

{Nota bene : ce texte est l'énoncé scanné, mis au format Word 97, sans respecter la mise en forme initiale, les formules mathématiques créées par le code de champ EQ, utilisant les fontes Arial, Symbol, et Lucida Bright Math Italic. Aucune garantie de conformité à l'original, ni correction d'éventuelles erreurs. Merci de faire vos remarques par mel à [yan.naessens@ac-lyon.fr](mailto:yan.naessens@ac-lyon.fr)}

J. 6 000814

A 2006 MATH. 1 PSI

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.

ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,  
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,  
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,  
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2006

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière PSI

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

L'usage d'ordinateur ou de calculatrice est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :

ENSTIM, INT, TPE-EIVP, Cycle international

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la, première page de la copie :

MATHÉMATIQUES 1 - PSI.

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Tournez la page S.V.P.

On rappelle que la fonction Gamma est définie pour tout réel  $z > 0$  par

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Cette fonction possède les deux propriétés suivantes :

- pour tout réel  $z$  strictement positif,  $\Gamma(z + 1) = z \Gamma(z)$  ;

- il est admis que  $\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) = \Gamma(\alpha + \beta) \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)$ ,

pour tous réels  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$ .

I. Fonctions hypergéométriques

1) Soit  $z$  un réel strictement positif. Déterminer des conditions nécessaires et suffisantes sur les réels  $\alpha$  et  $\beta$  pour que la fonction

$$t \mapsto t^{\alpha-1} (1+t)^{\beta-1} e^{-zt}$$

soit intégrable sur  $t^+$ .

2) Soit  $z$  un réel strictement positif. Déterminer des conditions nécessaires et suffisantes sur les réels  $\alpha, \beta$  pour que la fonction

$$t \mapsto (-t)^{\alpha-1} (1+t)^{\beta-1} e^{-zt}$$

soit intégrable sur  $] -1, 0 [$ .

On fixe maintenant deux réels  $\alpha > 0, \beta > 0$  et on définit les fonctions

$$K(z) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} (1+t)^{\beta-1} e^{-zt} dt,$$

$$I_1(z) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-zt} dt,$$

$$I_2(z) = \int_{-1}^0 (-t)^{\alpha-1} (1+t)^{\beta-1} e^{-zt} dt.$$

pour tout réel strictement positif  $z$ .

3) Montrer que  $I_1$  et  $I_2$  sont continûment dérivables sur  $\mathbb{C}^+$  et que

$$I_1' = -K \text{ et } I_2' = -K + I_2. \text{ (E)}$$

4) Montrer que  $z K = \alpha I_1 + \beta I_2$ .

5) En déduire que le vecteur  $I(z) = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$  est solution d'un système différentiel linéaire sur  $\mathbb{C}^+$  :

$$I'(z) = A(z) I(z), \text{ (S)}$$

où  $A(z)$  est une matrice que l'on explicitera.

6) Montrer que  $K$  satisfait sur  $\mathbb{C}^+$  une équation différentielle linéaire d'ordre 2 que l'on explicitera.

On définit les fonctions

$$L(z) = \alpha \beta \, dt,$$

$$J_1(z) = -\alpha \beta \, dt,$$

$$J_2(z) = \alpha \beta dt.$$

7) Montrer que les fonctions  $J_1, J_2, L$  satisfont les mêmes relations que respectivement,  $I_1, I_2, K$  définies dans l'équation (E), que le vecteur

$J = \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \end{pmatrix}$  est solution du même système différentiel que  $I$  (voir (S))

et que  $L$  satisfait la même équation différentielle que  $K$  (trouvée à la question 6).

Tournez la page S.V.P.

II. Résolution de (S)

8) Montrer que pour tout  $t > 0$  et  $z \geq 1$

$$\beta \leq \beta \beta \beta \geq \beta \beta \leq$$

9) En déduire que pour tous réels  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$

$\int_0^\infty \alpha \beta dt$  est équivalent à  $\Gamma(\alpha) z^{-\alpha}$  quand  $z$  tend vers  $+\infty$ , c'est-à-dire que

$$\left( \int_0^\infty \alpha \beta dt - \Gamma(\alpha) z^{-\alpha} \right) = o(z^{-\alpha}) \text{ quand } z \text{ tend } +\infty.$$

10) Montrer, pour tous réels  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$  et pour tout réel  $z$ , l'identité :

$$\int_0^\infty \alpha \beta dt = e z^{-\beta} \int_0^\infty \beta \alpha du.$$

11) En déduire que cette intégrale est équivalente à  $\Gamma(\beta) e z^{-\beta}$  quand  $z$  tend vers  $+\infty$ .

12) En déduire que

$\int_0^\infty \alpha \beta dt$  est équivalent à  $\Gamma(\beta) e z^{-\beta}$  quand  $z$  tend vers  $+\infty$ .

Pour tous réels  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $z > 0$  on définit le Wronskien

$$w(z) = \det$$

4

13) Donner un équivalent de  $w(z)$  quand  $z$  tend vers  $+\infty$ .

14) Montrer que  $w$  satisfait une équation différentielle linéaire d'ordre 1 que l'on explicitera.

15) Montrer que, pour tout  $z$  réel strictement positif,  $w(z) = \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) z^{-\alpha-\beta}$  ez.

16) Exprimer la forme d'une solution générale du système différentiel (S).

III. Développement en série

17) Montrer que si  $\beta$  est un entier strictement positif

$$z^{\alpha+\beta} dz = z^{-\alpha-\beta+1} P(z)$$

où  $P(z)$  est un polynôme de degré  $\beta - 1$  en la variable  $z$ , que l'on explicitera.

Pour tout réel  $x$  et tout entier positif  $n$ , on pose

$$(x, n) = ,$$

pour  $n > 0$  et  $(x, 0) = 1$ .

18) Soient  $a$  et  $b$  deux réels. On suppose de plus que  $b$  n'est pas un entier négatif. Calculer le rayon de convergence de la série entière de terme général

$$u_k =$$

On note alors pour tout réel  $x$   $F(a, b, x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k$ .

5

Tournez la page S.V.P.

19) Montrer pour tout réel strictement positif  $z$ , l'identité suivante :

$$\alpha \beta \Gamma(\alpha + \beta) = \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) F(\alpha, \alpha + \beta, z).$$

20) Montrer directement (sans utiliser la partie I) que la fonction  $y(x) = F(a, b, x)$  est solution sur  $\mathbb{I}$  de l'équation différentielle suivante

$$x y''(x) + (b - x) y'(x) - a y(x) = 0.$$

21) Montrer que si  $b$  n'est pas un entier, on peut trouver des réels  $a'$  et  $b'$  tels que  $y(z) = z^{1-b} F(a', b', z)$  soit solution sur  $\mathbb{I}^{+*}$  de la même équation différentielle.

FIN DU PROBLÈME