ثانوية أجيال المستقبل الخاصّة (باتنة).

السنة الثالثة : العلوم التجريبية أكتوبر 2018

فرض محروس رقم 1 (رياضيات) المدّة : ساعة .

- **السّؤال الأوّل :4 ن**

1) ذكّر بمبرهنة القيم المتوسّطة 2ن

2) f هي الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^5-5x+2$

بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلاّ في المجال $]0;1[$ 2ن

- **السّؤال الثّاني :5 ن**

الجدول أسفله هو جدول تغيّرات دالة معرّفة على $\mathbb{R}^*$

x	$-\infty$	-1		0	1	2	4	$+\infty$
$f(x)$	1	0	$-\infty$	$+\infty$	0	-3	0	1

1) حدّد إشارة الدّالة f 2ن

2) أجب إمّا " صحيح " وإمّا " خطأ" عن كلّ ممّا يلي (مع التعليل) :

- المعادلة $f(x)=1$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}^*$ .....1 ن
- المعادلة $f(x)=-3$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}^*$ 1ن
- صورة المجال $[1;2]$ هو المجال $[-3;+\infty[$ ..... 1 ن

- **السّؤال الثّالث :3ن**

f ؛ g و h دوال معرّفة علي $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\left(x^2+x\right)^7$ ؛ $g(x)=x^2-x$ و $h(x)=2x+1$

عيّن عبارة $f'(x)$ و $(g\circ h)'(x)$ من اجل كلّ x من $\mathbb{R}$ . .....x2(1,5)

ن

- **السّؤال الرّابع :4 ن**

أدرس نهاية الدّالة f عند القيمة x_0 في الحالتين :

1) $f(x)=\sqrt{x^2+2x}-x$ و $x_0=+\infty$ 2ن

2) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^3-1}$ و $x_0=1$ 2ن

- **السّؤال الخامس :4ن**

f هي الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}-\{-2\}$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^2+3x+1}{x+2}$

(C_f) هو التّمثيل البياني للدّالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد

والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]$ 2ن

2) فسّر بيانيا النتيجة المحصّل عليها 2ن

الحلّ المفصّل للفرض المحروس

السّؤال الأوّل :

1) نذكّر بمبرهنة القيم المتوسطة.

إذا تحقّق الشرطان الآتيان معا :

f دالة مستمرّة علي مجال مغلق $[a;b]$.

λ ثابت حقيقي محصور بين $f(a)$ و $f(b)$.

فإنّه يوجد على الأقل عدد c من المجال $[a;b]$ حيث $f(c)=\lambda$.

2) نبيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $]0;1[$.

لدينا ما يلي :

(1) f دالة كثير حدود فهي مستمرة على $\mathbb{R}$ وبالأخصّ على المجال $[0;1]$.

(2) $f(0)=2$ ؛ $f(1)=-2$ أي $f(0)\times f(1)<0$.

من (1) و (2) وحسب مبرهنة القيم المتوسطة :

المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا x_0 في المجال $]0;1[$.

السّؤال الثّاني :

1) تحديد إشارة الدّالة f .

اعتمادا على جدول التغيّرات وبما أن :

$f(-1)=f(1)=0$ فإنّ إشارة f على $\mathbb{R}^*$ تكون ممثّلة في الجدول الموالي :

x	-1		0		1		4	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$	$+$	0	$-$	0	$+$

2) الإجابة إمّا صحيح وإما خطأ

- $f(]-\infty;0[)=]-\infty;1[$ و $1\notin]-\infty;1[$ إذا :

المعادلة $f(x)=1$ لا تقبل حلا في المجال $]-\infty;0[$

- $f(]0;2])=[-3;+\infty[$ و $1\in[-3;+\infty[$ إذا المعادلة $f(x)=1$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]0;2]$ ..

- $f([2;+\infty[)=[-3;1[$ و $1\notin[-3;1[$ إذا :

المعادلة $f(x)=1$ لا تقبل حلا في المجال $[2;+\infty[$.

المعادلة $f(x)=1$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}^*$ **(صحيح)**

- $f(]-\infty;0[)=]-\infty;1[$ و $(-3)\in]-\infty;1[$.

ومنه : المعادلة $f(x)=-3$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]-\infty;1[$ ثمّ $f(2)=-3$ وبالتّالي :

المعادلة $f(x)=-3$ تقبل حل وحيدا في $\mathbb{R}^*$ **(خطأ)**

- $f([1;2])=[-3;0]$ أي : $f([1;2])=[-3;+\infty[$ **(خطأ)**

السّؤال الثّالث:

تعيين عبارة $f'(x)$ و $(g\circ h)'(x)$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$.

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا :

- $f'(x)=7(2x+1)(x^2+x)^6$.

- $(g\circ h)'(x)=h'(x)\times g'[h(x)]$.

وبالتّالي : $\begin{cases} h'(x)=2 \\ g'(x)=2x-1 \end{cases}$

$$(g\circ h)'(x)=2\times\left[2(2x+1)-1\right]$$

$$=8x+2$$

السّؤال الرّابع :

دراسة نهاية الدّالة f عند x_0 في الحالتين :

1) $f(x)=\sqrt{x^2+2x}-x$ و $x_0=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ldots ? \begin{cases} x^2+2x\to+\infty \\ (-x)\to-\infty \end{cases}$$

لدينا حالة عدم التّعيين من الشكل $(+\infty-\infty)$.

نزيل هذه الحالة .

في جوار $+\infty$ (أي $x>0$) يمكن أن نكتب :

$$f(x)=\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)}$$

$$=\frac{2x}{\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)}$$

$$=\frac{2x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)}+x}$$

$$=\frac{2x}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}}+x}$$

وبما أن $x>0$ فإنّ $|x|=x$ وعليه :

$$f(x)=\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1} \quad \text{أي} \quad f(x)=\frac{2x}{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1\right)}$$

بالانتقال إلى النهاية نجد :

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$ لأن $\frac{2}{x}\to 0$

2) $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^3-1}$ و $x_0=1$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\ldots ? \begin{cases} \left(x^2-3x+2\right)\to 0 \\ \left(x^3-1\right)\to 0 \end{cases}$$

.

لدينا حالة عدم التعيين من الشّكل $\frac{0}{0}$.

نزيل هذه الحالة .

كل من كثيري الحدود يقبل القسمة على $(x-1)$.

$$\begin{array}{r|l} x^2-3x+2 & x-1 \\ \hline -x^2+x & x-2 \\ \hline -2x+2 & \\ 2x\quad 2 & \\ \hline 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} x^3-1 & x-1 \\ \hline -x^3+x^2 & x^2+x+1 \\ \hline x^2-1 & \\ x^2\ \ x & \\ \hline x-1 & \\ -x+1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

في هذه الحالة : $f(x)=\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}$.

بالانتقال إلى النهاية نجد :

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x-2}{x^2+x+1}$$

$$=-\frac{1}{3}$$

وبالمثل $\lim_{x\to 1} f(x)=-\frac{1}{3}$ أي

f تقبل نهاية عند القيمة 1 : $\lim_{x\to 1} f(x)=-\frac{1}{3}$.

السّؤال الخامس :

1) حساب $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=$.

لدينا :

$$f(x)-(x+1)=\frac{x^2+3x+1}{x+2}-(x+1)$$

$$=\frac{x^2+3.x+1-(x+2)(x+1)}{x+2}$$

$$=\frac{-1}{x+2}$$.

ومنه : $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{x+2}\right)$

$= 0$

2) التفسير البياني للنتيجة.

في جوار $+\infty$ المستقيم المعرّف بالمعادلة $y = x + 1$

هو مستقيم مقارب لـ (C_f)