ ЛЕЖИТЬ ПРАВИЛЬНИЙ МНОГОКУТНИК**
ЗРІЗАНА ПІРАМІДА	• **ОДЕРЖАНА В НАСЛІДКУ ПЕРЕРІЗУ ПІРАМІДИ ПЛОЩИНОЮ, ПАРАЛЕЛЬНОЇ ДО ОСНОВИ**

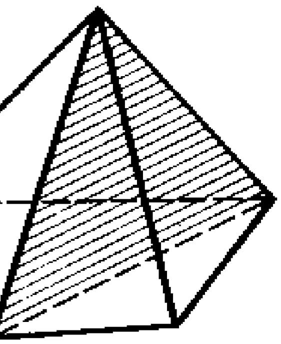
2.3.1. ЕЛЕМЕНТИ ПІРАМІДИ

- **Основа**
- **Бічні грані**
- **Ребра**
- **Вершина**
- **Висота**
- **Діагоналі основи**

ПЕРЕРІЗИ



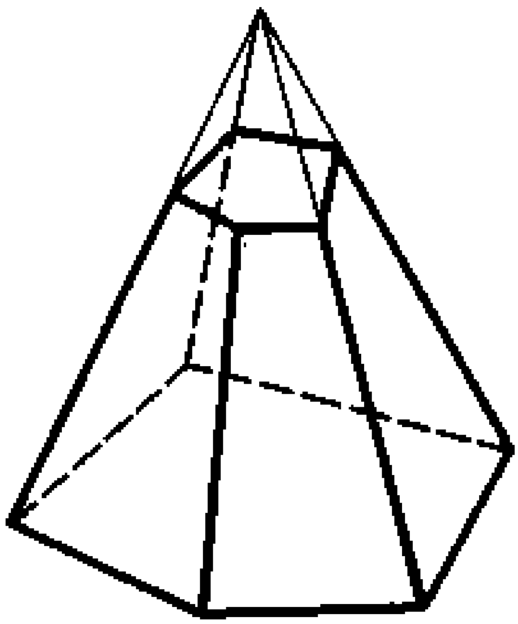
Перерізами піраміди площинами, які проходять через її вершини, є трикутники.



Трикутниками є *діагональні перерізи*. Це перерізи площинами, які проходять через два не сусідніх бічних ребра піраміди

Для побудови перерізу піраміди площиною досить побудувати перерізи її бічних граней із січною площиною.

2.3.2. ЗРІЗАНА ПІРАМІДА



Площина, яка паралельна площині основи піраміди і перетинає її бічні ребра, відтинає від неї подібну піраміду.

Друга частина піраміди — це многогранник, який називається *зрізаною пірамідою*.

Грані зрізаної піраміди, що лежать у паралельних площинах, називаються *основами*; решту граней називають *бічними гранями*.

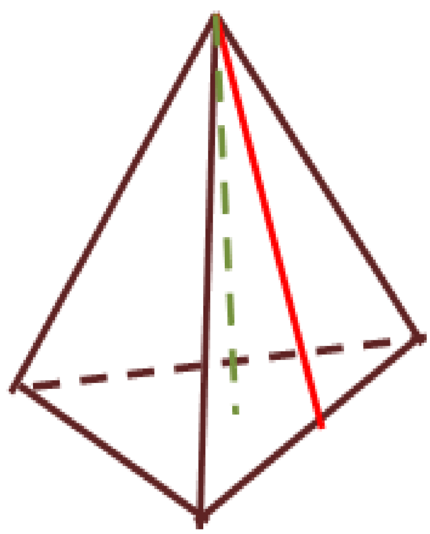
Основи зрізаної піраміди є подібні (більше того, гомотетичні) многокутники.

Бічні грані — *трапеції*.

Висота зрізаної піраміди – це відстань між основами.

2.3.3. ПРАВИЛЬНА ПІРАМІДА

Піраміда називається *правильною*, якщо її основою є правильний многокутник, а основа висоти збігається з центром цього многокутника.



Віссю правильної піраміди називається пряма, яка містить її висоту.

У правильній піраміді бічні ребра рівні, отже, *бічні грані* — рівні рівнобедрені трикутники.

Висота бічної грані правильної піраміди, проведена з її вершини, називається *апофемою*.

Бічною поверхнею піраміди називається сума площ її бічних граней.

Бічна поверхня правильної піраміди дорівнює добутку півпериметра основи на апофему.

Зрізана піраміда, яку дістали з правильної піраміди, також називається правильною.

Бічні грані правильної зрізаної піраміди — рівні рівнобічні трапеції; їх висоти називаються апофемами.

2.4. ПРАВИЛЬНІ МНОГОГРАННИКИ

ТЕТРАЕДР

- **А**
- **РИКУТНИКИ**
- **ВСІ РЕБРА РІВНІ**
- **У КОЖНІЙ ВЕРШИНІ СХОДИТЬСЯ ПО ТРИ РЕБРА**

КУБ

- **АЛЕЛЕПІПЕД**
- **И**
- **ВСІ РЕББРА РІВНІ**
- **У КОЖНІЙ ВЕРШИНІ СХОДИТЬСЯ ПО ТРИ РЕБРА**

ОКТАЕДР

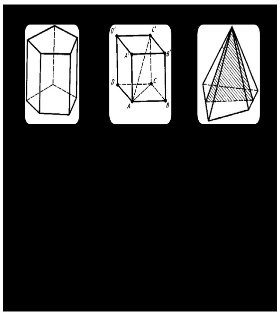
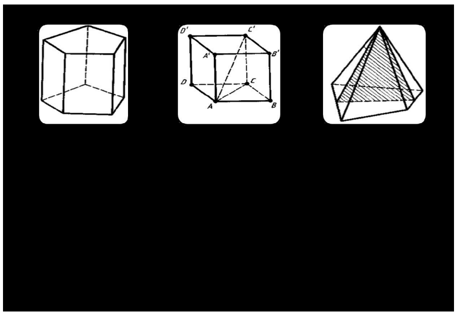
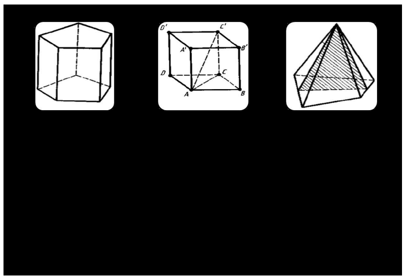
- **НІ ТРИКУТНИКИ**
- **СХОДИТЬСЯ ПО ЧОТИРИ РЕБРА**

ДОДЕКАЕДР

- **НТИКУТНИКИ**
- **СХОДИТЬСЯ ПО ТРИ РЕБРА**

- **ІКОСАЕДР** РИКУТНИКИ
- СХОДИТЬСЯ ПО П’ЯТЬ РЕБЕР

2.5. ПЛОЩІ ПОВЕРХОНЬ ТА ОБ’ЄМНІ МНОГОГРАННИКІВ

		
$S_n = 2S_o + S_Б$ $S_Б = P_o H$ $V = S_o H$	$S_n = 2S_o + S_Б$ $S_Б = P_o H$ $V = abc$	$S_n = S_o + S$ $S = P_o H$ $V = 1/3\ S_o H$

ЗАВДАННЯ до розділу 2. «МНОГОГРАННИКИ»

ТЕСТИ

1. Призма називається правильною, якщо
а) в основі лежить правильний многокутник
б) в основі лежить правильний многокутник і бічні ребра перпендикулярні до основи*
в) бічні ребра перпендикулярні до основи.

2. Призма називається прямою, якщо
а) де які бічні грані прямокутники
б) бічні ребра похилі
в) бічні ребра перпендикулярні до основи. *

3. Призма називається похилою, якщо
а) де які бічні грані прямокутники
б) бічні ребра похилі *
в) бічні ребра перпендикулярні до основи.

4. Бічна поверхня прямої призми дорівнює
а) добутку площі основи на довжину бічного ребра
б) добутку периметра основи на довжину бічного ребра*
в) сумі периметра основи та довжини бічного ребра.

5. Об'єм призми дорівнює
а) добутку площі основи на висоту*
б) добутку периметра основи на висоту
в) сумі площі основи та висоти

6. Паралелепіпед – це призма, в основі якої лежить
а) паралелограм*
б) прямокутник
в) правильний n-кутник

7.Прямокутний паралелепіпед це-паралелепіпед
а) в основі кого лежить прямокутник*
б) в основі кого лежить прямокутник і бічні ребра перпендикулярні до основи
в) бічні ребра перпендикулярні до основи.

8. Куб – це паралелепіпед, у якого
а) всі грані квадрати*
б) в основі якого лежить квадрат

в) в основі якого лежить квадрат і всі бічні ребра похилі.

9. Три виміри прямокутного паралелепіпеда – це довжина
а) ребер, що виходять з однієї вершини*
б) трьох будь-яких ребер
в) паралельних ребер

10. Піраміда називається правильною, якщо
а) в основі лежить правильний n-кутник
б) вершина проектується в центр основи
в) в основі лежить правильний n-кутникі і вершина проектується в центр основи*

11. Правильна трикутна піраміда називається
а) тетраедром*
б) октаедром
в) додекаедром

12. Апофема - це
а) висота піраміди
б) висота бічної грані піраміди
в) висота бічної грані правильної піраміди*

13. Бічна поверхня правильної піраміди дорівнює добутку
а) периметра основи на висоту
б) периметра основи на апофему*
в) периметра основи на висоту бічної грані

14.Об'єм піраміди дорівнює добутку
а) периметра основи на висоту
б) площі основи на висоту
в) третині площі основи на висоту*

15. Об'єм призми дорівнює добутку
а) периметра основи на висоту
б) площі основи на висоту*
в) третині площі основи на висоту.

16. Всі бічні грані зрізаної піраміди – це
а) паралелограми
б) трапеції*
в) трикутники

17. Всі бічні грані піраміди – це
а) паралелограми
б) трапеції
в) трикутники*

18. Об’єм прямого прямокутного паралелепіпеда дорівнює
а) добутку трьох його вимірів*
б) сумі трьох його вимірів
в) добутку будь-яких його ребер

19. Центром симетрії прямого прямокутного паралелепіпеда є
а) точка перетину його діагоналей*
б) будь-яка вершина
в) точка перетину діагоналей основ

20. Многогранник називається правильним, якщо
а) всі його грані є правильними рівними n-кутниками*
б) всі його грані є правильними рівними трикутниками
в) всі його грані є правильними n-кутниками

21. Правильні многокутники називаються
а) Платоновими тілами
б) Піфагоровими тілами
в) Декартовими тулами

22. Зрізана піраміда утворюється в наслідку перетину піраміди
а) площиною, яка паралельна її основі;*
б) будь – якою площиною;
в) площиною, яка проходить через її висоту.

23. При перетині піраміди площиною, яка паралельна її основі, утворюються
а) рівні піраміди
б) подібні піраміди*
в) дві піраміди.

24. Піраміда називається вписаною в призму, якщо
а) її основа збігається з основою призми
б) її вершина належить основі призми
в) її основа збігається з основою призми і вершина належить іншій основі призми*

ТЕСТИ – ЗАДАЧІ

1. Основа прямої трикутної призми – прямокутний трикутник з катетами 3 см і 4 см. Висота призми 10 см. Чому дорівнює площа повної поверхні призми?

а) 132 см2; * б)120 см2; в) 145 см2.

2. Основою піраміди є ромб з діагоналями 6 см і 9 см. Висота піраміди 11 см. Чому дорівнює об’єм піраміди?

а) 99 см3;* Б) 297 см3; В) 325 см3 .

3. Осьовий переріз циліндра квадрат, площа якого 36 см2. Чому дорівнює площа основи циліндра?

а) 9π м2; * Б) 10π м2; В) 32,5 м2

4. Твірна конуса – 10 см, висота – 8 см. Чому дорівнює об’єм конуса?

а) 96π см3; * б) 288π см3; в) 126 см3.

5. У скільки разів збільшиться об’єм кулі, якщо її радіус збільшити у 3 рази?

а) у 9 разів; б) у 27 разів;* в) у 81 раз

6. У скільки разів збільшиться площа бічної поверхні конуса, якщо радіус його основи збільшити у 3 рази?

а) у 9 разів; * б) у 18 разів; в) у 6 разів.

ЗАДАЧІ

§§ 5, 7

1. У прямій трикутній призмі сторони основи дорівнюють 10см, 17см і 21см, а висота призми 18см. Знайдіть площу перерізу, проведеного через бічне ребро і меншу висоту основи.

2. Бічне ребро похилої призми дорівнює 15см і нахилене до площини основи під кутом 30°. Знайдіть висоту призми.

3. У похилій трикутній призмі відстань між бічними ребрами дорівнює 37см, 13см і 40см. Знайдіть відстань між більшою бічною гранню і протилежним бічним ребром призми.

4. Основою призми є правильний шестикутник із стороною *a,* а бічні грані — квадрати. Знайдіть діагоналі призми і площі її діагональних перерізів.

5. У прямій трикутній призмі всі ребра рівні. Бічна поверхня дорівнює 12м2. Знайдіть висоту.

6. Бічна поверхня правильної чотирикутної призми дорівнює 32м2, а повна поверхня 40м2. Знайдіть висоту.

7. Відстані між паралельними прямими, які містять бічні ребра похилої трикутної призми, дорівнюють 2см, 3см і 4см, а бічні ребра 5см. Знайдіть бічну поверхню призми.

8. За стороною основи *a* і бічним ребром *Ь* знайдіть повну поверхню правильної призми: 1) трикутної; 2) чотирикутної; 3) шестикутної.

9. Площина, яка проходить через сторону основи правильної трикутної призми і середину протилежного ребра, утворює з основою кут 45°. Сторона основи *I* Знайдіть бічну поверхню призми.

10. У прямому паралелепіпеді сторони основи 6м і 8м утворюють кут 30°; бічне ребро дорівнює 5м. Знайдіть повну поверхню цього паралелепіпеда.

11. У прямому паралелепіпеді сторони основи З см і 8см; кут між ними 60°. Бічна поверхня дорівнює 220см2. Знайдіть повну поверхню.

12. У прямому паралелепіпеді сторони основи 3см і 5см, а одна з діагоналей основи 4см. Знайдіть більшу діагональ паралелепіпеда, знаючи, що менша діагональ утворює з площиною основи кут 60°.

13. Знайдіть поверхню прямокутного паралелепіпеда за трьома його вимірами: 10см, 22см, 16см.

14. Основа піраміди — прямокутник із сторонами 6см і 8см. Кожне бічне ребро піраміди дорівнює 13см. Обчисліть висоту піраміди.

15. Основа піраміди — прямокутний трикутник з катетами 6см і 8см. Усі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють 60°. Знайдіть висоту піраміди.

16. Основа піраміди — паралелограм, сторони якого 3см і 7см, а одна з діагоналей 6см, висота піраміди проходить через точку перетину діагоналей і дорівнює 4см. Знайдіть бічне ребро піраміди.

17. Основа піраміди — рівнобедрений трикутник із сторонами 40см, 25см і 25см, її висота проходить через вершину кута, протилежного стороні 4см і дорівнює 8см. Знайдіть бічну поверхню піраміди.

18.Основа піраміди - квадрат, її висота проходить через одну з вершин основи. Знайдіть бічну поверхню піраміди, якщо сторона основи дорівнює 20 дм, а висота 21 дм 48. У чотирикутній зрізаній піраміді сторони однієї основи до-рівнюють 6, 7, 8, 9см, а менша сторона другої основи дорівнює 5см. Знайдіть решту сторін цієї основи.

19. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 7см, а сторона основи 8см. Знайдіть бічне ребро.

20. У правильній чотирикутній піраміді бічна поверхня дорівнює 14,76м2, а повна поверхня 18м2. Знайдіть сторону основи і висоту піраміди.

21. Знайдіть сторону основи і апофему правильної трикутної піраміди, якщо її бічне ребро дорівнює 10см, а бічна поверхня дорівнює 144 см2.

22. У правильній чотирикутній піраміді знайдіть сторону основи, якщо бічне ребро дорівнює 5см, а повна поверхня 16 см2.

23. Висота правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнює 7см. Сторони основ дорівнюють 10см і 2см. Знайдіть бічне ребро піраміди.

24. Сторони основ правильної зрізаної трикутної піраміди 4 дм і 1 дм. Бічне ребро 2 дм. Знайдіть висоту піраміди.

25. Три латунних, куби з, ребрами 3см, 4см і 5см переплавлено в один куб. Яке ребра цього куба?

26. Металевий куб має зовнішнє ребро 10,2см. і масу 514,15г. Товщина стінок дорівнює. 0,1см. Знайдіть густину металу, з якого виготовлено куб.

27. Якщо кожне ребро куба збільшили, на 2см, то його об'єм збільшиться на 98см. Яка довжина ребра куба?

28. Якщо кожне ребро куба збільшити на 1м, то його об'єм збільшиться у 125 разів. Знайдіть ребро.

29. Виміри прямокутного бруска 3см, 4см і 5см. Якщо збіль-шити кожне ребро на х сантиметрів, то поверхня збільшиться на 54 см2. Як збільшиться його об'єм?

30.У прямому паралелепіпеді сторони основи 2см і 5см утворюють кут 45°. Менша діагональ паралелепіпеда дорівнює 7см. Знайдіть його об'єм.

31.Основа прямого паралелепіпеда — ромб, площа якого 1м2. Площі діагональних перерізів 3м і 6м2. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

32.Бічні ребра похилої трикутної призми дорівнюють 15 м, а відстань між паралельними прямими, які містять ребра, 26 м, 25 м і 17 м. Знайдіть об'єм призми.

33. У прямій трикутній призмі сторони основи дорівнюють 4см, 5 см і 7см, а бічне ребро дорівнює більшій висоті основи. Знайдіть об'єм призми.

34.Основа призми — трикутник, в якому одна сторона дорів-нює 2см, а дві інші по 3см. Бічне ребро дорівнює 4см і утворює з площиною основи кут 45°. Знайдіть ребро рівновеликого куба

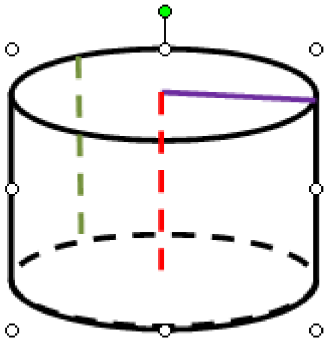
РОЗДІЛ 3. ТІЛА ОБЕРТАННЯ

3.1. ЦИЛІНДР

Циліндром називається тіло, що складається з двох кругів, які не лежать на одній площині і суміщаються паралельним перенесенням, і всіх відрізків, що сполучають відповідні точки цих кругів.

Круги називаються *основами* циліндра, а відрізки, що сполучають точки кіл кругів,— *твірними* циліндра.

ЕЛЕМЕНТИ ЦИЛІНДРА

• **Основи** • **Бічна поверхня** • **Твірні**		• **Висота** • **Вісь** • **Радіус**

ВЛАСТИВОСТІ

Основи циліндра рівні

Основи циліндра лежать в паралельних площинах

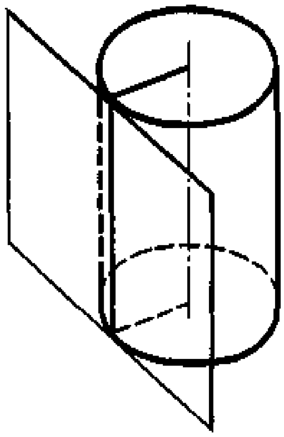
Твірні циліндра паралельні і рівні

ПЕРЕРІЗИ

ОСЬОВИЙ ПЕРЕРІЗ: проходить через вісь – прямокутник

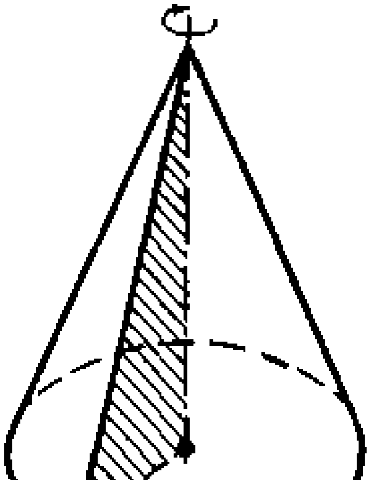
ПЕРЕРІЗ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНИЙ ДО ОСІ – круг

Площа, паралельна площині основи конуса, перетинає конус по кругу, а бічну поверхню – по колу з центром на осі



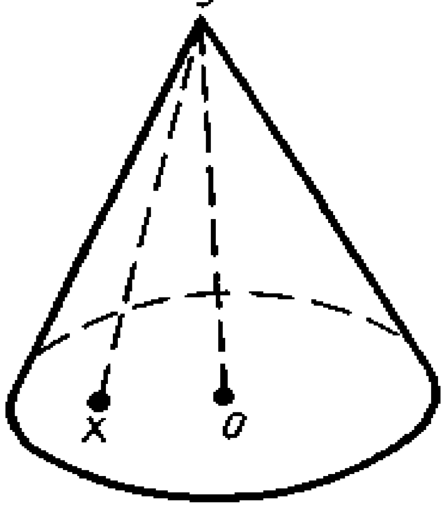
Дотичною площиною до циліндра називається площина, яка проходить через твірну циліндра і перпендикулярна до площини осьового перерізу, що містить цю твірну

3.2. КОНУС



Конусом називається тіло, яке складається з круга – *основи* конуса, точки, яка не лежить в основі цього круга – *вершини* конуса і всіх відрізків, що сполучають вершину конуса з точками основи.

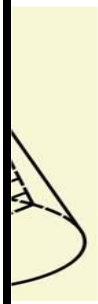
Відрізки, що сполучають вершину конуса з точками кола основи, називаються твірними конуса.



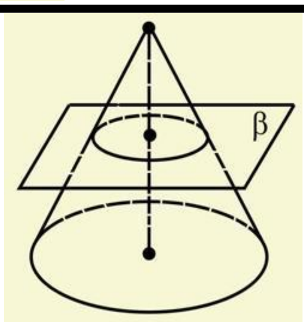
ЕЛЕМЕНТИ КОНУСА

- **Основа**
- **Вершина**
- **Бічна поверхня**
- **Висота**
- **Твірна**
- **Вісь**

ПЕРЕРІЗ КОНУСА ПЛОЩИНОЮ, яка проходить через його вершину і основу – рівнобедрений трикутник

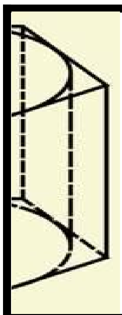


ОСЬОВИЙ ПЕРЕРІЗ: проходить через вісь конуса – рівнобедрений трикутник



Площа, паралельна площині основи конуса, перетинає конус по кругу, а бічну поверхню – по колу з центром на осі

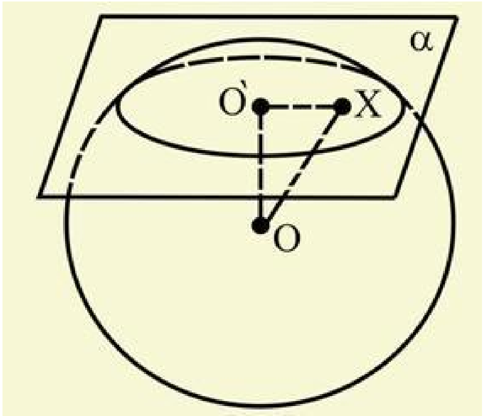
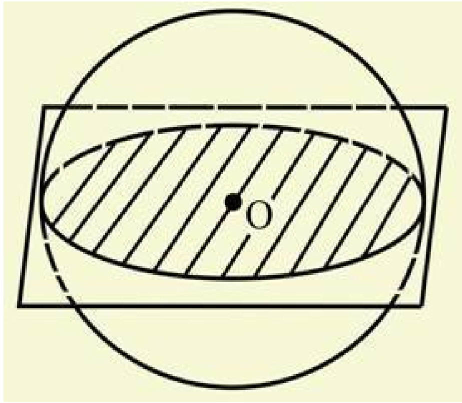
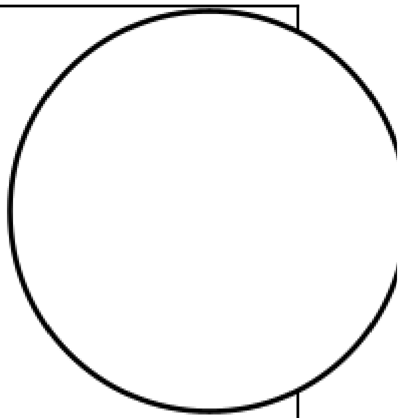
3.3. ВПИСАНА ТА ОПИСАНА ПРИЗМА



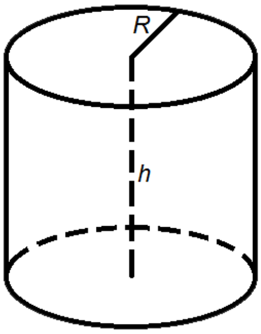
ВПИСАНА ПРИЗМА: бічні грані – дотичні до бічної поверхні

ВПИСАНА ПРИЗМА: бічні ребра – дотичні до бічної поверхні циліндра

3.4. КУЛЯ

		
Кулею називається тіло, що складається з усіх точок простору, які знаходяться від даної точки на відстані не більш за дану. Ця точка називається центром кулі, а відстань – радіусом. Відрізок, що сполучає дві точки кульової поверхні і проходять через центр кулі, називається діаметром. Поверхня кулі називається сферою.	Площина, яка проходить через центр кулі, називається діаметральною площиною. Переріз кулі діаметральною площиною називається великим кругом , а переріз сфери – великим колом.	Будь-який переріз кулі площиною є круг. Центр цього круга є основою перпендикуляра, опущеного з центра кулі на січну площину

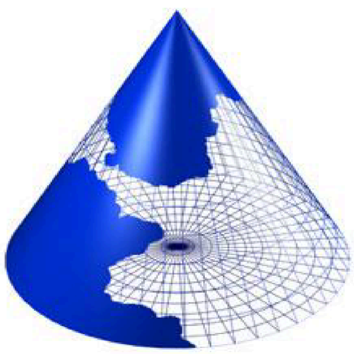
3.5. ПЛОЩІ ПОВЕРХОНЬ ТА ОБ’ЄМИ



Площа повної поверхні циліндра дорівнює сумі площ його бічної поверхні та його основ:

$$Sp = 2\pi R(h + R)$$

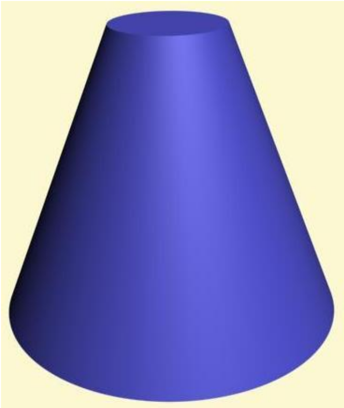
Об’єм циліндра дорівнює добутку площі його основи на висоту.



$$V = \pi R^2 h = \pi \frac{d^2}{4} h \quad V = \pi R^2 h = \pi \frac{d^2}{4} h$$

Де *d* — діаметр основи; *R* — радіус основи

Площа бічної поверхні конуса дорівнює де R — радіус основи, *L*— довжина твірної.

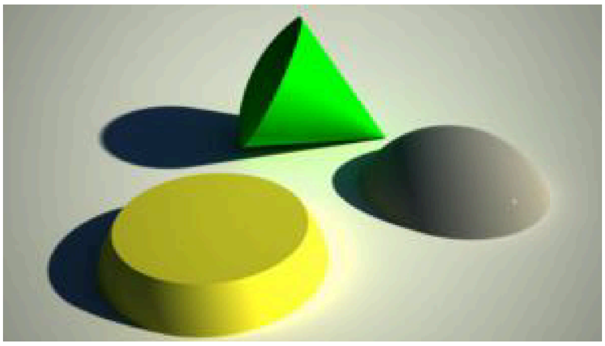


Об’єм конуса дорівнює третині добутку площі його основи на висоту.

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H \quad V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

Площа бічної поверхні зрізаного конуса дорівнює

$S_б$ =(R1+R2)l .



Об’єм зрізаного конуса дорівнює третині добутку висоти конуса на константу π і на суму квадратів радіусів кожної основи і добутку радіусів основ конуса.

Об’єм кулі визначається за формулою:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^2$$

Кульовим сегментом називається частина кулі, яка відсікається від кулі площиною.

Об’єм кульового сегменту дорівнює:

$$V = \pi h 2 \left(R - \frac{h}{3}\right)$$

Кульовим сектором називається тіло, яке одержуємо з кульового сегменту і конусу таким чином: якщо кульовий сегмент менший від півкулі, то кульовий сегмент доповнюється конусом, у якого вершина в центрі кулі, а основою є основа сегмента.

Якщо ж сегмент більший від півкулі, то конус із нього виймається. Об’єм кульового сектору одержуємо додаванням або відніманням відповідних сегмента і конуса. Об’єм кульового сектора знаходимо за формулою

V = 2 / 3πR2h.

Сегмент

Сегмент кулі — це та її частина, що утворюється внаслідок перерізу площиною. Основними величинами, які характеризують сегмент, є радіус кулі *R* та довжина перпендикуляра, опущеного на центр перерізу зі сфери, *H*. Довжина цього перпендикуляра також дорівнює різниці між радіусом *R* і відстанню від центра до перерізу *l*, тобто $H = R - l$. Таким чином об'єм сегмента дорівнює.

$$V = \frac{1}{3}\pi H^2\ (3R - H)$$

а площа поверхні

$$S = 2\pi \mathrm{RH}$$

Зріз

Зріз — це стереометричне тіло, утворене перерізами кулі двома паралельними площинами. Він характеризується такими величинами:

- Радіус відповідної кулі, *R*;
- Відстань між двома перерізами, *H*;
- Радіуси обох перерізів, *r*1,*r*2.

Об'єм зрізу знаходиться за формулою ,

$$V = \frac{1}{6}\pi H^3 + \frac{1}{2}\pi\ (r_1^2 + r_2^2)H$$

а площа поверхні — $S = 2\pi \mathrm{RH}$

Сектор

Сектор складається з кульового сегмента та конуса, основа якого збігається з основою сегмента, а вершина — з центром кулі. Сектор характеризують радіус кулі *R* та довжина перпендикуляра, опущеного на центр основи конуса зі сфери, *H*. Об'єм сектора:

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 H$$

Площа його поверхні: $\pi R(2H + \sqrt{2HR - H^2})$

Поверхня кулі визначається за формулою

$$S = 4\pi R^2$$

ЗАВДАННЯ до розділу 3. ТІЛА ОБЕРТАННЯ

ТЕСТИ

1. Циліндр – це тіло, яке утворено в наслідку обертання
а) прямокутника навколо однієї з його сторін*
б) прямокутного трикутника навколо одного з його катетів
в) круга навколо його діаметра.

2. Відрізки, що утворюють бічну поверхню циліндра називаються
а) апофемами
б) твірними*
в) ребрами.

3. Циліндр називається прямим, якщо
а) твірні перпендикулярні до основи*
б) твірні похилі
в) інша відповідь.

4. Осьовий переріз циліндра – це
а) прямокутник*
б) трикутник
в) прямокутний трикутник.

5. В основі циліндра лежить
а) коло
б) круг*
в) овал.

6. Об'єм циліндра дорівнює добутку
а) периметра основи на висоту
б) площі основи на висоту*
в) третині площі основи на висоту.

7. Бічна поверхня циліндра дорівнює
а) добутку площі основи на висоту
б) добутку периметра основи на висоту*
в) сумі периметра основи та висоти.

8. Конус – це тіло,яке утворено в наслідку обертання
а) прямокутника навколо однієї з його сторін
б) прямокутного трикутника навколо одного з його катетів*

в) круга навколо його діаметра.

9. Відрізки, що утворюють бічну поверхню конуса називаються
а) апофемами
б) твірними*
в) ребрами.

10. Конус називається прямим, якщо
а) вершина проектується в центр основи*
б) перерізом є прямокутний трикутник
в) твірні різної довжини.

11. Осьовий переріз конуса – це
а) прямокутник
б) трикутник*
в) прямокутний трикутник.

12. В основі конуса лежить
а) коло
б) круг*
в) овал.

13. Об’єм конуса дорівнює добутку
а) периметра основи на висоту
б) площі основи на висоту
в) третині площі основи на висоту*.

14. Бічна поверхня конуса дорівнює
а) добутку площі основи на висоту
б) половині добутку довжини кола основи на твірну*
в) сумі периметра основи та висоти.

15. Твірними конуса називаються відрізки, що
а) сполучають вершину конуса з точками на колі основи*
б) сполучають вершину конуса з точками основ
в) сполучають вершину конуса з будь-якою точкою конуса.

16. Куля – це тіло,яке утворено в наслідку обертання
а) прямокутника навколо однієї з його сторін
б) прямокутного трикутника навколо одного з його катетів
в) круга навколо його діаметра*

17. Великим кругом називається переріз, що проходить через
а) діаметр кулі*
б) будь-яку хорду кулі
в) будь-яку точку на поверхні кулі.

18. Площина називається дотичною до кулі, якщо вона проходить через
а) будь-яку хорду кулі
б) будь-яку точку на поверхні кулі*
в) через центр кулі.

19. Перерізом кулі площиною є
а) коло
б) круг*
в) овал.

20) Радіус будь-якого перерізу кулі
а) не більше радіуса кулі*
б) більше радіуса кулі
в) менше радіуса кулі.

21) Об’єм кулі залежить від її
а) радіуса*
б) будь-якої хорди
в) дотичної.

22. Поверхня кулі залежить від її
а) радіуса*
б) будь-якої хорди
в) дотичної.

23. Конус називається вписаним в циліндр, якщо
а) основа співпадає з основою циліндра
б) вершина лежить на основі циліндра
в) вершина лежить на основі циліндра і основа співпадає з іншою основою циліндра*.

24. Циліндр називається вписаним в конус, якщо
а) основа лежить на основі конуса
б) основа перетинає бічну поверхню конуса
в) одна основа лежить на основі конуса, а інша перетинає бічну поверхню конуса*.

ТЕСТИ – ЗАДАЧІ

1. Основа осьового перерізу прямого конуса дорівнює 24 дм, а кут при його вершині - 120˚. Знайдіть об'єм конуса:

а) 192π дм3; б) 576π дм3; * в) 1152π дм3

2. Площа осьового перерізу циліндра дорівнює 20см2. Знайдіть площу бічної поверхні циліндр, якщо його висота – 2см:

а) 20π см2; * б) 40π см2; в) 100π см2.

3. Куля дотикається до сторін прямого двогранного кута. Знайдіть об'єм кулі. Якщо хорда, що з'єднує точки дотику, дорівнює дм:

а) 52π дм3; б) 36π дм3 ;* в) 32π дм3

4. Дві рівні сфери радіуса 8см проходять через центри одна одної. Знайдіть площу плоскої фігури. Обмеженою лінією перетину сфер:

а) 48π см2; * б) 98π см2; в) 148π см2;

ЗАДАЧІ
§ 6

1. Радіус основи циліндра 2м, висота 3м. Знайдіть діагональ осьового перерізу.

2. Осьовий переріз циліндра — квадрат, площа якого Q. Знайдіть площу основи циліндра.

3. Висота циліндра 6см, радіус основи 5 см. Знайдіть площу перерізу, проведеного паралельно осі циліндра на відстані 4 м від неї.

4. Висота циліндра 8 дм, радіус основи 5 дм. Циліндр перетнуто площиною так, що у перерізі утворився квадрат. Знайдіть відстань від цього перерізу до осі (мал. 464).

5. Радіус основи конуса 3м, висота 4м. Знайдіть твірну. 10. Твірна конуса *I* нахилена до площини основи під кутом 30°. Знайдіть висоту.

6. Радіус основи конуса *R.* Осьовий переріз конуса — прямо-кутний трикутник. Знайдіть його площу.

7. Висота конуса 20, радіус його основи 25. Знайдіть площу перерізу, проведеного через вершину, якщо відстань від нього до центра основи конуса дорівнює 12.

8. Радіуси основ зрізаного конуса 3м і 6м, висота 4м. Знайдіть твірну.

9. Радіуси основ зрізаного конуса *R* і *r,* твірна нахилена до основи під кутом 45°. Знайдіть висоту.

10. Твірна зрізаного конуса дорівнює *2a* і нахилена до основи під кутом 60°. Радіус однієї основи вдвічі більший від радіуса другої основи. Знайдіть кожний з радіусів.

11. Радіуси основ зрізаного конуса 3 дм і 7 дм, твірна 5 дм. Знайдіть площу осьового перерізу.

12. Кулю, радіус якої 41 дм, перетнуто площиною на відстані 9 дм від центра. Знайдіть площу перерізу.

13. Через середину радіуса кулі проведено перпендикулярно до нього площину. Як відноситься площа утвореного перерізу до площі великого круга?

14. Радіус кулі *R*. Через кінець радіуса проведено площину під кутом 60° до нього. Знайдіть площу перерізу.

15. Діаметр кулі 2 см. На її поверхні дано точку *A* і коло, всі точки якого віддалені (по прямій лінії) від *A* на 15 см. Знайдіть радіус цього кола.

16. Дано кулю радіуса *R*. Через одну точку її поверхні проведено дві площини: перша — дотична до кулі, друга — під кутом 30° до першої. Знайдіть площу перерізу.

17. Куля радіуса *R* дотикається до всіх сторін правильного трикутника із стороною *a.* Знайдіть відстань від центра кулі до площини трикутника.

18. Сторони трикутника 13см, 14см і 15см. Знайдіть відстань від площини трикутника до центра кулі, яка дотикається до всіх сторін трикутника. Радіус кулі 5см. Знайдіть радіус кулі, описаної навколо куба із стороною а.

§8

1. Насос, який подає воду в паровий котел, має два водяних циліндри. Діаметри циліндрів 80мм, а хід поршня 150мм. Чому дорівнює годинна продуктивність насоса, якщо кожний поршень робить 50 робочих ходів за хвилину?

2. Свинцева труба (густина свинцю 11,4 г/см3) з товщиною стінок 4 мм має внутрішній діаметр 13мм. Яка маса 25м цієї труби?

3. Купа щебеню має конічну форму, радіус основи якої 2м, а твірна 3,5м. Знайдіть об'єм купи щебеню.

4. Осьовим перерізом конуса є рівнобедрений прямокутний трикутник, площа якого 9м2. Знайдіть об'єм конуса.

5. Довжина твірної конуса дорівнює *I,* а довжина кола основи *с.* Знайдіть об'єм конуса.

6. 25 м мідного дроту мають масу 100,7 г. Знайдіть діаметр дроту (густина міді 8,94 г/см3).

7. Твірна конуса *l* утворює з площиною основи кут а. Знайдіть об'єм конуса.

8. Стіжок сіна має форму циліндра з конічним верхом. Радіус його основи 2,5м, висота 4м, причому циліндрична частина стіжка має висоту 2,2м. Густина сіна 0,03 г/см3. Визначте масу стіжка сіна.

9. Рівносторонній трикутник обертається навколо своєї сторони *а.* Знайдіть об'єм утвореного тіла обертання.

10.Знайдіть об'єм зрізаного конуса, у якого радіуси основи *R* г (г < *R),* а висота *h.*

11. Соснова колода довжиною 15,5м має діаметри кінців 42см і 25см. Яку помилку (у відсотках) допускають, обчислюючи об'єм колоди, при множенні довжини на площу поперечного перерізу по середині колоди?

12. Площа осьового перерізу зрізаного конуса дорівнює різниці площ основ,а радіуси основ *R* і r. Знайдіть об'єм цього конуса.

13. За даними радіусами основ *R* і г*, з*найдіть відношення об'ємів зрізаного конуса і повного конуса.

14. Чавунна куля регулятора має масу 10кг. Знайдіть діаметр кулі (густина чавуну 7,2 г/см3).

15. Потрібно переплавити в одну кулю дві чавунні кулі діаметрами 25см і 35см. Знайдіть діаметр нової кулі.

16. Маємо шматок свинцю масою 1кг. Скільки кульок діаметром 1см можна відлити із цього шматка? (Густина свинцю11,4 г/см3).

17. Зовнішній діаметр порожнистої кулі 18см. Товщина стінок 3 см. Знайдіть об'єм матеріалу, з якого виготовлено кулю.

18.Яку частину об'єму кулі становить об'єм кульового сегмента, у якого висота дорівнює 0,1 діаметра кулі?

19. Чому дорівнює об'єм кульового сектора, якщо радіус кола його основи дорівнює 60см, а радіус кулі дорівнює 75 см?

20. Круговий сектор з кутом 30° і радіусом R обертається навколо одного з бічних радіусів. Знайдіть об'єм утвореного тіла.

21. Циліндрична димова труба діаметром 65см має висоту 18м. Скільки жерсті треба для її виготовлення, якщо на заклепку іде 10 % матеріалу?

22. Напівциліндричне склепіння підвалу має 6м довжини і 5,8м в діаметрі. Знайдіть повну поверхню підвалу.

23. З круглого листа металу виштампували циліндричний стакан діаметром 25см і висотою 50см. Припустимо, що площа листа при штампуванні не змінилась. Знайдіть діаметр листа.

24. У циліндрі площа основи дорівнює Q, а площа осьового перерізу М. Чому дорівнює повна поверхня циліндра?

25. Конусоподібну палатку висотою 3,5м і діаметром основи 4м покрито тканиною. Скільки квадратних метрів тканини пішло на палатку?

26. Дах силосної башти має форму конуса. Висота даху 2м, діаметр башти 6м. Знайдіть поверхню даху.

27. Площа основи конуса S, а твірні нахилені до основи під кутом а. Знайдіть бічну поверхню конуса.

28. Як відносяться між собою бічна і повна поверхні рівностороннього конуса (у перерізі правильний трикутник)?

29. Півкруг згорнуто у конічну поверхню. Знайдіть кут між твірною і віссю конуса.

30. Радіус кругового сектора дорівнює 3м, його кут 120°. Сектор згорнуто у конічну поверхню. Знайдіть радіус основи конуса.

31. Скільки квадратних метрів латунного листа потрібно, щоб зробити рупор, у якого діаметр одного кінця 0,43м, другого — 0,036м, а твірна 1,42м?

ЛІТЕРАТУРА

1. Погорєлов О. В., Геометрія. Стереометрія: Підруч. для 10-11 кл. серед. шк. – 4-те вид. – К.: Освіта, 1998, -18-99 с.

2. Бевз Г.П. Методика розв'язування стереометричних задач. - К.: «Радянська школа», 1988.- 49-143 с.

3. Гольдберг Я.Е. С чего начинается решение стереометрической задачи. – К.:«Радянська школа», 1990.- 21-43 с.

4. Полонский В.Б., Рабинович Е.М., Якир М.С. Учимся решать задачи по геометрии.— К.: «Магистр-S», 1996. — 256 с.

5. Сержук С.В., Сержук А.М. Комбініції геометричних тіл. Міні-підручник. Ж. Математика в школах України, №7. - 2008. 9-13 с.

6. Чехова А.М. Геометрія в таблицях, 7-11 кл.: Навч. посіб. – Х.: Науково-методич. центр, 2003. – 115 с.

7. Роганін О.М. Геометрія, 11кл.: Плани-конспекти уроків. – Х. «Веста»: «Ранок», 2004. – 245-247 с.

8. Бевз Г.П. та інші. Геометрія: Підручник для 10 – 11 кл. загальноосвітніх навчальних закладів. – К.: Вежа, 2004,-15-82с.