

From Hagen-Poiseuille to Lucas-Washburn

1 目的

ハーゲン - ポアズイユの式からルーカスウォッシュバーンを導出する

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8\eta L} \quad \rightarrow \quad l(t) = \sqrt{\frac{R\sigma \cos\theta}{2\eta}} t$$

2 導出

ハーゲン - ポアズイユの式は圧力駆動の非圧縮ニュートン流体の断面積一定チャンネル内定常流れである。長さ L 、半径 R の円柱状毛管で体積流量 $Q = \frac{dV}{dt}$ を粘性係数 η 、毛管両端圧力 ΔP の関数で与える。

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8\eta L} \quad (1)$$

毛管力駆動の流れでは毛管両端（流入側と流出側）大気圧 p_0 であり、毛管入口と位置 l における圧力差 Δp は濾過現象の駆動力となり、ラプラス圧と呼ばれる。これは界面の曲率に起因し、表面張力 σ と接触角 θ と形状の関数であるYoung-Laplaceの式で与えられる。円柱状の毛管では以下の式で与えられる。

$$\Delta p = \frac{2\sigma \cos\theta}{R} \quad (2)$$

式(2)を式(1)に代入し、圧力差は界面（メニスカス）と毛管入口なので、その距離（浸透距離）を l とすると

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi R^4}{8\eta l} \frac{2\sigma \cos\theta}{R}$$

断面積 $S = \pi R^2$ で割る。

$$\frac{dV}{S dt} = \frac{\pi R^4}{8\eta l} \frac{2\sigma \cos\theta}{R \pi R^2}$$

左辺は浸透距離 l なので、有名なLucas-Washburnの式 がえられる。

$$\frac{dl}{dt} = \frac{R\sigma \cos\theta}{4\eta l} \quad (3)$$

両辺に l をかけて積分すると・・・

$$l \, dl = \frac{R\sigma \cos\theta}{4\eta} dt$$

$$\frac{1}{2}l^2 + C = \frac{R\sigma \cos\theta}{4\eta} t$$

$$l^2 + 2C = \frac{R\sigma \cos\theta}{2\eta} t$$

時刻 $t = 0$ での初期位置を0とすると, $C = 0$ となり, 時刻 t での界面の位置, すなわち浸透距離 $l(t)$ は以下の式で与えられる.

$$l(t) = \sqrt{\frac{R\sigma \cos\theta}{2\eta} t} \quad (4)$$

ここで θ は静的接触角であり, 直管状の毛管では浸透距離 $l(t)$ は時間の $\frac{1}{2}$ 乗に比例する.