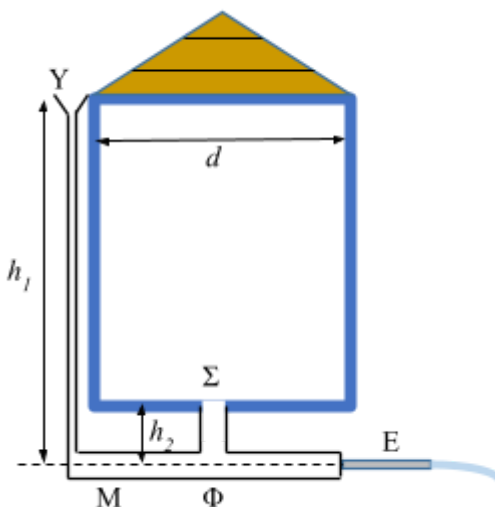


Πλημμύρισε η αποχέτευση

Στο σχήμα φαίνεται ένα απλοποιημένο σύστημα συλλογής όμβριων υδάτων, σε μια κατοικία. Το νερό της βροχής κυλώντας από τη στέγη εισέρχεται στις κατακόρυφες υδρορροές (μια από αυτές η Υ, φαίνεται στο σχήμα) και φτάνει στον οριζόντιο σωλήνα Μ, κάτω από το υπόγειο. Στη συνέχεια διοχετεύεται σε σωλήνα εξόδου Ε που βγάζει το νερό στο δρόμο. Το ύψος της κατακόρυφης υδρορροής είναι $h_1=11m$, το σιφόνι Σ που υπάρχει στο υπόγειο έχει ύψος $h_2=1,2m$ και ο οριζόντιος σωλήνας Μ έχει



ακτίνα $r=3cm$. Κάποια στιγμή ρίχνει «καρέκλες» και ο ιδιοκτήτης βλέπει το νερό να έχει φτάσει στο ανώτερο σημείο του σιφονιού έτοιμο να ξεχειλίσει. Η πλαϊνή πλευρά του σπιτιού έχει πλάτος $d=30m$, ενώ η πρόσοψη έχει πλάτος $L=60m$. Η αρχική ταχύτητα του νερού στην είσοδό του στην κατακόρυφη υδρορροή είναι σχεδόν μηδενική και η ταχύτητα του ανέμου αμελητέα (η βροχή πέφτει κατακόρυφα).

α) Ποιος θα μπορούσε να είναι ο λόγος που το νερό ανέβηκε στο σιφόνι; Τι συμπεραίνετε για τη διατομή του σωλήνα εξόδου Ε; Θα είναι μεγαλύτερη, μικρότερη ή ίση με τη διατομή του σωλήνα Μ;

β) Ποια ταχύτητα έχει το νερό στο σωλήνα Μ;

γ) Με ποια ταχύτητα σε cm/h πέφτει η βροχή στη στέγη;

Δίνεται $g=10m/s^2$. Τα υψόμετρα μετρούνται από τον επιμήκη άξονα συμμετρίας του σωλήνα Μ. Όταν βρέχει, οι σωλήνες γεμίζουν νερό.

Απάντηση

α) Για να ανέβει το νερό στο σιφόνι Σ πρέπει η πίεση στο σημείο Φ να είναι μεγαλύτερη από την ατμοσφαιρική πίεση, που επικρατεί στο σημείο Σ.

Στην έξοδο Ε του σωλήνα η πίεση είναι ίση με την ατμοσφαιρική. Αν εφαρμόσουμε την εξίσωση Bernoulli για μια ρευματική γραμμή από το Φ στο Ε έχουμε

$$p_{\Phi} + \frac{1}{2} \rho v_{\Phi}^2 = p_{atm} + \frac{1}{2} \rho v_E^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \rho v_E^2 = p_{\Phi} - p_{atm} + \frac{1}{2} \rho v_{\Phi}^2$$

$$\Leftrightarrow v_E = \sqrt{v_{\Phi}^2 + \frac{2(p_{\Phi} - p_{atm})}{\rho}} \xrightarrow{p_{\Phi} > p_{atm}} v_E > v_{\Phi} \quad (1)$$

Από την εξίσωση συνέχειας μεταξύ των διατομών στα σημεία Φ και E έχουμε

$$A_{\Phi} v_{\Phi} = A_E v_E \Leftrightarrow \frac{A_{\Phi}}{A_E} = \frac{v_E}{v_{\Phi}} \xrightarrow{(1)} A_{\Phi} > A_E$$

δηλαδή ο σωλήνας εξόδου έχει μικρότερη διατομή.

β) Θεωρούμε μια ρευματική γραμμή, που ξεκινά από την είσοδο Y της υδρορροής, κατεβαίνει τον κατακόρυφο σωλήνα, διέρχεται από τον άξονα συμμετρίας του οριζόντιου σωλήνα M και καταλήγει στο σημείο Φ , κάτω ακριβώς από το σιφόνι. Έστω ότι η πίεση του νερού στο Φ είναι p_{Φ} και η ταχύτητα του νερού v_{Φ} .

Εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli:

$$\begin{aligned} p_Y + \rho g h_1 + 0 &= p_{\Phi} + 0 + \frac{1}{2} \rho v_{\Phi}^2 \\ \Leftrightarrow p_{atm} + \rho g h_1 &= p_{\Phi} + \frac{1}{2} \rho v_{\Phi}^2 \\ \Leftrightarrow p_{\Phi} - p_{atm} &= \rho g h_1 - \frac{1}{2} \rho v_{\Phi}^2 \quad (2) \end{aligned}$$

Όταν το σιφόνι γεμίσει νερό, που ισορροπεί, μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεμελιώδη νόμο της υδροστατικής για τα σημεία Σ και Φ

$$p_{\Phi} - p_{\Sigma} = \rho g h_2 \Leftrightarrow p_{\Phi} - p_{atm} = \rho g h_2 \quad (3)$$

Από τις (2) και (3)

$$\begin{aligned} \rho g h_1 - \frac{1}{2} \rho v_{\Phi}^2 &= \rho g h_2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \rho v_{\Phi}^2 = \rho g (h_1 - h_2) \\ \Leftrightarrow v_{\Phi} &= \sqrt{2g(h_1 - h_2)} \Leftrightarrow v_{\Phi} = \sqrt{2 \cdot 10.9,8} \Leftrightarrow v_{\Phi} = \sqrt{196} \Leftrightarrow v_{\Phi} = 14 \text{ m/s} \end{aligned}$$

γ) Η στέγη έχει εμβαδόν $A_0 = L \cdot d = 60 \cdot 30 = 1800 \text{ m}^2$

Η ποσότητα της βροχής από όλη τη στέγη διοχετεύεται από τις υδρορροές, στον αγωγό M , οπότε, αν v_0 είναι η ταχύτητα της βροχής, από την εξίσωση συνέχειας μεταξύ της διατομής της στέγης και της διατομής του αγωγού M έχουμε

$$\begin{aligned} A_0 v_0 &= A_M v_{\Phi} \Leftrightarrow A_0 v_0 = \pi r^2 v_{\Phi} \\ \Leftrightarrow v_0 &= \frac{\pi r^2 v_{\Phi}}{A_0} \Leftrightarrow v_0 = \frac{3,14 \cdot 0,03^2 \cdot 14}{1800} \\ \Leftrightarrow v_0 &= 0,00002198 \text{ m/s} \xrightarrow{\times 3600} v_0 = 0,079128 \text{ m/h} \\ \Leftrightarrow v_0 &= 7,9 \text{ cm/h} \end{aligned}$$

Σχόλιο

Αν ο μάστορας είχε τοποθετήσει σωλήνα σταθερής διατομής μέχρι την έξοδο του νερού στην ατμόσφαιρα η ταχύτητα του νερού δε θα άλλαζε μέχρι την έξοδο και η εξίσωση Bernoulli θα έβγαζε ότι η πίεση θα ήταν σε κάθε σημείο p_{atm} και δε θα ανέβαινε το νερό στο σιφόνι.

Ανδρέας Ριζόπουλος