

I- Propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma solide

I.1) Chaque électron subit la force de Lorentz $-e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$; si on fait le rapport des ordres de grandeurs du

terme magnétique et du terme électrique : $\frac{\|\vec{v} \wedge \vec{B}\|}{\|\vec{E}\|} \approx \|\vec{v}\| \frac{\|\vec{B}\|}{\|\vec{E}\|}$; mais, pour une onde électromagnétique, on a :

$\frac{\|\vec{B}\|}{\|\vec{E}\|} \approx \frac{1}{c}$, si bien que $\frac{\|\vec{v} \wedge \vec{B}\|}{\|\vec{E}\|} \approx \frac{v}{c} \ll 1$, raisonnablement : on ne considère donc que le terme électrique.

Par ailleurs, $\frac{\partial \vec{P}_{el}}{\partial t} = \vec{j}_{libre} = -ne\vec{v}$ (1), où $\vec{v}$ est le champ « eulérien » des vitesses des électrons ; le Principe

Fondamental de la Dynamique appliqué aux électrons donne donc : $m \frac{D\vec{v}}{Dt} = m \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right] = -e\vec{E}$ (terme magnétique négligé). On évalue le rapport de l'accélération convective sur l'accélération locale :

$\left\| \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right\| \approx \frac{v}{T}$ où T est la période de l'onde ; $\left\| (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right\| \approx \frac{v^2}{\lambda}$ où $\lambda \approx cT$ est la longueur d'onde.

Donc $\left\| (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right\| / \left\| \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right\| \approx \frac{vT}{\lambda} \approx \frac{v}{c} \ll 1$, comme précédemment. Le PFD se réduit donc à :

$m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -e\vec{E}$ (2). Avec (1) : $\frac{\partial \vec{j}_{libre}}{\partial t} = \frac{ne^2}{m} \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{P}_{el}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{P}_{el}$ puisqu'on est en régime harmonique.

On a donc bien : $\vec{P}_{el} = -\frac{ne^2}{m\omega^2} \vec{E} = \epsilon_0 \chi_{el}(\omega) \vec{E}$, avec : $\chi_{el}(\omega) = -\frac{ne^2}{m\omega^2 \epsilon_0}$ (3)

I.2) La polarisation totale est donc $\vec{P} = \vec{P}_{el} + \vec{P}_r = \epsilon_0 (\chi_{el}(\omega) + \chi_r) \vec{E} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$ où $\chi = \chi_{el}(\omega) + \chi_r$ (4), qui prend une valeur uniforme dans tout l'échantillon.

Ecrivons les équations de Maxwell dans ce milieu linéaire, en considérant le régime harmonique :

$$\text{div}(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \text{div}(\epsilon_0 (1 + \chi) \vec{E}) = \epsilon_0 (1 + \chi) \text{div} \vec{E} = 0 \Rightarrow \text{div} \vec{E} = 0 \quad (5)$$

$$\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (6) \quad \text{div}(\vec{B}) = 0 \quad (7)$$

$$\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \left(\vec{j}_{libre} + \frac{\partial(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}_r)}{\partial t} \right) = \mu_0 \left(\frac{\partial(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}_r + \vec{P}_{elec})}{\partial t} \right) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial(1 + \chi) \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \epsilon_0 (1 + \chi) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (8)$$

Alors :

$$\text{rot}(6) \Rightarrow \text{rot}\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\text{rot}(\text{rot}(\vec{E})) = \Delta \vec{E} - \text{grad}(\text{div} \vec{E}) = \Delta \vec{E} \quad \{\text{d'après (5)}\} \quad (6')$$

$$\frac{\partial(8)}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial(\vec{\text{rot}}(\vec{B}))}{\partial t} = \vec{\text{rot}}\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = \mu_0 \varepsilon_0 (1 + \chi) \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (8')$$

Dans le milieu ($z \geq 0$), la comparaison entre (6') et (8') donne $\Delta \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 (1 + \chi) \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ (9)

Comme $\vec{E} = E_x(z) \exp(i\omega t) \vec{e}_x$, $\Delta \vec{E} = \frac{d^2 E_x}{dz^2} \exp(i\omega t) \vec{e}_x$ et $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 E_x(z) \exp(i\omega t) \vec{e}_x$; la projection de

(9) selon $\vec{e}_x$ donne donc : $\frac{d^2 E_x}{dz^2} = -\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 (1 + \chi_r + \chi_{el}(\omega)) E_x$ (10) Avec $\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$ et (3), (10) se

réécrit : $-\frac{d^2 E_x}{dz^2} = \frac{\omega^2}{c^2} (1 + \chi_r - \frac{ne^2}{m\omega^2 \varepsilon_0}) E_x = -\frac{d^2 E_x}{dz^2} = \frac{\omega^2}{c^2} (1 + \chi_r) (1 - \frac{ne^2}{m\varepsilon_0 (1 + \chi_r) \omega^2}) E_x$... qui est bien

l'équation proposée pour $z \geq 0$, si l'on pose : $\omega_p^2 = \frac{ne^2}{m\varepsilon_0 (1 + \chi_r)}$ (11)

Pour $z \leq 0$, $\chi = 0$, et (10) donne alors l'équation proposée :

I.3) Pour $z \leq 0$: $E_x(z, t) = E_0 \exp[i\omega t - kx] + rE_0 \exp[i(\omega t + kx)]$ avec E_0 : amplitude de l'onde incidente,
 onde incidente progressive onde réfléchie régressive (E_0 ne figure pas dans l'énoncé ...)

r : facteur de réflexion (en amplitude) sur le milieu, et $k = \frac{\omega}{c}$ le nombre d'onde dans le vide.

Pour $z \geq 0$: $E_x(z, t) = tE_0 \exp[i(\omega t - qx)]$: onde progressive transmise, où t est le facteur de transmission en amplitude et où q est le nombre d'onde dans le milieu.

L'équation (10) donne la relation de dispersion dans le milieu : $q^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (1 + \chi_r) (1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2})$ (12)

I.4) • La relation de passage pour le champ électrique au plan frontière (en $z = 0$) entre le vide et le milieu s'écrit :

$\vec{E}(z = 0^+, t) - \vec{E}(z = 0^-, t) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{e}_z$: $\vec{E}$, dirigé selon $\vec{e}_x$ et tangent au plan frontière est donc continu en $z = 0$, donc $E_x(z)$ est continue en $z = 0$.

• La relation de passage pour le champ magnétique à la frontière (en $z = 0$) entre le vide et le milieu s'écrit :

$\vec{B}(z = 0^+, t) - \vec{B}(z = 0^-, t) = \mu_0 \vec{j}_{\text{Surfacique}} \wedge \vec{e}_z$; mais ici, $\vec{j}_{\text{Surfacique}} = \vec{0}$ et donc $\vec{B}$ est continu en $z = 0$.

Or l'équation (6) : $\vec{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{dE_x}{dz} e^{i\omega t} \vec{e}_y = -i\omega \vec{B}$: $\vec{B}$ étant continu, $\frac{dE_x}{dz}$ l'est aussi en $z = 0$.

I.5) • Continuité de $E_x(z)$ en $z = 0$: les expressions de $E_x(z)$ proposées au I.3) indiquent que :

$$E_x(z = 0^-) = E_0(1 + r) = E_0 t = E_x(z = 0^+) \Rightarrow 1 + r = t \quad (13)$$

• Continuité de $\frac{dE_x}{dz}(z)$ en $z = 0$: les expressions de $E_x(z)$ proposées au I.3) indiquent que :

$$\frac{dE_x}{dz}(z = 0^-) = ikE_0(-1 + r) = -iqE_0 t = \frac{dE_x}{dz}(z = 0^+) \Rightarrow k(1 - r) = qt \quad (14)$$

$$r = \frac{1 - \frac{q}{k}}{1 + \frac{q}{k}} \quad k = \frac{\omega}{c} \quad (15)$$

De (13) et (14) on tire sans difficulté :

- si $\omega < \omega_p$, (12) indique que $q^2 < 0$: q est donc imaginaire pur (l'onde transmise est évanescente), et

$$r = \frac{1 + \frac{iq''}{k}}{1 - \frac{iq''}{k}}, \text{ de la forme } \frac{\underline{z}}{\underline{z}^*} \text{ (où } \underline{z}^* \text{ est le complexe conjugué de } \underline{z} \text{), donc de module égal à 1 : on a donc bien } R = |r|^2 = 1.$$

l'on peut toujours poser $q = -iq''$, où $q'' = \sqrt{-q^2}$; alors (15) donne

est le complexe conjugué de $\underline{z}$), donc de module égal à 1 : on a donc bien

- si $\omega \geq \omega_p$, (12) indique que $q^2 \geq 0$: q est donc réel (positif car il y a propagation vers les z croissants) : il y a bien propagation, dispersive d'ailleurs.

De (12), on tire $\frac{q}{k} = \sqrt{1 + \chi_r} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$, et (15) donne :

$$r = \frac{1 - \sqrt{1 + \chi_r} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{1 + \sqrt{1 + \chi_r} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} \quad (16), \text{ ce qui vérifie}$$

I.6) A partir de la courbe proposée :

- quand λ (dans le vide, $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$) tend vers 0, soit donc quand ω tend vers l'infini, on constate que R tend vers

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} R = \left(\frac{\sqrt{1 + \chi_r} - 1}{1 + \sqrt{1 + \chi_r}} \right)^2 \Rightarrow \sqrt{0,34} = 0,58 = \frac{\sqrt{1 + \chi_r} - 1}{1 + \sqrt{1 + \chi_r}} \Rightarrow \chi_r = 13,4$$

0,34 ; or

- on constate que R s'annule pour une longueur d'onde $\lambda_1 = 22 \mu\text{m}$, donc de pulsation $\omega_1 = \frac{2\pi c}{\lambda_1} = 8,6 \cdot 10^{13} \text{ rad.s}^{-1}$.
L'examen de (16) indique donc que :

$$1 - \sqrt{1 + \chi_r} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_1^2}} = 0 \Rightarrow 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_1^2} = \frac{1}{1 + \chi_r} \Rightarrow \omega_p^2 = \frac{\chi_r}{1 + \chi_r} \omega_1^2 = \frac{ne^2}{m\epsilon_0(1 + \chi_r)} \text{ d'après (11)}$$

$$m = \frac{ne^2}{\epsilon_0 \chi_r \omega_1^2} = 3,5 \cdot 10^{-32} \text{ kg} = 0,04 m_0$$

Donc

II. Effet des interactions coulombiennes entre porteurs

II.1.1) La force coulombienne exercée par l'électron j (de position $\vec{r}_j$) sur l'électron i (de position $\vec{r}_i$) s'écrit :

$$\vec{f}_{j \rightarrow i} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|^3}$$

Le PFD appliqué à l'électron i donne :

$$m \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \sum_{j \neq i} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|^3} - e \vec{E}_{em} - e \frac{d\vec{r}_i}{dt} \wedge \vec{B} - m\omega_0^2 (\vec{r}_i - \vec{r}_{i0}) \quad (17)$$

II.1.2) On considère comme système mécanique fermé cet ensemble de N électrons. Les forces coulombiennes sont des forces intérieures (leur somme est nulle), les autres sont des forces extérieures.

$$N\vec{r}_G = \sum_i \vec{r}_i$$

On introduit le centre de masse G de ces N électrons, dont la position vérifie :
 centre de masse (ou la somme de toutes les équations (17)) assure :

$$mN \frac{d^2 \vec{r}_G}{dt^2} = -Ne\vec{E}_{em} - \sum_i e \frac{d\vec{r}_i}{dt} \wedge \vec{B} + m\omega_0^2 (\vec{r}_i - \vec{r}_{i0}) = -Ne\vec{E}_{em} - Ne \frac{d\vec{r}_G}{dt} \wedge \vec{B} - Nm\omega_0^2 (\vec{r}_G - \vec{r}_{G0}) \quad (18)$$

II.1.3) La puissance fournie par le champ électrique de l'onde à ces N électrons s'écrit :

$$P_{elec} = \sum_i (-e\vec{E}_{em} \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt}) = -e\vec{E}_{em} \cdot \sum_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = -Ne\vec{E}_{em} \cdot \frac{d\vec{r}_G}{dt}$$

$$-Ne\vec{E}_{em} = Ne \frac{d\vec{r}_G}{dt} \wedge \vec{B} + Nm\omega_0^2 (\vec{r}_G - \vec{r}_{G0}) + mN \frac{d^2 \vec{r}_G}{dt^2}$$

Or, d'après (18) :

$$\begin{aligned} \text{Donc } P_{elec} &= -Ne\vec{E}_{em} \cdot \frac{d\vec{r}_G}{dt} = Ne \frac{d\vec{r}_G}{dt} \cdot \left(\frac{d\vec{r}_G}{dt} \wedge \vec{B} \right) + Nm\omega_0^2 (\vec{r}_G - \vec{r}_{G0}) \cdot \frac{d\vec{r}_G}{dt} + mN \frac{d^2 \vec{r}_G}{dt^2} \cdot \frac{d\vec{r}_G}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{Nm\omega_0^2}{2} (\vec{r}_G - \vec{r}_{G0})^2 + \frac{mN}{2} \left(\frac{d\vec{r}_G}{dt} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (19)$$

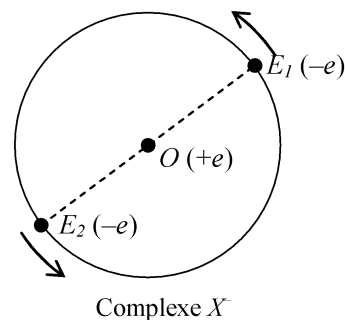
On peut donc exprimer cette puissance électrique en fonction du mouvement « global » des électrons du système (mouvement global décrit par $\vec{r}_G(t)$), nulle part n'y intervient l'interaction coulombienne entre les électrons.

II.1.4) Pour pouvoir exprimer P_{elec} uniquement en fonction de $\vec{r}_G(t)$, il a fallu que dans l'expression (18) du théorème du centre de masse, la force extérieure résultante s'exprime uniquement en fonction de $\vec{r}_G(t)$. Si l'on ajoute sur chaque électron une force extérieure supplémentaire $\vec{F}_i(\vec{r}_i)$, il faut donc que : $\sum_i \vec{F}_i(\vec{r}_i) = \vec{f}(\sum_i \vec{r}_i)$: ceci est réalisé si la dépendance de $\vec{F}_i$ en $\vec{r}_i$ est **linéaire**. Par exemple, on pourrait rajouter une force dissipative,

$$\vec{F}_i = -\frac{m}{\tau} \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

mais il faut qu'elle soit de la forme frottement fluide () pour que la propriété recherchée soit vérifiée.

II.2.1) La particule $+e$, de masse m_+ (il s'agit d'un « trou » de ce semi-conducteur ...) est fixe en O , notons E_1 et E_2 les positions respectives des deux électrons, de masse m . Le système est supposé isolé (?), le référentiel barycentrique est donc galiléen. Si O est fixe, c'est que la somme des forces qui s'exerce sur O est nulle, et donc que, à chaque instant $\vec{OE}_2 = -\vec{OE}_1$. E_1 et E_2 orbitent donc sur le même cercle, en opposition par rapport à O :



• Appliquons le PFD à E_1 dans le référentiel barycentrique galiléen. Il est soumis à l'attraction coulombienne de O et à la répulsion coulombienne de E_2 . Son mouvement est circulaire de rayon R , évidemment uniforme, de vitesse angulaire Ω . Posons $\vec{OE}_1 = R\vec{u}_1$. Le PFD donne :

$$m \frac{d^2 \overrightarrow{OE_1}}{dt^2} = -mR\Omega^2 \overrightarrow{u_{r1}} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{\overrightarrow{u_{r1}}}{R^2} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{\overrightarrow{u_{r1}}}{(2R)^2} = -\frac{3}{4} \tilde{e}^2 \frac{\overrightarrow{u_{r1}}}{R^2} \Rightarrow \Omega^2 = \frac{3}{4} \frac{\tilde{e}^2}{mR^3} \quad (20)$$

L'énergie $E(X^-)$ est la somme de l'énergie cinétique totale E_C de E_1 et E_2 et de l'énergie potentielle totale U .

$$\bullet E_1 \text{ et } E_2 \text{ ont même énergie cinétique} \quad \frac{1}{2} m(R\Omega)^2 = \frac{3}{8} \frac{\tilde{e}^2}{R} \Rightarrow E_C = \frac{3}{4} \frac{\tilde{e}^2}{R} \quad (21)$$

$$\bullet U = U(O, E_1) + U(O, E_2) + U(E_1, E_2) = -2 \frac{\tilde{e}^2}{R} + \frac{\tilde{e}^2}{2R} = -\frac{3}{2} \frac{\tilde{e}^2}{R} = U \quad (22)$$

$$\bullet D'où \quad U + E_C = E(X^-) = -\frac{3}{4} \frac{\tilde{e}^2}{R} \quad (23)$$

II.2.2) Le moment cinétique d'un électron en O, projeté sur la normale à l'orbite est $L = mR^2\Omega$.

$$L^2 = m^2 R^4 \Omega^2 = \frac{3}{4} mR\tilde{e}^2 = (n\hbar)^2 \quad (24)$$

Donc, d'après (20) :

Pour l'état fondamental, $E(X^-)$ est minimale, donc R prend la plus petite valeur possible, donc, par (24), $n=1$ et :

$$R_1 = \frac{4}{3} \frac{\hbar^2}{m\tilde{e}^2} \quad \text{d'après (24). On trouve l'énergie de l'état fondamental de } X^- \text{ par (23) :}$$

$$\boxed{E_1(X^-) = -\frac{3}{4} \frac{\tilde{e}^2}{R_1} = -\frac{9}{16} \frac{m\tilde{e}^4}{\hbar^2}} \quad (25)$$

II.2.3) Pour X_0 , le calcul est le même.

$$\bullet \text{ le PFD appliqué à l'électron donne : } \Omega^2 = \frac{\tilde{e}^2}{mR^3} \Rightarrow E_C = \frac{1}{2} m(R\Omega)^2 = \frac{\tilde{e}^2}{2R}$$

$$\bullet U = U(O, E) = -\frac{\tilde{e}^2}{R} \Rightarrow U + E_C = E(X_0) = -\frac{\tilde{e}^2}{2R} \quad (23)'$$

$$\bullet \text{ la condition de quantification, avec toujours } n=1 \text{ donne : } R_1 = \frac{\hbar^2}{m\tilde{e}^2} \quad (24)'$$

$$\bullet (23)' \text{ donne alors l'énergie de l'état fondamental de } X_0 : \boxed{E_1(X_0) = -\frac{\tilde{e}^2}{2R_1} = -\frac{m\tilde{e}^4}{2\hbar^2}} \quad (25)'$$

Rem : il semble paradoxal qu'on puisse considérer, pour ce système isolé (e^+ , e^-), la particule e^+ fixe en O. Mais il se trouve que dans les semi-conducteurs, la masse effective des trous est souvent plus importante que celle des électrons, ce qui fait que l'approximation n'est pas si

grossière que cela. Si l'on tenait compte de l'entraînement du trou, il faudrait raisonner avec la masse réduite $\mu = \frac{mm^+}{m+m^+}$ où m^+ est la

masse effective du trou, et (25)' donnerait $E_1(X_0) = -\frac{\tilde{e}^2}{2R_1} = -\frac{\mu\tilde{e}^4}{2\hbar^2}$; en particulier, si l'on avait $m^+=m$, on aurait $\mu = \frac{m}{2}$ et

$E_1(X_0) = -\frac{m\tilde{e}^4}{4\hbar^2}$. Mais si $m^+ \gg m$, alors $\mu \approx m$ et l'approximation précédente est valable. Il semble que ce soit le cas de InSb où la mobilité des électrons est plus de 100 fois plus grande que celle des trous.

II.2.4) Δ est l'énergie de la réaction $X^- \rightarrow X_0 + e^-$, l'électron étant obtenu au repos et à l'infini.

$$\text{Donc, d'après (25) et (25)' : } \boxed{\Delta = E_1(X_0) - E_1(X^-) = \frac{m\tilde{e}^4}{16\hbar^2}} \quad (26)$$

• L'application numérique conduit à $\Delta = 7,8 \cdot 10^{-4} \text{ eV} = 0,78 \text{ meV}$.

• Δ est égale à l'énergie d'agitation thermique $\approx k_B T$ pour $T_0 = 8,9$ K. Si $T \gg T_0$, tous les complexes X^- seront dissociés, ce qui est le propos de la question suivante.

II.3.1) • Comme $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$, on en déduit $\lim_{T \rightarrow 0} \mu(T) = 0$.

• $\mu(X^-) = e(X^-) - TS(X^-)$ où $e(X^-)$ est son énergie et $S(X^-)$ son entropie ; comme l'origine des énergies correspond à celle de X_0 , $e(X^-) = -\Delta$; lorsque la température tend vers zéro, l'entropie aussi, si bien que $\lim_{T \rightarrow 0} \mu(X^-) = -\Delta$.

• D'où

$$\mu(X^-, T) = -\Delta + k_B T \ln \left(\frac{N}{S} \frac{2\pi \mathbb{M}^2}{m_{X^-} k_B T} \right) = -\Delta + k_B T \ln \left(n_{X^-} \frac{2\pi \mathbb{M}^2}{m_{X^-} k_B T} \right) \quad (27)$$

II.3.2) • L'enthalpie libre de réaction de la dissociation $X^- \leftrightarrow X_0 + e^-$ est $\mu(X_0) + \mu(e^-) - \mu(X^-)$; elle est nulle à l'équilibre, ce qui correspond à la relation proposée : $\mu(X^-) - (\mu(X_0) + \mu(e^-)) = 0$ (28)

•

$$\mu(X^-) = -\Delta + k_B T \ln \left(n_{X^-} \frac{2\pi \mathbb{M}^2}{m_{X^-} k_B T} \right) ; \quad \mu(X_0) = k_B T \ln \left(n_{X_0} \frac{2\pi \mathbb{M}^2}{m_{X_0} k_B T} \right) ; \quad \mu(e^-) = k_B T \ln \left(n_e \frac{2\pi \mathbb{M}^2}{m k_B T} \right)$$

La relation (28) conduit donc à :

$$\begin{aligned} -\Delta + k_B T \ln \left(n_{X^-} \frac{2\pi \mathbb{M}^2}{m_{X^-} k_B T} \right) &= k_B T \left[\ln \left(n_{X_0} \frac{2\pi \mathbb{M}^2}{m_{X_0} k_B T} \right) + \ln \left(n_e \frac{2\pi \mathbb{M}^2}{m k_B T} \right) \right] \Rightarrow \\ -\Delta &= k_B T \left[\ln \left(\frac{n_{X_0} n_e}{m_{X_0} m} \frac{m_{X^-}}{n_{X^-}} \frac{2\pi \mathbb{M}^2}{k_B T} \right) \right] \Rightarrow \quad \frac{n_{X_0} n_e}{n_{X^-}} = \frac{m m_{X_0}}{m_{X^-}} \frac{k_B T}{2\pi \mathbb{M}^2} \exp \left(-\frac{\Delta}{k_B T} \right) = \Phi(T, V) \end{aligned} \quad (29)$$

c'est la loi d'action des masses.

II.3.3) • la conservation de la charge électrique impose : $n_e(0) = n_e + n_{X^-}$ (30)

• la conservation du nombre de trous donne : $n_X(0) = n_{X_0} + n_{X^-}$ (31) (pas de recombinaisons électrons-trous).

• D'où : $n_e = n_e(0) - n_{X^-}$ et $n_{X_0} = n_X(0) - n_{X^-}$

II.3.4) La loi d'action des masses (29) conduit donc à :

$$\begin{aligned} \frac{n_{X_0} n_e}{n_{X^-}} &= \frac{(n_X(0) - n_{X^-})(n_e(0) - n_{X^-})}{n_{X^-}} = \Phi(T, V) = \frac{m m_{X_0}}{m_{X^-}} \frac{k_B T}{2\pi \mathbb{M}^2} \exp \left(-\frac{\Delta}{k_B T} \right) \quad \text{Or } n_e(0) \gg n_X(0) \geq n_{X^-} \\ \text{et } n_e(0) - n_{X^-} &\approx n_e(0) ; (29) \text{ s'écrit enfin :} \quad \frac{n_e(0)(n_X(0) - n_{X^-})}{n_{X^-}} = \Phi(T, V) = \frac{m m_{X_0}}{m_{X^-}} \frac{k_B T}{2\pi \mathbb{M}^2} \exp \left(-\frac{\Delta}{k_B T} \right) \end{aligned} \quad (32)$$

II.3.5) • La fonction $f(x) = \frac{a-x}{x}$ décroît sur l'intervalle $]0, a]$: donc Φ est fonction décroissante de n_{X^-} .

• La fonction $g(y) = y \exp(-\frac{b}{y})$ (avec $b > 0$), de dérivée $\frac{dg}{dy} = (\frac{b}{y} + 1) \exp(-\frac{b}{y})$ est croissante sur l'intervalle $y \in [0, +\infty[$: donc Φ est fonction croissante de T .

Ces remarques indiquent que si T croît, alors Φ croît, et donc n_{X^-} décroît : n_{X^-} (à l'équilibre) est fonction décroissante de la température. Ce résultat rejoint le raisonnement habituel utilisé en thermodynamique chimique :

la « réaction » de dissociation de X^- est endothermique (il faut apporter l'énergie Δ), une élévation de température déplace la réaction dans le sens de la dissociation : n_{X^-} (à l'équilibre) décroît.

III Effet d'un champ magnétique sur la réponse optique de N électrons confinés dans une couche d'épaisseur nanométrique.

III.1) Le PFD appliqué à un électron de vecteur position $\vec{r}(t) = (x, y, z)$ s'écrit (en négligeant, comme au I) la

force du champ magnétique de l'onde) : $m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -e \vec{E}(t) - e \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{B} - m\omega_0^2 z \vec{e}_z - \frac{m}{\tau} \frac{d\vec{r}}{dt}$ (33) ; cette équation

est linéaire, si le champ électrique d'excitation est harmonique de pulsation ω , la réponse $\vec{r}(t)$ est elle aussi harmonique à la même pulsation, si bien que les coordonnées (x, y, z) sont toutes trois harmonique à la même

pulsation. En particulier, on a : $\frac{d\vec{r}}{dt} = i\omega \vec{r}$ et $\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\omega^2 \vec{r}$.

On supposera de plus que l'amplitude du mouvement de l'électron est très inférieure à la longueur d'onde (elle-même apparemment très supérieure à l'épaisseur de la couche), si bien qu'on pourra supposer à chaque instant

$\vec{E}(t)$ homogène dans le domaine de déplacement de l'électron considéré. Le PFD (33) s'écrit en projection :

$$-m\omega^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -e \begin{pmatrix} 0 \\ E_y^0 \\ E_z^0 \end{pmatrix} e^{i\omega t} + i\omega B e \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{pmatrix} - i\omega \frac{m}{\tau} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - m\omega_0^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \quad (34)$$

III.2) • Selon $\vec{e}_x$, l'équation différentielle s'écrit en $v_x(t) = \frac{dx}{dt} = i\omega x$: $\frac{dv_x}{dt} + \frac{m}{\tau} v_x = 0$, équation de relaxation sans terme d'excitation. $v_x(t)$ relaxe donc vers 0 au bout de τ , et $x(t)$ relaxe vers une abscisse constante, qu'on peut poser égale à 0.

• Selon $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$, le système (34) se réécrit, en posant $y = y_0 e^{i\omega t}$ et $z = z_0 e^{i\omega t}$, et en divisant par $-m$:

$$\begin{pmatrix} \omega^2 - \frac{i\omega}{\tau} & -i\omega \frac{eB}{m} \\ i\omega \frac{eB}{m} & \omega^2 - \frac{i\omega}{\tau} - \omega_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \frac{e}{m} \begin{pmatrix} E_y^0 \\ E_z^0 \end{pmatrix} \quad [M] = \begin{pmatrix} \omega^2 - \frac{i\omega}{\tau} & -i\omega \frac{eB}{m} \\ i\omega \frac{eB}{m} & \omega^2 - \frac{i\omega}{\tau} - \omega_0^2 \end{pmatrix} \quad (35) : \text{donc}$$

• Par ailleurs $\frac{\partial \vec{P}_{el}}{\partial t} = \vec{j}_{libre} = -nev = -nei\omega \vec{r} = i\omega \vec{P}_{el} \Rightarrow \vec{P}_{el} = -ne\vec{r} = -\frac{Ne}{LS} \vec{r} = \begin{pmatrix} P_y^0 e^{i\omega t} \\ P_z^0 e^{i\omega t} \end{pmatrix}$

En multipliant l'équation (35) par $-\frac{Ne}{\varepsilon_0 LS}$, on obtient donc l'équation vérifiée par $\begin{pmatrix} P_y^0 \\ P_z^0 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} \omega^2 - \frac{i\omega}{\tau} & -i\omega \frac{eB}{m} \\ i\omega \frac{eB}{m} & \omega^2 - \frac{i\omega}{\tau} - \omega_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_y^0 \\ P_z^0 \end{pmatrix} = \varepsilon_0 \left(-\frac{Ne^2}{mLS\varepsilon_0} \right) \begin{pmatrix} E_y^0 \\ E_z^0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} P_y^0 \\ P_z^0 \end{pmatrix} = \varepsilon_0 \left(-\frac{Ne^2}{mLS\varepsilon_0} \right) [M]^{-1} \begin{pmatrix} E_y^0 \\ E_z^0 \end{pmatrix} = \varepsilon_0 [\chi^{el}] \begin{pmatrix} E_y^0 \\ E_z^0 \end{pmatrix} \quad (36)$$

En calculant la matrice inverse de $[M]$, on trouve effectivement la matrice $[\chi^{el}]$ donnée par l'énoncé.

On remarque au passage que $D = \left(\omega^2 - \frac{i\omega}{\tau} \right) \left(\omega^2 - \frac{i\omega}{\tau} - \omega_0^2 \right) - \left(\omega \frac{eB}{m} \right)^2$ est le déterminant de $[M]$.

III.3) L'ordre zéro en $1/\tau$ (on pose $1/\tau = 0$) conduit à $D = \omega^2(\omega^2 - \omega_0^2 - \omega_C^2)$: D s'annule donc pour $\omega = \omega_{\text{res}} = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_C^2}$. Comme D se trouve au dénominateur des éléments de $[\chi^{el}]$, les χ_{ij}^{el} divergent (du moins, deviennent très grands), et donc aussi les β_{ij} , à cette pulsation ω_{res} : il y a résonance des β_{ij} à cette pulsation.

III.4) • On peut remarquer que α est sans unité (voir par exemple l'expression (11) de la pulsation de plasma ω_P

) et que la densité particulaire en électrons $n = \frac{N}{LS} = 10^{23} \text{ m}^{-3}$ est raisonnable pour un semi-conducteur. On calcule alors dans la bonne humeur : $\alpha = 0,20$. Bien, bien.

• Lors de l'application numérique précédente, on avait été amené à calculer : $\omega_0 = 1,52 \cdot 10^{14} \text{ rad.s}^{-1}$. On

calcule (pour $B = 15 \text{ T}$) une pulsation cyclotron $\omega_C = \frac{eB}{m} = 3,8 \cdot 10^{13} \text{ rad.s}^{-1}$.

• C'est un peu limite pour ce B élevé, mais on peut considérer $\omega_C^2 \ll \omega_0^2$: un développement limité est

donc possible :
$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_C^2} = \omega_0 \left(1 + \frac{\omega_C^2}{\omega_0^2} \right)^{1/2} = \omega_0 + \frac{\omega_C^2}{2\omega_0} \quad (37)$$

III.5) Calculons donc $\text{Im}(\beta_{yy})$... A la pulsation de résonance :

$$D = \left(\omega_{\text{res}}^2 - \frac{i\omega_{\text{res}}}{\tau} \right) \left(\omega_C^2 - \frac{i\omega_{\text{res}}}{\tau} \right) - \omega_{\text{res}}^2 \omega_C^2 = -\frac{i\omega_{\text{res}}}{\tau} (\omega_{\text{res}}^2 + \omega_C^2) - \left(\frac{\omega_{\text{res}}}{\tau} \right)^2 \approx -\frac{i\omega_0^3}{\tau} \quad \text{car } \omega_{\text{res}}^2 \approx \omega_0^2 \text{ et}$$

$$\omega_0 \gg \frac{1}{\tau}$$

Alors :

$$\beta_{yy} = -\frac{1}{1 + \chi_r} \frac{Ne^2}{mL\mathcal{E}_0} \frac{\omega_C^2 - \frac{i\omega_{\text{res}}}{\tau}}{D(\omega_{\text{res}})} = -\frac{\alpha\omega_0^2}{1 + \chi_r} \frac{-\frac{\omega_{\text{res}}}{\tau} + i\omega_C^2}{\frac{\omega_0^3}{\tau}} \Rightarrow \text{Im}(\beta_{yy}) = -\frac{\alpha\omega_0^2}{1 + \chi_r} \frac{\omega_C^2}{\frac{\omega_0^3}{\tau}} \approx -\frac{\alpha\omega_C^2\tau}{(1 + \chi_r)\omega_0}$$

Donc $T_{\text{res}}(B) = 1 + kL \text{Im}(\beta_{yy}^{\text{res}}) = 1 - kL \frac{\alpha\omega_C^2\tau}{(1 + \chi_r)\omega_0} \quad (38)$ qui est bien l'expression donnée par l'énoncé.

• Si $B = 0$, la matrice $[M]$ est diagonale, les calculs de la question III.2) sont beaucoup plus simples, et on arrive facilement à :

On constate qu'il y a résonance de χ_{zz}^{el} à une pulsation très voisine de ω_0 , mais qu'il n'y a pas résonance de χ_{yy}^{el} .

$$\begin{pmatrix} P_y^0 \\ P_z^0 \end{pmatrix} = -\alpha\mathcal{E}_0 \begin{pmatrix} \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \frac{i\omega}{\tau}} & 0 \\ 0 & \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \frac{i\omega}{\tau} - \omega_0^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_y^0 \\ E_z^0 \end{pmatrix} = \mathcal{E}_0 [\chi^{el}] \begin{pmatrix} E_y^0 \\ E_z^0 \end{pmatrix} \quad (39)$$

Or, l'onde incidente, évidemment transverse (polarisée selon $\vec{e}_y$) n'excitera pas de polarisation selon $\vec{e}_z$. Il n'y aura donc pas du tout de résonance dans ces conditions.

• La présence d'un champ magnétique selon $\vec{e}_x$ va dévier le mouvement des électrons de la direction $\vec{e}_y$ imposée par le champ électrique incident pour leur donner un mouvement selon $\vec{e}_z$, qui entrera en résonance à une

pulsation voisine de ω_0 : $B\vec{e}_x$ réalise un couplage entre les polarisations selon $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$ (d'ailleurs, de façon générale, l'existence d'un couplage « écarte les fréquences propres » : il n'est donc pas étonnant de trouver ω_{res} légèrement supérieure à ω_0).

• On trouve $\delta T_{\text{res}} = T_{\text{res}}(0) - T_{\text{res}}(B) = kL \frac{\alpha \omega_C^2 \tau}{(1 + \chi_r) \omega_0}$. Attention cependant : k décrit la propagation

dans un milieu de polarisabilité χ_r , donc d'indice optique égal à $\sqrt{1 + \chi_r}$, donc $k = \sqrt{1 + \chi_r} \frac{\omega}{c}$; ainsi (en

confondant toujours ω_{res} et ω_0) :

$$\delta T_{\text{res}} = kL \frac{\alpha \omega_C^2 \tau}{(1 + \chi_r) \omega_0} = \frac{\sqrt{1 + \chi_r} \omega_{\text{res}} L}{c} \frac{\alpha \omega_C^2 \tau}{(1 + \chi_r) \omega_0} \approx \frac{L}{c} \frac{\alpha \omega_C^2 \tau}{\sqrt{1 + \chi_r}} \quad (40)$$

δT_{res} est donc proportionnelle à ω_C^2 , donc à B^2 .

• On a vu à la question III.4), Cf. expression (37) que $\omega_{\text{res}} - \omega_0 = \frac{\omega_C^2}{2\omega_0}$, l'écart $\omega_{\text{res}} - \omega_0$ est aussi quadratique, proportionnel à B^2 .

III.6) Posons d'après l'expression (38) : $T_{\text{res}}(B) = 1 - \delta$ où $\delta = kL \frac{\alpha \omega_C^2 \tau}{(1 + \chi_r) \omega_0} = \frac{L}{c} \frac{\alpha \omega_C^2 \tau}{\sqrt{1 + \chi_r}}$; on vérifiera que

$\delta \ll 1$. Soit I_0 l'intensité de l'onde incidente, I_n l'intensité de l'onde au sortir de la nième couche (T semble être le facteur de transmission en énergie, d'après les notations de la partie I);

comme $I_{n+1} = T_{\text{res}} I_n \Rightarrow I_n = (T_{\text{res}})^n I_0 = (1 - \delta)^n I_0 \approx (1 - n\delta) I_0$ car $\delta \ll 1$.

Donc, s'il y a N_C couches

$$\Delta T_{\text{res}} = N_C \delta = N_C \frac{L}{c} \frac{\alpha \omega_C^2 \tau}{\sqrt{1 + \chi_r}} \quad (41)$$

, proportionnel à N_C .

A.N. : Si $\omega_0 = 0,16$, alors $B = 10$ T ; on calcule $\Delta T_{\text{res}} = 1,8 \cdot 10^{-2}$... c'est ce qu'on retrouve sur la courbe ! (en effet $\hbar \omega_0 = 103$ meV correspond à $\omega_0 = 1,5 \cdot 10^{14}$ rad.s⁻¹).

III.7) Comparons par exemple les résonances pour $B_1 = 10$ T et $B_2 = 15$ T. On lit $\omega_0 : 102$ meV

- Pour B_1 : $\omega_{\text{res}} - \omega_0 = \Delta\omega(1) : 0,8$ meV et $\Delta T_{\text{res}}(1) = 2$ %.
- Pour B_2 : $\omega_{\text{res}} - \omega_0 = \Delta\omega(2) : 2,0$ meV et $\Delta T_{\text{res}}(2) = 4,8$ %.

D'après (37) et (41) $\Delta\omega$ et ΔT_{res} sont proportionnels à B^2 ; on devrait avoir $\frac{\Delta\omega(2)}{\Delta\omega(1)} = \frac{\Delta T_{\text{res}}(2)}{\Delta T_{\text{res}}(1)} = \left(\frac{B_2}{B_1}\right)^2$.

On calcule : $\left(\frac{B_2}{B_1}\right)^2 = 2,25$; $\frac{\Delta\omega(2)}{\Delta\omega(1)} = 2,5$; $\frac{\Delta T_{\text{res}}(2)}{\Delta T_{\text{res}}(1)} = 2,4$: c'est satisfaisant, vu la précision de la lecture.

(idéalement, il faudrait tracer $\Delta\omega$ d'une part et ΔT_{res} d'autre part en fonction de B^2 et d'en effectuer la régression linéaire ; cependant, la précision de la lecture des courbes semble un peu juste pour se lancer dans cette opération)

- Par ailleurs : $\omega_C = 0,16 \cdot \omega_0 = \frac{eB}{m}$ donne $m = 7,7 \cdot 10^{-32}$ kg = $0,084 \cdot m_0$.

Annexe : quelques tentatives d'interprétation ...

1) Partie III : existence de la force de rappel élastique $-m\omega_0^2 z \vec{e}_z$ agissant uniquement selon $\vec{e}_z$, c'est-à-dire transversalement par rapport à la couche nanométrique.

Les électrons sont liés au solide, ils sont donc coincés dans un puits de potentiel selon Oz, sur l'intervalle $\left[-\frac{L}{2}, +\frac{L}{2}\right]$: cette force de rappel élastique ne serait-elle pas une modélisation parabolique de ce puits de potentiel ?

2) Introduction de $\beta_{ij} = \frac{\chi_{ij}^{el}}{1 + \chi_r}$ à la question III.2).

La polarisation totale est $\vec{P} = \vec{P}_{el} + \vec{P}_r = \epsilon_0 \left([\chi_r] + [\chi^{el}] \right) \vec{E}$ où $[\chi_r]$ est la matrice diagonale d'élément χ_r .

L'étude de la propagation du champ électrique se fait à l'aide du vecteur $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 [\epsilon_r] \vec{E}$

En ne considérant que la polarisation selon $\vec{e}_y$, la relation de dispersion classique donne :

$$k_z^2 = \epsilon_{r,yy} \frac{\omega^2}{c^2} = (1 + \chi_r + \chi_{yy}^{el}) \frac{\omega^2}{c^2} = (1 + \chi_r) \left(1 + \frac{\chi_{yy}^{el}}{1 + \chi_r} \right) \frac{\omega^2}{c^2} = (1 + \chi_r) (1 + \beta_{yy}) \frac{\omega^2}{c^2}$$

Voici venir ce coefficient β_{yy} .

3) Origine de la loi $T = 1 + kL \text{Im}(\beta_{yy})$ introduite par l'énoncé au III.5)

Comme on peut supposer $1 + \chi_r \gg |\chi_{yy}^{el}|$, un d.l. donne :

$$\underline{k}_z = \sqrt{1 + \chi_r} (1 + \beta_{yy})^{1/2} \frac{\omega}{c} = \sqrt{1 + \chi_r} \left(1 + \frac{\beta_{yy}}{2} \right) \frac{\omega}{c} = k' - ik'', \quad k'' = -\frac{\sqrt{1 + \chi_r}}{2} \text{Im}(\beta_{yy}) \frac{\omega}{c}.$$

D'après l'énoncé le milieu hors de la couche a une polarisabilité χ_r , le vecteur d'onde hors de la couche est donc

$$k = \sqrt{1 + \chi_r} \frac{\omega}{c}, \quad k'' = -\frac{k}{2} \text{Im}(\beta_{yy}).$$

Dans ces conditions, il y a propagation le long de Oz avec absorption, et $E_y(z, t) = E_y^0 \exp(-k''z) \exp[i(\omega t - k'z)]$.

L'intensité étant en particulier proportionnelle à $\langle E_y^2(z, t) \rangle$, on a $I(z) = I(z=0) \exp(-2k''z)$

Ainsi, $I_{\text{sortie}} = I_{\text{incident}} \exp(+kL \text{Im}(\beta_{yy})) \approx I_{\text{incident}} (1 + kL \text{Im}(\beta_{yy}))$ si $|kL \text{Im}(\beta_{yy})| \ll 1$, ce qui est le cas ici. C'est bien l'expression proposée au III.5).