

11 класс

1. Сравнить числа:

а) $\sqrt{1968} + \sqrt{1971}$ и $2\sqrt{1970}$ б) $\sin(\cos x)$ и $\cos(\sin x)$

2. Найти множество значений функции $f(x) = 10^x + 3 \cdot 10^{-x}$.

3. Сколько корней имеет уравнение $x^4 - 4x + 1 = 0$?

4. Составить уравнения окружностей, касающихся двух прямых $7x - 5y - 5 = 0$ и $x + y + 13 = 0$, причем одной из них в точке $M(1, 2)$.

5. Периметр равнобокой трапеции, описанной около круга, равен P .

Найти радиус этого круга, если острый угол при основании равен α .

6. Решить систему для всякого параметра a :

$$\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = a^2 \\ \sin y \cdot \cos x = a \end{cases}$$

7. Изобразить на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $|x - y| + |x - 1| < 1$.

8. Найдется ли такое натуральное число n , что $5^n - 1$ делится на 3^{1997} ?

9. Решить неравенство $3\sin(2\pi x) \geq \sqrt{2}\sin(4\pi x) + 3\cos(2\pi x) + \sqrt{32}$

10. Составить уравнения касательных к кривой $y = x^2 - 4x + 3$, проходящих через точку $M(2, -5)$. Сделать чертеж.

Последовательности

1. Является ли последовательность $a_n = \frac{2^n}{n!}$ монотонной?

2. Является ли последовательность $a_n = \frac{3 + n^2}{2 + n^2}$ ограниченной?

3. Найти наибольшие и наименьшие члены последовательности

1) $a_n = 8n - n^2 - 5$; 2) $a_n = 2n + 32/n$

Пределы

Вычислить:

$$1. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2(5x)}{1 + \cos(x)} \qquad 2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-1} \right)^{\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right)}}$$

Теория вероятностей

Задача 1

На столе лежат рубашкой вверх три карты. Известно, что среди них одна красная и две чёрных. Вам надо угадать красную карту. Вы делаете выбор, после чего ведущий, посмотрев остальные две карты открывает чёрную (если они обе чёрные, то с равной вероятностью любую из них). После этого Вам предлагается изменить своё мнение или остаться при своём.

Какова вероятность угадать красную карту, если

- а) Вы остаётесь при своём мнении,
- б) Вы меняете свой выбор,
- в) Вы выбираете карту из оставшихся случайным образом.

Задача 2

Игровой автомат с равной вероятностью выкидывает от 3 до 6 кубиков. Какова вероятность, что шестёрка выпадет хотя бы один раз? Составить закон распределения количества выпавших шестерок, найти мат. ожидание и дисперсию.

Информатика

1. «Расшифровка»

Компания по защите интеллектуальной собственности решила повысить уровень защищенности своих операционных систем путем шифрования всех сообщений, передаваемых внутри ее локальных сетей. Любое допустимое в компании сообщение представляет собой строку $S = s_1 s_2 \dots s_n$, состоящую исключительно из букв латинского алфавита.

Шифрование сообщения осуществляется в K фаз. На каждой фазе строка S заменяется строкой, в которой сначала располагаются все буквы строки S , стоявшие на позициях с номерами, являющимися простыми числами (первый блок), а затем – все остальные буквы (второй блок). Напомним, что число называется простым, если оно – натуральное и имеет ровно два различных натуральных делителя. Относительный порядок букв в каждом из двух блоков остается неизменным. Например, строка $S = abcdefgh$ на первой фазе шифруется в строку $S = bcegadfh$. Если осуществляется вторая фаза шифрования, то строка примет вид $S = ceafbgdh$. После передачи зашифрованного сообщения по сети оно должно быть дешифровано, чтобы получатель смог прочитать исходную запись.

Требуется написать программу, осуществляющую дешифрование пришедшей по сети строки.

Технические требования:

Ввод данных из текстового файла input.txt. Вывод данных в текстовый файл output.txt.

Ограничение по времени тестирования: 1 секунда на один тест

Формат входных данных:

Первая строка содержит натуральное число K ($K \leq 100$). Далее - строка, которая содержит сообщение S после K фаз шифрования, состоящая из n ($1 \leq n \leq 250$) букв латинского алфавита.

Формат выходных данных:

В файл вывести только одну дешифрованную строку S .

Пример:

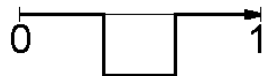
Входной файл	Выходной файл
2 CEAFBGDH	ABCDEFGH
1 BAAAACB	ABACABA

2. «Орнамент».

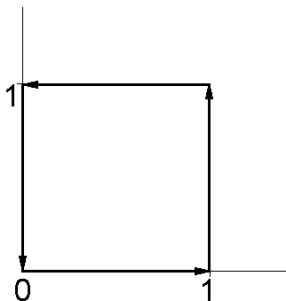
Фирма Motor готовится к выпуску очередной партии джинсов. На них будет вышиты специальные самоподобные орнаменты. Для ускорения процесса разработки фирма обращается к участникам олимпиады с заказом: помочь вычислить размеры орнаментов и их длину.

Орнамент строится следующим образом.

Дизайнеры разрабатывают шаблон, который представляет собой ломаную на плоскости с концами $A(0, 0)$ и $B(1, 0)$, со сторонами, параллельными осям координат.

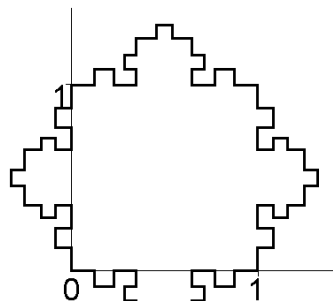


Затем берется единичный квадрат с вершинами $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$.



Шаг 1

Накладываем шаблон на нижний отрезок, совмещая начала и концы с учетом направлений. Затем каждый отрезок квадрата заменяем шаблоном, повернутым против часовой стрелки так, чтобы концы шаблона совпали с концами отрезка.



Шаг 2

Сдвигаем шаблон вдоль всей границы получившегося многоугольника. При этом каждый отрезок границы заменяем на шаблон размера соответствующего данному отрезку.

Задания

1. Требуется для шаблона, приведенного в примере и для заданного количества шагов n

- А) нарисовать получающийся орнамент-многоугольник;
- В) найти его длину, то есть периметр многоугольника;
- С) найти его ширину, то есть максимум разности абсцисс точек многоугольника.

2. Пусть шаблон – это ломаная с вершинами:

$(0, 0)$, $(0.35, 0)$, $(0.35, -0.25)$, $(0.65, -0.25)$, $(0.65, 0)$, $(1, 0)$.

А) Найдите длину и ширину орнамента, если число шагов $n=3$.

Б) Выведите формулу длины и ширины орнамента с этим шаблоном для произвольного натурального n .

3. Напишите программу, которая для заданного числа шагов n , числа вершин в шаблоне m и последовательности координат (x_i, y_i) вершин шаблона ($1 \leq i \leq m$) выводит на экран длину и ширину соответствующего орнамента-многоугольника. Точность ответа должна быть не меньше двух знаков после запятой. Если Ваша программа еще и выводит рисунок орнамента, то жюри это непременно учтет.

Примечание. Можно считать, что любой орнамент – ломаная без самопересечений.

Параметры

1. Найдите все значения a , при которых уравнение

$$\left(|x| + (a-1)^2 x^2 - a^2 + 2a \right)^2 - 4x^4 = 1 \quad \text{имеет 3 корня.}$$

2. При каких целых отрицательных n функция $f(x) = \cos(7nx)\sin(25x/n^2)$ является периодической с периодом $T=7\pi$?