Guía Matemática 2do Año #3

Multiplicación de polinomios

y productos notables

Guía introductoria elaborada por el profesor Joel Fariñez

Esta guía servirá de introducción al tema de multiplicación de polinomios y de productos notables, estos contenidos pueden ser ampliados y reforzados acudiendo a la bibliografía recomendada en la guía instruccional en donde se menciona: Leer, analizar e interpretar lo referente a la multiplicación de polinomios del Álgebra de Baldor capítulo 4 secciones desde la 50 hasta la 63 y también complementar dicho estudio con el libro de Matemática 8vo de los autores Estrella Suárez Bracho y Darío Durán Cepeda de la editorial Santillana páginas desde la 145 hasta la 154. Leer, analizar e interpretar lo referente a los productos notables Álgebra de Baldor capítulo 6 secciones 86, 87, 88, 89, 90 y 91 y complementar dicho estudio con el libro de Matemática 8vo de los autores Estrella Suárez Bracho y Darío Durán Cepeda de la editorial Santillana páginas desde la 157 hasta la 167.

Primera Parte

Multiplicación de polinomios

Caso 1. Multiplicación de monomios

Empezamos con el caso más sencillo que es multiplicación de monomios, en donde solo se tiene que tener en cuenta que se multiplican los coeficientes y se sumas los exponentes de las potencias de igual base, veamos unos ejemplos.

$5x^5 \cdot 4x^8 = 20x^{5+8} = 20x^{13}$ como se ve en el ejemplo se multiplicaron los coeficientes y se sumó los exponentes de las potencias de igual base, veamos otro ejemplo pero con dos variables

$4xy^7 \cdot 5x^2y^4 \cdot 3x^5y = 60x^{1+2+5} \cdot y^{7+4+1} = 60x^8y^{12}$ como se observa aquí también se multiplicaron los coeficientes que en este caso son 4, 5 y 3, y además se sumó los exponentes de igual base, la suma de los exponentes se puede también realizar de forma directa, es decir, colocando de una vez el resultado, lo cual se verá en las siguientes secciones.

Caso 2. Multiplicación de un monomio por un polinomio
En este caso se procede de manera similar al anterior solo que hay que multiplicar el monomio dado por cada uno de los términos del polinomio en cuestión. Veamos un ejemplo que aclarará esta explicación.

$$4x^2\left(5x^3 - 7x^2 - 9x + 5\right) = 20x^5 - 28x^4 - 36x^3 + 20x^2$$

aquí la multiplicación se hizo de forma directa el 4 pasó a multiplicar al 5, 7, 9 y 5 respectivamente y los exponentes se sumaron con el exponente del monomio, es decir, 2+3, 2+2, 2+1, recuerda que cuando una variable no tiene exponente se sobreentiende que es 1, y por último el término independiente queda multiplicado también por el monomio quedando $20x^{2}$.

Veamos otro ejemplo

$$-5x^2y^3\left(7x^4y + 8x^3y^2 - 9x^2y^3 + 7xy^4\right) = -35x^6y^4 - 40x^5y^5 + 45x^4y^6 - 35x^3y^7$$

Aquí se trata de un monomio de dos variables x e y, el procedimiento es el mismo el -5 multiplicó a cada coeficiente de los respectivos términos del polinomio y se sumaron los exponentes de igual base en cada caso, en el caso de las x dichas sumas fueron 2+4, 2+3 y 2+1 respectivamente y en el caso de las y las sumas fueron 3+1, 3+2 y 3+4 respectivamente.

Caso 3. Multiplicación de dos binomios
En este caso al tratarse de la multiplicación de dos binomios el procedimiento se realiza forma similar a los anteriores, solo que haya que tener en cuenta que de ser necesario hay que operar términos semejantes, sumar o restar según sus signos, a fin de simplificar el resultado final, eso

siempre y cuando hayan términos semejantes sino se deja el resultado tal cual como está, vemos unos ejemplos.

$$(4x+5)(7x-3) = 4x\cdot 7x - 4x\cdot 3 + 5\cdot 7x - 5\cdot 3 = 28x^2 - 12x + 35x - 15 = 28x^2 + 23x - 15$$

Como se observa el término 4x multiplicó a los términos 7x y 3, claro tomando en cuenta también la multiplicación de signos que es muy importante realizar de forma correcta a fin de no cometer errores en el procedimiento y en el resultado final. Además también se observa que en este caso se tuvo que operar los términos semejantes -12x+35 lo cual dio 23x, veamos otro ejemplo

$$(5x^7 - 4x^3)(6x^4 - 7x) = 5x^7\cdot 6x^4 - 5x^7\cdot 7x - 4x^3\cdot 6x^4 + 4x^3\cdot 7x = 30x^{11} - 35x^8 - 24x^7 + 27x^4$$

Aquí se observa también la multiplicación término a término y la respectiva suma de los exponentes de igual base, además de realizar la correspondiente multiplicación de signos, por ejemplo $5x^7 . 6x^4 = 30x^{11}$ y $5x^7.(-7x) = -35x^8$ por último cabe señalar que aquí no hubo términos semejantes que operar.

Caso 4. Multiplicación de polinomios

Veamos ahora el procedimiento general para multiplicar polinomios de mayores números de términos, aquí hay que señalar que el procedimiento sigue siendo el mismo, es decir, se multiplica término a término teniendo en cuenta de multiplicar los coeficientes, los signos y sumar los exponentes de las potencias de igual base, pasemos a ver un primer ejemplo.

Dados los polinomios

$P(x) = 5x^2 + 4x - 7$

$Q(x) = 5x - 3$

hallar $P(x)\cdot Q(x)$

en este caso se observa que los polinomios ya están ordenados y completos por lo tanto se procede a su multiplicación la cual se muestre como a continuación

$$
\begin{array}{r}
5x^2 + 4x - 7 \\
5x - 3 \\
\hline
25x^3 + 20x^2 - 35x \qquad\quad \\
-15x^2 - 12x + 21 \\
\hline
25x^3 + 5x^2 - 47x + 21
\end{array}
$$

Como se observa en este ejemplo al multiplicar hay que ir colocando los términos semejantes uno debajo del otro para luego operarlos según los signos, aquí se empezó multiplicando el término 5x por todos los términos del polinomio de arriba, comenzando por $5x^2$ y terminando por -7, luego se procedió a hacer lo mismo con el -3, aquí los términos semejantes que se operaron son $20x^2$ -15=$5x^2$ y -35x-12x= -47x, obsérvese también las respectivas multiplicaciones de signos.

Veamos otro ejemplo

Dados los polinomios

$$A(x) = -8 + 7x^2 - 3x^4 + 5x^5 + 4x$$
$$B(x) = 9 - 2x^2 - 6x$$

hallar $A(x) \cdot B(x)$

aquí se observa que ambos polinomios está desordenados y el A(x) necesita completarse en el espacio correspondiente a x^3, es decir, con $0x^3$, y luego se procede a multiplicar término a término teniendo siempre en cuenta la multiplicación de signos, y al final sumar los términos semejantes.

$$5x^5 - 3x^4 + 0x^3 - 7x^2 + 4x - 8$$
$$-2x^2 - 6x + 9$$

$$-10x^7 + 12x^6 - 0x^5 + 14x^4 - 8x^3 + 16x^2$$
$$-30x^6 + 18x^5 - 0x^4 + 42x^3 - 24x^2 + 48x$$
$$45x^5 - 27x^4 + 0x^3 - 63x^2 + 36x - 72$$

$$-10x^7 - 18x^6 + 63x^5 - 13x^4 + 34x^3 - 71x^2 + 84x - 72$$

Recuerde siempre que al sumar los términos semejantes haya que tener cuidado con los signos por ejemplo en este caso se operó $16x^2-24x^2-63x^2 = 16x^2-87x^2=-71x^2$

Segunda parte. Productos Notables

Ahora pasaremos a considerar algunos casos básicos de productos notables. En cada uno de los casos que se van a desarrollar hay que tener en cuenta que las fórmulas son expresiones genéricas que se han de aplicar a cualquier polinomio del cual se requiera desarrollar el respectivo ejercicio.

Primer caso. Cuadrado de una suma y de una diferencia

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ esta expresión por lo general se lee así: el cuadrado de la suma de dos términos es igual al cuadrado del primer término más el doble de producto del primer término por el segundo más el cuadrado del segundo término.

Similarmente el cuadrado de una diferencia viene expresado por la fórmula $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ esta expresión se leería así: el cuadrado de una diferencia es igual al cuadrado del primer término menos el doble del producto del primer término por el segundo más el cuadrado del segundo término.

Veamos a continuación unos ejemplos de aplicación de dichas fórmulas.

Desarrollar el siguiente producto notable $(x+4)^2$

en este caso identificamos como el término a de la fórmula a la variable x y como término b de la fórmula al número 4, es decir, a = x, b =4 aplicamos lo indicado en la fórmula $(a+b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$

Quedando así

$$(x+4)^2 = x^2 + 2\cdot x\cdot 4 + 4^2 = x^2 + 8\,x + 16$$

Veamos otro ejemplo

Desarrollar el siguiente producto notable $(4\,x^3 + 7\,y^4)^2$ en este caso hacemos la identificación del término a de la fórmula con la expresión $4x^3$ y el término b de la fórmula lo identificamos con el término $7y^4$, es decir, a = $4x^3$ y b = $7y^4$ y aplicando otra vez la fórmula $(a+b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$ y desarrollando las respectivas operaciones tenemos

$$(4\,x^3 + 7\,y^4)^2 = (4\,x^3)^2 + 2\cdot 4x^3\cdot 7y^4 + (7\,y^4)^2$$

$$= 4^2(x^3)^2 + 56x^3y^4 + 7^2(y^4)^2$$

$$= 16x^6 + 56x^3y^4 + 49y^8$$

Ahora veamos un ejemplo con la fórmula $(a-b)^2 = a^2 - 2\,ab + b^2$ cuyo procedimiento es similar solo que la diferencia está el signo negativo que separa al primer término del segundo.

Desarrollar el siguiente producto notable $(3\,x^4 - 5x^6)^2$
Aquí identificamos el término a de la fórmula con el término $3x^4$ y el término b de la fórmula lo identificamos con el término $5x^6$, y esto quedaría así resolviendo también las operaciones indicadas y recordando aplicar la propiedad de multiplicación de potencias de igual base en se coloca la misma base y se suma los exponentes.

$$(3\,x^4 - 5x^6)^2 = (3\,x^4)^2 - 2\cdot 3x^4\cdot 5x^6 + (5\,x^6)^2$$

$$= 3^2(x^4)^2 - 30x^{4+6} + 5^2(x^6)^2$$

$$= 9x^8 - 30x^{10} + 25x^{12}$$

Segundo caso. Suma por diferencia

La fórmula de suma por diferencia es $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$ y la misma se lee así: el producto de la suma por la diferencia de dos binomios de ambos términos comunes es igual a la diferencia de los cuadrados de dichos términos.

Veamos un par de ejemplos para entender la aplicación de dicha fórmula

Desarrollar el siguiente producto notable $(5x+4)(5x-4)$
Aquí identificamos el término a con 5x y el término b con 4 y aplicando la fórmula $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$ y desarrollando las operaciones indicadas tendremos lo siguiente:

$$(5x+4)(5x-4) = (5x)^2 - 4^2 = 25x^2 - 16$$

Veamos otro ejemplo

Desarrollar el siguiente producto notable $(4x^3y^5 + 8x^2y^7)(4x^3y^5 - 8x^2y^7)$ en este caso tenemos que identificar el término a de la fórmula con el término $4x^3y^5$ e identificamos el término b de la fórmula con el término $8x^2y^7$ quedando así luego de desarrollar las potencias de potencias las cual se resuelven multiplicando los exponentes:

$$(4x^3y^5 + 8x^2y^7)(4x^3y^5 - 8x^2y^7) = (4x^3y^5)^2 - (8x^2y^7)^2$$

$$= 4^2(x^3)^2(y^5)^2 - 8^2(x^2)^2(y^7)^2 = 16x^6y^{10} - 64x^4y^{14}$$

Tercer caso. Producto de dos binomios con un término en común
Este producto notable se representa por las fórmulas

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

$$(ax+b)(ax+c)=a^2x^2+(b+c)x+bc$$

en estos casos es necesario tomar en cuenta los signos de a y de b en el caso de la primer fórmula y los signos de b y c en la segunda fórmula.

Veamos unos ejemplos de aplicación de ambas fórmulas

Desarrollar el siguiente producto notable $(x-7)(x+2)$ aquí identificamos como el término **a** al número -7 y como término **b** al número 2, luego aplicamos la fórmula y desarrollamos las operaciones indicadas quedando todo lo expresado hasta aquí de la siguiente forma:

$$(x-7)(x+2)=x^2+(-7+2)x+(-7)\cdot 2$$

$$=x^2+(-5)x+(-14)=x^2-5x-14$$

Veamos este otro ejemplo

Desarrollar el siguiente producto notable $(3x-9)(3x-5)$ haciendo las respectivas identificaciones con la segunda fórmula vemos aquí que el coeficiente **a** vendría a ser el número 3, luego la **b** será el número -9 y la **c** será el número -5 aplicando la fórmula $(ax+b)(ax+c)=a^2x^2+(b+c)x+bc$ esto quedaría de la siguiente manera

$$(3x-9)(3x-5)=(3x)^2+(-9-5)x+(-9)\cdot(-5)$$

$$=9x^2+(-14)x+45=9x^2-14x+45$$

Cuarto caso. El cubo de una suma y el cubo de una diferencia

Este es último caso a desarrollar en cuanto los productos notables, empecemos por ver las respectivas fórmulas del cubo de una suma y del cubo de una diferencia:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3\,ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3\,a^2b + 3\,ab^2 - b^3$$

En estos casos luego de hacer las respectivas identificaciones hay que tomar en cuenta que al realizar las operaciones indicadas primero hay que desarrollar las potencias y de último las multiplicaciones, a continuación veamos unos ejemplos de aplicación de dichas fórmulas.

Desarrollar el siguiente producto notable $(2\,x+5)^3$ aquí identificamos el término a de la fórmula con 2x, es decir, a =2x y el b con 5, o sea, b =5 y luego aplicamos la fórmula $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3\,ab^2 + b^3$ y desarrollamos las operaciones indicadas en el orden anteriormente indicado, todo esto sería como sigue:

$$(2\,x+5)^3 = (2\,x)^3 + 3\cdot(2\,x)^2\cdot 5 + 3\cdot 2\,x\cdot 5^2 + 5^3$$

a continuación desarrollamos las potencias

$$= 2^3x^3 + 3\cdot 2^2\cdot x^2\cdot 5 + 3\cdot 2\,x\cdot 5^2 + 5^3 = 8x^3 + 3\cdot 4\,x^2\cdot 5 + 3 \cdot 2\,x\cdot 25 - 125$$

y por último las multiplicaciones

$$= 8x^3 + 60x^2 + 150\,x - 125$$

Veamos otro ejemplo

Desarrollar el siguiente producto notable $\left(4x^3 - 2y^4\right)^3$

Aquí el término **a** será el $4x^3$ y el término **b** será el $2y^4$ aplicando la segunda fórmula $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$$\left(4x^3 - 2y^4\right)^3 = \left(4x^3\right)^3 - 3\cdot\left(4x^3\right)^2\cdot 2y^4 + 3\cdot 4x^3\cdot\left(2y^4\right)^2 - \left(2y^4\right)^3$$

Desarrollando las potencias

$$= 4^3\left(x^3\right)^3 - 3\cdot 4^2\left(x^3\right)^2\cdot 2y^4 + 3\cdot 4x^3\cdot 2^2\left(y^4\right)^2 - 2^3\left(y^4\right)^3$$
$$= 64x^9 - 3\cdot 16x^6\cdot 2y^4 + 3\cdot 4x^3\cdot 4y^8 - 8y^{12}$$

y por último las multiplicaciones

$$= 64x^9 - 96x^6y^4 + 48x^3y^8 - 8y^{12}$$

Ejercicios propuestos

Desarrollar las siguientes multiplicaciones de polinomios, recuerde ordenar y completar cuando sea necesario

a.) $7x^9\cdot 8x^{11}$

b.) $5xy^6\cdot 9x^4y^5\cdot 4x^8y$

c.) $7x^3\left(8x^6 - 9x^7 - 12x + 35\right)$

d.) $-8x^5y^6\left(9x^8y + 7x^9y^4 - 13x^6y^8 + 12xy^{11}\right)$

e.) Dados los polinomios

$P(x) = -9x^2 + 7x - 8$

$Q(x) = 4x - 6$

hallar $P(x) \cdot Q(x)$

f.) Dados los polinomios

$A(x) = -7 + 8x^3 - 6x^5 + 9x^2 + 4x$

$B(x) = 8 - 7x^2 - 9x$

hallar $A(x) \cdot B(x)$

Parte II

Desarrollar los siguientes productos notables

Cuadrado de una suma

a.) $(x + 7)^2$

b.) $\left(5x^8 + 6y^5\right)^2$

cuadrado de una diferencia

c.) $\left(7x^5 - 9x^8\right)^2$

suma por diferencia

d.) $(6x + 3)(6x - 3)$

e.) $\left(5x^8y^9 + 7x^4y^6\right)\left(5x^8y^9 - 7x^4y^6\right)$

producto de dos binomios con un término en común

f.) $(x - 8)(x + 5)$

g.) $(4x - 10)(4x - 9)$

cubo de una suma

h.) $(5x + 3)^3$

cubo de una diferencia

i.) $\left(4x^5 - 3y^8\right)^3$

enlaces a videos explicativos que complementan y refuerzan lo aquí desarrollado

https://www.youtube.com/watch?v=xhehdpes0Wg

https://www.youtube.com/watch?v=Y7rvipk5NO4

https://www.youtube.com/watch?v=wU7qFUQ_LKs

https://www.youtube.com/watch?v=BvhQKRTUWCs