

Ας παίξουμε με ένα flyboard

Το όχημα του σχήματος λέγεται flyboard και ενοικιάζεται το καλοκαίρι για διασκέδαση σε παραλίες με watersports. Η μάζα του (μαζί με το σωλήνα παροχής) είναι $m_1 = 40\text{kg}$, ενώ η κοπέλα που το χρησιμοποιεί έχει μάζα $m_2 = 60\text{kg}$. Ο σωλήνας εισόδου και τα ακροφύσια εξόδου του νερού, είναι κατακόρυφα. Το νερό θεωρείται ιδανικό ρευστό, η ροή στρωτή και μόνιμη, η πυκνότητα του νερού θεωρείται $\rho = 1000\text{kg/m}^3$ και η βαρυτική επιτάχυνση $g = 10\text{m/s}^2$.



- i) Εξηγήστε ποιοτικά γιατί το σύστημα μπορεί να ισορροπεί.
 ii) Τα μέτρα v_1 , v_2 των ταχυτήτων, με τις οποίες εξέρχεται το νερό από τα ακροφύσια των σωλήνων Σ_1 και Σ_2 έχουν σχέση:

α) $v_1 = v_2$ β) $v_1 > v_2$ γ) $v_1 < v_2$

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

- iii) Αν ο κατακόρυφος σωλήνας εισόδου Σ του νερού, έχει εμβαδόν διατομής $A = 40\text{cm}^2$ και διακλαδίζεται σε δύο σωλήνες Σ_1 , Σ_2 με εμβαδά διατομής $A_1 = A_2 = A/10 = 4\text{cm}^2$, που εξέρχονται κατακόρυφα, υπολογίστε το μέτρο της ταχύτητας του νερού στον κεντρικό σωλήνα.

- iv) Ο κεντρικός σωλήνας ανεβάζει το νερό σε ύψος $h = 4\text{m}$ από την επιφάνεια της θάλασσας, με τη βοήθεια αντλίας, που βρίσκεται πάνω σε παρακείμενο σκάφος. Αν η άντληση γίνεται πολύ κοντά στην επιφάνεια της θάλασσας, ποια η ισχύς αυτής της αντλίας;

Απάντηση

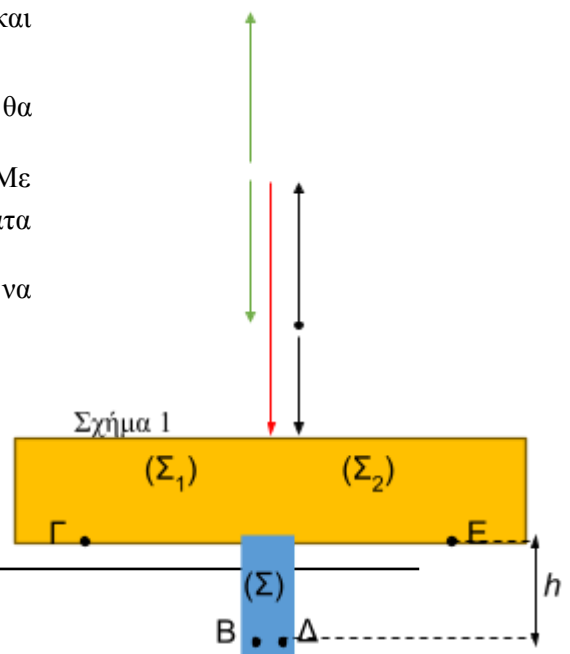
- i) Το νερό εισερχόμενο στους σωλήνες Σ_1 , Σ_2 μεταβάλλει την ορμή του (σχήμα 1), αφού αλλάζει κατά 180° η φορά της και

$$\Sigma \vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} \quad \text{θα}$$

σύμφωνα με τον 2ο Νόμο του Newton

δέχεται δύναμη $\vec{F}_v$ από τα τοιχώματα των σωλήνων. Με βάση τον 3ο Νόμο του Newton θα εξασκήσει στα τοιχώματα μια αντίθετη προωστική δύναμη $\vec{F}_{\pi p}$, η οποία μπορεί να εξουδετερώσει το βάρος του συστήματος.

- ii) Θεωρούμε δύο ρευματικές γραμμές ΒΓ και ΔΕ, με τα Β, Δ μέσα στο σωλήνα Σ στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο και τα Γ, Ε στην έξοδο στην ατμόσφαιρα στους σωλήνες Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα (σχήμα 2).



Παίρνουμε την εξίσωση Bernoulli σε κάθε μια από αυτές τις ρευματικές γραμμές:

$$p_B + \frac{1}{2} \rho v^2 = p_\Gamma + \rho gh + \frac{1}{2} \rho v_1^2 \quad (1)$$

$$p_\Delta + \frac{1}{2} \rho v^2 = p_E + \rho gh + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \quad (2)$$

Προφανώς για τις πιέσεις στα Β και Δ ισχύει

$$p_B = p_\Delta \quad (3)$$

$$\text{και } p_\Gamma = p_E = p_{\alpha\mu} \quad (4)$$

Από τις (1), (2), (3) και (4)

$$p_{\alpha\mu} + \rho gh + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_{\alpha\mu} + \rho gh + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \rho v_1^2 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 \Leftrightarrow$$

$$v_1 = v_2 \quad (5)$$

Σωστή απάντηση (α)

iii) Η εισερχόμενη παροχή ισούται με τη συνολική εξερχόμενη:

$$\Pi_{in} = \Pi_{out} \Leftrightarrow A \cdot v = \frac{A}{10} v_1 + \frac{A}{10} v_2 \Leftrightarrow$$

$$v_1 + v_2 = 10v \xrightarrow{(5)} 2v_1 = 10v \Leftrightarrow$$

$$v_1 = v_2 = 5v \quad (6)$$

Έστω ότι στον κεντρικό σωλήνα εισέρχεται, σε στοιχειώδες χρονικό διάστημα dt , μάζα νερού dm . Επειδή οι σωλήνες εξόδου του νερού είναι όμοιοι οι εξερχόμενες μάζες θα είναι

$$dm_1 = dm_2 = \frac{dm}{2} \quad (7)$$

Η μεταβολή της ορμής του νερού είναι

$$d\vec{p} = d\vec{p}_{out} - d\vec{p}_{in} \Leftrightarrow d\vec{p} = dm_1 \cdot \vec{v}_1 + dm_2 \cdot \vec{v}_2 - dm \cdot \vec{v} \Leftrightarrow$$

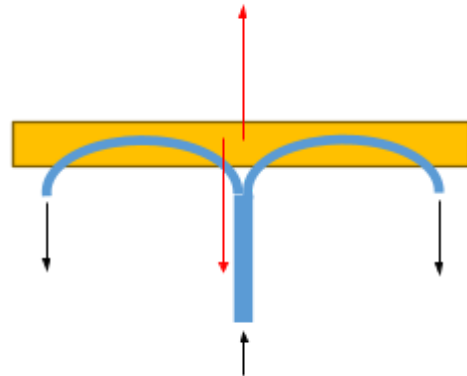
$$dp = dm_1 \cdot v_1 + dm_2 \cdot v_2 - dm \cdot (-v) \xrightarrow{(6),(7)} dp = \frac{dm}{2} \cdot 5v + \frac{dm}{2} \cdot 5v - dm \cdot (-v) \Leftrightarrow$$

$$dp = 6dm \cdot v \quad (8)$$

Η προωστική δύναμη, με βάση το 2ο Νόμο Newton θα είναι

$$F_{\pi p} = \frac{dp}{dt} \xrightarrow{(8)} F_{\pi p} = \frac{6 \cdot dm \cdot v}{dt} \Leftrightarrow F_{\pi p} = \frac{6 \cdot d(\rho V) \cdot v}{dt} \Leftrightarrow F_{\pi p} = \frac{6 \rho \cdot dV \cdot v}{dt} \Leftrightarrow$$

$$F_{\pi p} = 6 \rho \Pi v \Leftrightarrow$$



$$F_{\pi p} = 6 \rho A v^2 \quad (9)$$

Για να ισορροπεί το flyboard πρέπει

$$\sum \vec{F} = 0 \Leftrightarrow F_{\pi p} = W_{ol} \xrightarrow{(9)} 6 \rho A v^2 = m_{ol} g \Leftrightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{m_{ol} g}{6 \rho A}}$$

Με αντικατάσταση βρίσκουμε:

$$v = \sqrt{\frac{(40 + 60) \cdot 10}{6 \cdot 10^3 \cdot 40 \cdot 10^{-4}}} \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{1000}{24 \cdot 10^4 \cdot 10^{-4}}} \Leftrightarrow v = 5\sqrt{5/3} \text{ m/s}$$

Η παροχή πρέπει να είναι $\Pi = A \cdot v = 40 \cdot 10^{-4} \cdot 5\sqrt{5/3} = 2\sqrt{5/3} \cdot 10^{-2} \text{ m}^3/\text{s}$

iv) Θα εφαρμόσουμε τη διατήρηση ενέργειας για μία μάζα υγρού dm κατά τη μετακίνησή της από την είσοδο ως την έξοδο από τους σωλήνες μεταφοράς.

$$dE_{\mu\eta\chi} + dE_{\pi\rho\sigma\phi} - dE_{\alpha\pi\lambda} = dE_{\mu\eta\chi} \Leftrightarrow$$

$$dK_1 + dU_{\beta\alpha\rho,1} + dE_{av\tau} + dW_{F_1} + dW_{F_2} = dK_2 + dU_{\beta\alpha\rho,2} \Leftrightarrow$$

$$0 + 0 + dE_{av\tau} + dW_{F_1} + dW_{F_2} = dK_2 + dU_{\beta\alpha\rho,2} \Leftrightarrow$$

$$dE_{av\tau} = dK_2 + dU_{\beta\alpha\rho,2} - dW_{F_1} - dW_{F_2}$$

$$\text{Όμως } dW_{F_1} > 0 \text{ και } dW_{F_2} = dW_{F_{atm}} < 0 \text{ άρα}$$

$$dE_{av\tau} = dK_2 + dU_{\beta\alpha\rho,2} - (p_1 dV) - (-p_2 dV) \Leftrightarrow$$

$$dE_{av\tau} = \frac{1}{2} \frac{dm}{2} v_1^2 + \frac{1}{2} \frac{dm}{2} v_2^2 + dm \cdot g \cdot h - p_1 dV + p_2 dV \Leftrightarrow$$

$$\frac{dE_{av\tau}}{dt} = \frac{1}{4} \frac{dm}{dt} (v_1^2 + v_2^2) + \frac{dm \cdot g \cdot h}{dt} - \frac{p_1 dV}{dt} + \frac{p_2 dV}{dt} \Leftrightarrow$$

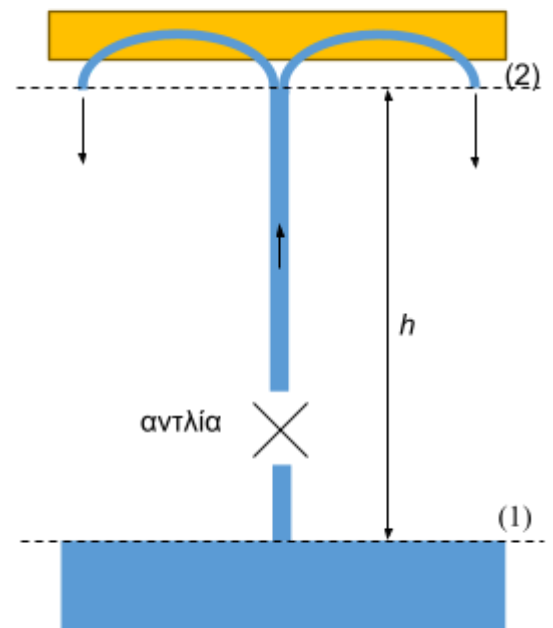
$$\frac{dE_{av\tau}}{dt} = \frac{1}{4} \frac{\rho \cdot dV \cdot 2v_1^2}{dt} + \frac{\rho \cdot dV \cdot g \cdot h}{dt} - \frac{p_1 dV}{dt} + \frac{p_2 dV}{dt}$$

$$P_{av\tau} = \frac{1}{2} \rho \Pi v_1^2 + \rho \Pi \cdot g \cdot h - p_1 \cdot \Pi + p_2 \cdot \Pi \Leftrightarrow$$

$$P_{av\tau} = \left[\frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho \cdot g \cdot h + p_2 - p_1 \right] \Pi$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $p_1 = p_2 = p_{atm}$ και

$$v_1 = 5 \cdot 5\sqrt{5/3} = 25\sqrt{5/3} \text{ m/s} \text{ με αντικατάσταση βρίσκουμε}$$



$$P_{\text{αντ}} = \left[\frac{1}{2} \cdot (25\sqrt{5/3})^2 + 10 \cdot 4 \right] \cdot 10^3 \cdot 2\sqrt{5/3} \cdot 10^{-2} =$$

$$\left(\frac{1}{2} \cdot 1042 + 40 \right) \cdot 20\sqrt{5/3} = 11220\sqrt{5/3} \approx 14485W$$

δηλαδή περίπου $14,5kW$ ή $19,5HP$.

Σχόλιο

Η χρήση του flyboard πρέπει να γίνεται με ειδικό εξοπλισμό και κάτω από την επίβλεψη εκπαιδευτή, γιατί ενέχει μεγάλο κίνδυνο τραυματισμού, για ανεκπαίδευτο αναβάτη – όπως ισχύει άλλωστε σε όλα τα θαλάσσια watersport.

Α ν δ ρ έ α ς Ρ ι ζ ό π ο υ λ ο ς