

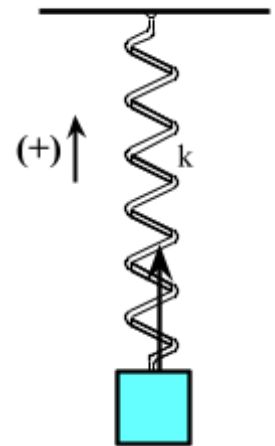
Ταλάντωση εντός ύλης

Το σώμα μάζας $m=1\text{kg}$ του σχήματος είναι δεμένο στο κάτω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k=100\text{N/m}$ ενώ το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι ακλόνητα στερεωμένο σε οροφή και αρχικά ισορροπεί ακίνητο.

Την χρονική στιγμή $t_0=0$ ασκούμε στο σώμα σταθερή δύναμη μέτρου $F=10\text{N}$ με φορά προς τα πάνω.

i. Να αποδείξετε ότι το σώμα θα εκτελέσει αρμονική ταλάντωση και να βρείτε την εξίσωση της απομάκρυνσής του θεωρώντας ως θετική φορά την προς τα πάνω.

Την πρώτη στιγμή που το σώμα βρίσκεται στην ανώτερη ακραία θέση της ταλάντωσης του, καταργείται η δύναμη F και το σώμα εκτελεί μια νέα αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D=k$.



ii. Να υπολογίσετε το λόγο της αρχικής ενέργειας ταλάντωσης προς την τελική ενέργεια ταλάντωσης που θα εκτελέσει το σώμα m .

iii. Να βρείτε την εξίσωση της απομάκρυνσης της νέας ταλάντωσης που θα εκτελέσει το σώμα.

iv. Να υπολογίσετε σε ποια θέση θα έπρεπε να καταργηθεί η δύναμη F ώστε το σώμα να έχει το ίδιο πλάτος και στις δύο ταλαντώσεις που θα εκτελέσει πριν και μετά την κατάργηση της δύναμης.

Δίνεται: $g=10\text{m/s}^2$

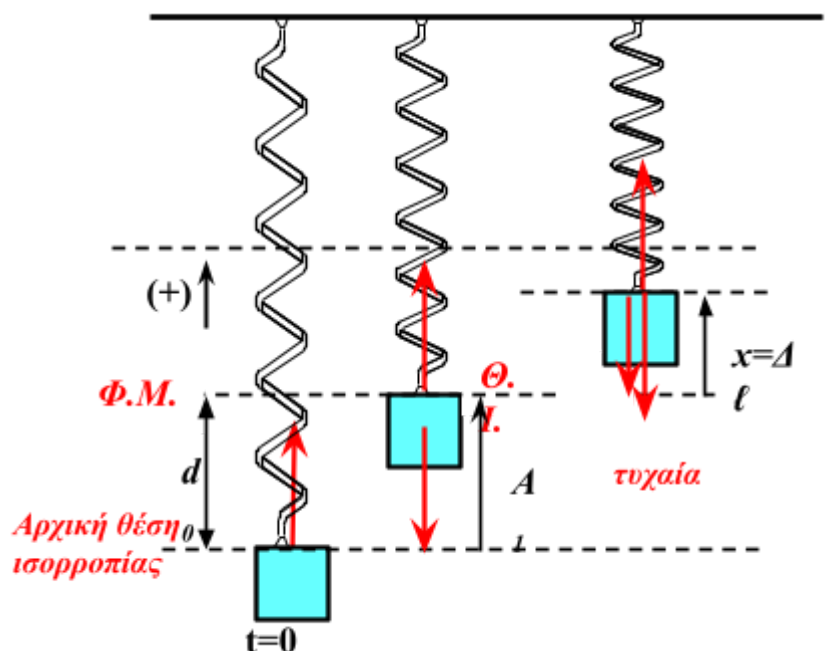
Απάντηση

i)

Από την αρχική θέση ισορροπίας Θ.Ι. πριν την άσκηση της δύναμης έχουμε:

$$\sum F \Rightarrow F_{\text{ελ.}} - W = 0 \Rightarrow$$

$$kd_0 = mg \Rightarrow d_0 = \frac{mg}{k} = 0,1\text{m}.$$



Στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης με τη δράσης της δύναμης προκύπτει:

$$\sum F \Rightarrow \overset{(+)\uparrow}{F_{ελ}} - W = 0 \Rightarrow k \ell - mg = 0 \Rightarrow \ell = \frac{mg}{k}$$

Η θέση ισορροπίας συμπίπτει με τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου. Έτσι η απομάκρυνση x του σώματος από τη θέση ισορροπίας ισούται με την απομάκρυνση $\Delta \ell$ του ελατηρίου από το φυσικό μήκος.

Σε μια τυχαία θέση που απέχει x από τη θέση ισορροπίας προκύπτει:

$$\sum F \Rightarrow \overset{(+)\uparrow}{F_{ελ}} - F_{10} - W = 0 \Rightarrow 100 \Delta \ell - 100 = 100 \Rightarrow \Delta \ell = x \Rightarrow \sum F = -kx$$

Επομένως εκτελεί αρμονική ταλάντωση με $D=100\text{N/m}$ και $\omega=10\text{rad/s}$.

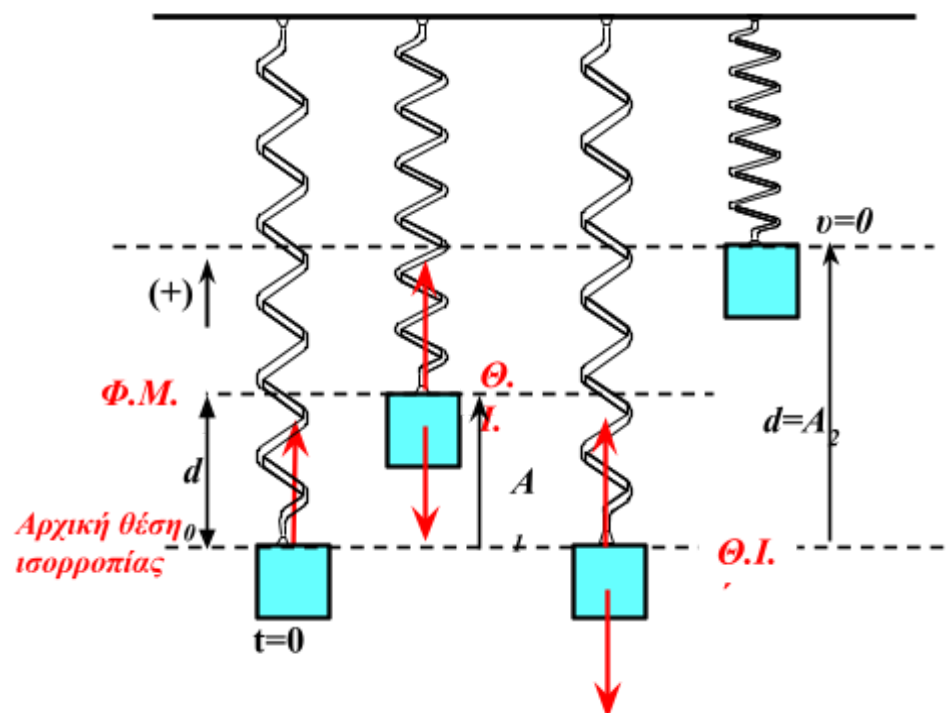
Το σώμα ξεκινά την $t=0$ ταλάντωση με αρχική ταχύτητα $v_0=0$ που σημαίνει ότι η αρχική θέση ισορροπίας είναι η κάτω ακραία θέση της ταλάντωσης. Έτσι το πλάτος $A_1=d_0=mg/k=0,1\text{m}$.

Με θετική φορά την πάνω το σώμα ξεκινώντας από την κάτω ακραία αρνητική θέση θα έχει αρχική φάση $\phi_0=3\pi/2\text{ rad}$.

$$\text{Επομένως } x=0,1\cdot\eta\mu(10t+3\pi/2), \text{ S.I.}$$

ii) Το σώμα εκτελεί ταλάντωση γύρω από το φυσικό μήκος με πλάτος $A_1=0,1\text{m}$. Μόλις καταργηθεί η δύναμη, το σώμα εκτελεί νέα ταλάντωση με θέση ισορροπίας τη θέση που αρχικά ηρεμούσε πριν δράσει η δύναμη F . Η θέση που καταργείται η δύναμη παραμένει ακραία θέση για τη νέα ταλάντωση ($v=0$) η οποία όμως απέχει από τη Θ.Ι. απόσταση $d=2A_1=0,2=A_2$.

Συνεπώς:



$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{1}{2}k \cdot A_1^2}{\frac{1}{2}k \cdot A_2^2} = \frac{A_1^2}{A_2^2} = \frac{1}{4}$$

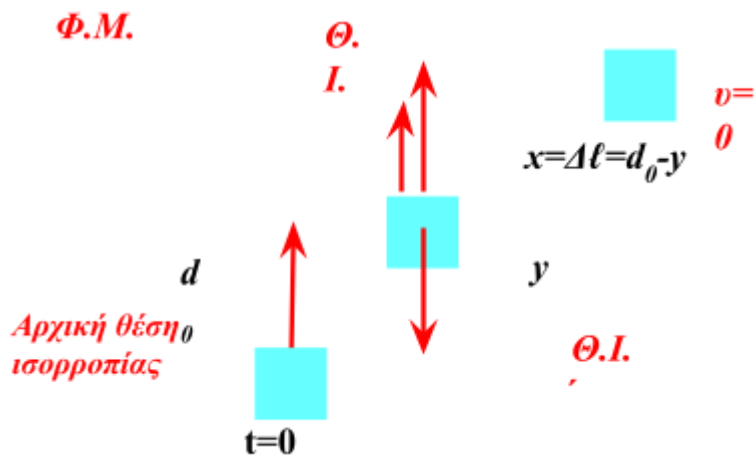
iii)

Το σώμα θα φτάσει στην αρχική ακραία θέση του την χρονική στιγμή $t_1 = T_1/2 = 0,1\pi$ s.
 Η καινούργια ταλάντωση ξεκινά από την πάνω θετική ακραία θέση με πλάτος $A_2 = 0,2\text{m}$, $\omega' = 10\text{r/s}$ και αρχική φάση $\phi_0' = \pi/2$ rad

$$\text{Επομένως } y = 0,2 \cdot \eta\mu[10(t - 0,1\pi) + \pi/2], \text{ S.I.}$$

iv)

Αρχικά το σώμα εκτελεί ταλάντωση με πλάτος $A_1 = 0,1\text{m}$ γύρω από τη θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου και κάτω ακραία θέση, τη θέση που αρχικά ηρεμούσε το σώμα πριν την δράση της δύναμης. Μετά την κατάργηση της δύναμης το σώμα εκτελεί ταλάντωση γύρω από την θέση που αρχικά ηρεμούσε πριν την δράση της δύναμης. Για να έχει το ίδιο πλάτος πριν και μετά την κατάργηση της δύναμης θα πρέπει για την νέα ταλάντωση η θέση του φυσικού μήκους να είναι η πάνω ακραία θέση. Έτσι όταν καταργηθεί η δύναμη το σώμα θα φτάσει στο φυσικό μήκος με μηδενική ταχύτητα.



Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας από την αρχική θέση που δρά η δύναμη έως τη θέση στο φυσικό μήκος του ελατηρίου που φτάνει το σώμα με μηδενική ταχύτητα.

$$\begin{aligned} K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} &= W_F + W_w + W_{F_{\text{ελ}}} \rightarrow \\ 0 - 0 &= F \cdot y - w \cdot d_0 + \frac{1}{2} \cdot k \cdot d_0^2 - 0 \rightarrow \\ 0 &= 10 \cdot y - 10 \cdot 0,1 + \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 0,1^2 \rightarrow 10 \cdot y = 0,5 \rightarrow y = 0,05\text{m} \end{aligned}$$

Η από τις ενέργειες της ταλάντωσης πριν και μετά την κατάργηση της δύναμης ισχύει:

$$E_1 = E_2 \rightarrow K + U_T = K' + U_T' \xRightarrow{K=K'} \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot y^2 \rightarrow x = y$$

Όμως $x+y=d_0 \rightarrow y=d_0/2$