

CHƯƠNG 3: NGUYÊN HÀM -TÍCH PHÂN -ỨNG DỤNG

BÀI 2: TÍCH PHÂN

A – LÝ THUYẾT

Định nghĩa:

Tính chất:

Định lý:

B – PHƯƠNG PHÁP GIẢI

III. Phương pháp tính tích phân từng phần

* Công thức:
$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

3) **Dạng 3: Tính tích phân**

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} e^{ax+b} \cos(mx+n) dx \quad \text{hoặc} \quad J = \int_{\alpha}^{\beta} e^{ax+b} \sin(mx+n) dx$$

**Phương pháp giải:*

Đặt
$$\begin{cases} u = e^{ax+b} \\ dv = \cos(mx+n) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = ae^{ax+b} dx \\ v = \frac{1}{m} \sin(mx+n) \end{cases}$$

hoặc đặt
$$\begin{cases} u = e^{ax+b} \\ dv = \sin(mx+n) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = ae^{ax+b} dx \\ v = -\frac{1}{m} \cos(mx+n) \end{cases}$$

Trong trường hợp này, ta phải tính tích phân từng phần hai lần sau đó trở thành tích phân ban đầu. Từ đó suy ra kết quả tích phân cần tính.

4) **Dạng 4: Kết hợp đổi biến và tích phân từng phần**

**Phương pháp giải:*

+ **Áp dụng pp đổi biến** $u = u(x)$, biến đổi tích phân cần tính về tích phân từng phần.

+ **Áp dụng pp tích phân từng phần.**

$$I = \int_0^{\pi} e^x \cos x dx$$

Ví dụ 1: Tính

A. $I = e^{\pi} + 1$ **B.** $I = -e^{\pi} - 1$ **C.** $I = \frac{1}{2}(e^{\pi} - 1)$ **D.** $I = -\frac{1}{2}(e^{\pi} + 1)$

Lời giải:

***Giải theo tự luận:**

Đặt
$$\begin{cases} u = e^x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = \sin x \end{cases} \quad \text{. Khi đó} \quad I = e^x \sin x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \sin x dx = -J \quad (1)$$

Tính
$$J = \int_0^{\pi} e^x \sin x dx$$

Đặt
$$\begin{cases} u = e^x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = -\cos x \end{cases} \quad \text{. Khi đó} \quad J = -e^x \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^x \cos x dx = e^{\pi} + 1 + I \quad (2).$$

$$I = -\frac{1}{2}(e^\pi + 1)$$

Từ (1) và (2) suy ra

Chọn D

***Giải theo pp trắc nghiệm:** Sử dụng trực tiếp MTCT

Nhận xét: Bài này có thể giải theo cách khác như sau. Đặt $\begin{cases} u = \cos x \\ dv = e^x dx \end{cases}$ sau đó làm tương tự.

Ví dụ 2: Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin 3x dx$.

A. $I = \frac{3-2e^\pi}{13}$ **B.** $I = -\frac{3+2e^\pi}{13}$ **C.** $I = \frac{3-2e^\pi}{5}$ **D.** $I = -\frac{3+2e^\pi}{5}$

Lời giải:

***Giải theo tự luận:**

Đặt $\begin{cases} u = e^{2x} \\ dv = \sin 3x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2e^{2x} dx \\ v = -\frac{1}{3} \cos 3x \end{cases}$. Khi đó $I = -\frac{e^{2x} \cos 3x}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos 3x dx = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} J$ (1).

Tính $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos 3x dx$.

Đặt $\begin{cases} u = e^{2x} \\ dv = \cos 3x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2e^{2x} dx \\ v = \frac{1}{3} \sin 3x \end{cases}$. $J = \frac{e^{2x} \sin 3x}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin 3x dx = -\frac{e^\pi}{3} - \frac{2}{3} I$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $I = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left(-\frac{e^\pi}{3} - \frac{2}{3} I \right) \Leftrightarrow I = \frac{3-2e^\pi}{13}$.

Chọn A

***Giải bằng pp trắc nghiệm:** Sử dụng trực tiếp MTCT.

Nhận xét: Bài này có thể giải theo cách khác như sau. Đặt $\begin{cases} u = \sin 3x \\ dv = e^{2x} dx \end{cases}$ sau đó làm tương tự.

Ví dụ 3: Tính $I = \int_0^\pi e^{2x} \sin^2 x dx$.

A. $I = \frac{e^{2\pi} - 1}{4}$ **B.** $I = \frac{e^{2\pi} - 1}{2}$ **C.** $I = \frac{e^{2\pi} - 1}{8}$ **D.** $I = -\frac{1+e^{2\pi}}{8}$

Lời giải:

***Giải theo tự luận:**

$$I = \int_0^{\pi} e^{2x} \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} e^{2x} (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} e^{2x} dx - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} e^{2x} \cos 2x dx = \frac{1}{4} (e^{2\pi} - 1) - \frac{1}{2} J$$

Tính tích phân $J = \int_0^{\pi} e^{2x} \cos 2x dx$ tương tự như **ví dụ 2** ta được $J = \frac{1}{4} (e^{2\pi} - 1)$.

Vậy $I = \frac{1}{8} (e^{2\pi} - 1)$.

Chọn C

***Giải theo pp trắc nghiệm:** Sử dụng trực tiếp MTCT.

Nhận xét: Tương tự ta có thể giải bài toán tính $\int_{\alpha}^{\beta} e^{ax+b} \sin^2 (mx+n) dx$ hoặc $\int_{\alpha}^{\beta} e^{ax+b} \cos^2 (mx+n) dx$ như ví dụ trên.

Ví dụ 4: Tính $I = \int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx$.

A. $I = e - 1$ **B.** $I = 2$ **C.** $I = -2$ **D.** $I = 1 - e$

Lời giải:

***Giải theo tự luận:**

Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x \Rightarrow 2t dt = dx$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = 1 \Rightarrow t = 1$

Ta được: $I = \int_0^1 2te' dt$. Đặt $\begin{cases} u = 2t \\ dv = e' dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2 dt \\ v = e' \end{cases}$. Khi đó $I = 2te' \Big|_0^1 - \int_0^1 2e' dt = 2e - 2e' \Big|_0^1 = 2$

Chọn B

***Giải theo pp trắc nghiệm:** Sử dụng trực tiếp MTCT

Ví dụ 5: Tính $I = \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin \sqrt{x} dx$.

A. $I = 1$ **B.** $I = 2$ **C.** $I = \pi - 2$ **D.** $I = \pi + 2$

Lời giải:

***Giải theo tự luận:**

Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x \Rightarrow 2t dt = dx$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$

Ta được: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2t \sin t dt$. Đặt $\begin{cases} u = 2t \\ dv = \sin t dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dt \\ v = -\cos t \end{cases}$. Khi đó

$$I = -2t \cos t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos t dt = 2 \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

Chọn B

***Giải theo pp trắc nghiệm:** Sử dụng trực tiếp MTCT.

Ví dụ 6: Tính $I = \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \cos \sqrt{x} dx$.

A. $I = 1$

B. $I = 2$

C. $I = \pi - 2$

D. $I = \pi + 2$

Lời giải:

***Giải theo tự luận:**

Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x \Rightarrow 2t dt = dx$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$

Ta được: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2t \cos t dt$. Đặt $\begin{cases} u = 2t \\ dv = \cos t dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dt \\ v = \sin t \end{cases}$. Khi đó

$$I = 2t \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin t dt = 2 \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2 \cos t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi - 2$$

Chọn C

***Giải theo pp trắc nghiệm:** Sử dụng trực tiếp MTCT.

Ví dụ 7: Tính $I = \int_0^1 2x \ln(x^2 + 3) dx$.

A. $I = \ln \frac{256}{27} - 1$

B. $I = \ln \frac{256}{27} + 1$

C. $I = \ln \frac{27}{256} + 1$

D. $I = \ln \frac{27}{256} - 1$

Lời giải:

***Giải theo tự luận:**

Đặt $t = x^2 + 3 \Rightarrow dt = 2x dx$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 3; x = 1 \Rightarrow t = 4$

Ta được: $I = \int_3^4 \ln t dt$. Đặt $\begin{cases} u = \ln t \\ dv = dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dt}{t} \\ v = t \end{cases}$. Khi đó:

$$I = t \ln t \Big|_3^4 - \int_3^4 dt = 4 \ln 4 - 3 \ln 3 - t \Big|_3^4 = \ln \frac{256}{27} - 1$$

Chọn A

***Giải theo pp trắc nghiệm:** Sử dụng trực tiếp MTCT.

Ví dụ 8: Tính $I = \int_{e^2}^{e^5} \frac{\ln(\ln x)}{x} dx$.

- A.** $I = \ln \frac{3125}{4} + 7$ **B.** $I = \ln \frac{3125}{4} + 3$ **C.** $I = \ln \frac{3125}{4} - 7$ **D.** $I = \ln \frac{3125}{4} - 3$

Lời giải:

***Giải theo tự luận:**

Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$. Đổi cận: $x = e^2 \Rightarrow t = 2; x = e^5 \Rightarrow t = 5$

Ta được: $I = \int_2^5 \ln t dt$. Đặt $\begin{cases} u = \ln t \\ dv = dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dt}{t} \\ v = t \end{cases}$. Khi đó:

$$I = t \ln t \Big|_2^5 - \int_2^5 dt = 5 \ln 5 - 2 \ln 2 - t \Big|_2^5 = \ln \frac{3125}{4} - 3$$

Chọn D

***Giải theo pp trắc nghiệm:** Sử dụng trực tiếp MTCT.

Ví dụ 9: Tính $I = \int_1^e \cos(\ln x) dx$.

- A.** $I = \frac{e(\cos 1 - \sin 1) + 1}{2}$ **B.** $I = \frac{e(\sin 1 - \cos 1) - 1}{2}$
C. $I = \frac{e(\cos 1 + \sin 1) - 1}{2}$ **D.** $I = \frac{e(\cos 1 + \sin 1) + 1}{2}$

Lời giải:

***Giải theo tự luận:**

Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x} \Rightarrow dx = e^t dt$. Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = 0; x = e \Rightarrow t = 1$

Ta được: $I = \int_0^1 e^t \cos t dt$, đến đây bài toán được giải hoàn toàn tương tự như **vi dụ 1**

Kết quả $I = \frac{e(\cos 1 + \sin 1) - 1}{2}$.

Chọn C

***Giải theo pp trắc nghiệm:** Sử dụng trực tiếp MTCT.

.....

BÀI TẬP VẬN DỤNG (Có chia mức độ)

***NHẬN BIẾT.**

***THÔNG HIỂU.**

***VẬN DỤNG.**

Câu 1: [2D3-4.8-3] Tích phân $I = \int_0^{\pi} e^x \cos 2x dx$ bằng:

A. $I = \frac{e^{\pi} - 1}{5}$

B. $I = \frac{e^{\pi} - 1}{3}$

C. $I = \frac{-e^{\pi} + 1}{5}$

D. $I = \frac{-e^{\pi} + 1}{3}$

Câu 2: [2D3-4.9-3] Tích phân $I = \int_0^1 2^{\sqrt{x}} dx$ bằng:

A. $I = \frac{4}{\ln 2} + \frac{2}{\ln^2 2}$

B. $I = \frac{4}{\ln 2} + \frac{3}{\ln^2 2}$

C. $I = \frac{4}{\ln 2} - \frac{2}{\ln^2 2}$

D. $I = \frac{1}{\ln 2} - \frac{2}{\ln^2 2}$

Câu 3: [2D3-4.9-3] Tích phân $I = \int_0^3 \sqrt{x+1} e^{\sqrt{x+1}} dx$ bằng:

A. $I = 2e(2e+1)$

B. $I = 2e(2e-1)$

C. $I = 2e(1-2e)$

D. $I = -2e(2e-1)$

Câu 4: [2D3-4.9-3] Cho tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos^2 x} \cdot \cos x \cdot \sin^3 x dx$. Nếu đổi biến số $t = \cos^2 x$ thì tích phân đã cho bằng tích phân nào dưới đây?

A. $I = 2 \int_0^1 e^t (1-t) dt$

B. $I = \frac{1}{2} \left(\int_0^1 e^t dt + \int_0^1 t e^t dt \right)$

C. $I = 2 \left(\int_0^1 e^t dt + \int_0^1 t e^t dt \right)$

D. $I = \frac{1}{2} \int_0^1 e^t (1-t) dt$

Câu 5: [2D3-4.8-3] Tích phân $I = \int_0^{\pi} e^x \cdot \cos^2 x dx$ bằng:

A. $I = \frac{2}{3} (e^{\pi} + 1)$

B. $I = \frac{2}{3} (e^{\pi} - 1)$

C. $I = \frac{2}{3} (-e^{\pi} + 1)$

D. $I = \frac{3}{2} (e^{\pi} - 1)$

Câu 6: [2D3-4.8-3] Tích phân $I = \int_0^1 e^x \cdot \sin^2(\pi x) dx$ bằng:

- A. $I = \frac{2\pi^2(1-e)}{-1+4\pi^2}$ B. $I = \frac{2\pi^2(e-1)}{4\pi^2-1}$ C. $I = \frac{2\pi^2(e-1)}{1+4\pi^2}$ D. $I = \frac{2\pi^2(e+1)}{1+4\pi^2}$

Câu 7: [2D3-4.9-3] Tích phân $I = \int_0^1 x^3 \cdot e^{-x^2} dx$ bằng:

- A. $I = \frac{1}{2}(e-1)$ B. $I = -\frac{1}{2} - \frac{1}{e}$ C. $I = \frac{1}{2} + \frac{1}{e}$ D. $I = \frac{1}{2} - \frac{1}{e}$

Câu 8: [2D3-4.9-3] Tích phân $I = \int_0^1 e^x \ln(e^x + 1) dx$ bằng:

- A. $I = (e+1)\ln(e+1) - 2\ln 2 - e + 1$ B. $I = -(e+1)\ln(e+1) + 2\ln 2 - e + 1$
C. $I = (e+1)\ln(e+1) - 2\ln 2 - e - 1$ D. $I = (e+1)\ln(e+1) - 2\ln 2 - e - 3$

Câu 9: [2D3-4.9-3] Tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \ln(\sin x) dx$ bằng:

- A. $I = -\frac{\sqrt{2}}{4} \ln 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$ B. $I = \frac{\sqrt{2}}{4} \ln 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$
C. $I = \frac{\sqrt{2}}{4} \ln 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$ D. $I = \frac{\sqrt{2}}{4} \ln 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

Câu 10: [2D3-4.9-3] Tích phân $I = \int_e^{e^2} \frac{\ln(\ln x)}{x} dx$ bằng:

- A. $I = 2 \ln 2 - 1$ B. $I = 2 \ln 2 + 1$ C. $I = -2 \ln 2 - 1$ D. $I = -2 \ln 2 + 1$

Câu 11: [2D3-4.8-3] Cho $I = \int_0^\pi e^x \cos^2 x dx$; $J = \int_0^\pi e^x \sin^2 x dx$ và $K = \int_0^\pi e^x \cos 2x dx$. Khẳng định nào đúng trong các khẳng định sau ?

- (I) $I + J = e^\pi$ (II) $I - J = K$ (III) $K = \frac{e^\pi - 1}{5}$
A. Chỉ (II) B. Chỉ (I) C. Chỉ (III) D. Cả (II) và (III)

Câu 12: [2D3-4.9-3] Tích phân $I = \int_0^1 x \ln(1+x^2) dx$ bằng:

- A. $I = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2}$ B. $I = \ln 2 - \frac{1}{2}$ C. $I = \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2}$ D. $I = \ln 2 + \frac{1}{2}$

Câu 13: [2D3-4.9-3] Tích phân $I = \int_0^1 x^3 e^{x^2} dx$ bằng:

A. $I = -\frac{1}{2}$

B. $I = e + \frac{1}{2}$

C. $I = e - \frac{1}{2}$

D. $I = \frac{1}{2}$

Câu 14: [2D3-4.9-3] Tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x} \sin 2x dx$ bằng:

A. $I = 2$

B. $I = 2e - 1$

C. $I = (e + 1)$

D. $I = e - 2$

Câu 15: [2D3-4.8-3] Tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x} \cos 2x dx$ bằng:

A. $I = \frac{1 - e^{\pi}}{e^2}$

B. $I = \frac{1 + e^{\pi}}{4e^{\pi}}$

C. $I = \frac{1 + e^{\pi}}{2e^{\pi}}$

D. $I = \frac{e^{\pi} - 1}{4e^{\pi}}$

***VẬN DỤNG CAO**

Câu 16: [2D3-4.9-4] Tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos x \cdot \sin^2 x dx$ bằng:

A. $I = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{9}$

B. $I = -\frac{\pi}{6} - \frac{2}{9}$

C. $I = \frac{\pi}{6} - \frac{2}{9}$

D. $I = \frac{\pi}{6}$

Câu 17: [2D3-4.9-4] Tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x - \sin x}{1 + \cos x} dx$ bằng:

A. $I = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \ln \frac{4}{6}$

B. $I = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} - \ln \frac{4}{9}$

C. $I = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

D. $I = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \ln \frac{4}{9}$

Câu 18: [2D3-4.9-4] Tích phân $I = \int_0^1 x \cdot \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) dx$ bằng:

A. $I = \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{2}) - \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{8} \ln \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}$

B. $I = \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{2}) - \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{8} \ln \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}$

C. $I = \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{2}) - \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}$

D. $I = \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{2}) - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}$

Câu 19: [2D3-4.9-4] Tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1 + \sin 2x} dx$ bằng:

A. $I = \frac{1}{2} \ln 2$

B. $I = \frac{1}{2} \ln 2$

C. $I = \frac{1}{4} \ln 2$

D. $I = -\frac{1}{4} \ln 2$

Câu 20: [2D3-4.9-4] Tích phân $I = \int_0^{\ln 3} \frac{x e^x}{\sqrt{e^x + 1}} dx$ bằng:

A. $I = 4 \ln 3 + 8 - 4\sqrt{2} + 2 \ln \frac{3+2\sqrt{2}}{3}$

B. $I = 4 \ln 3 + 4 - 2\sqrt{2} + \ln \frac{3+2\sqrt{2}}{3}$

C. $I = 4 \ln 3 - 4 + 2\sqrt{2} - \ln \frac{3+2\sqrt{2}}{3}$

D. $I = 4 \ln 3 - 8 + 4\sqrt{2} - 2 \ln \frac{3+2\sqrt{2}}{3}$

Câu 21: [2D3-4.9-4] Tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \sin x}{\cos^3 x} dx$ bằng:

A. $I = -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

B. $I = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

C. $I = -\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$

D. $I = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$

Câu 22: [2D3-4.9-4] Tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$ bằng:

A. $I = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2}$

B. $I = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} + \ln 2$

C. $I = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \ln 2$

D. $I = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}$

Câu 23: [2D3-4.9-4] Tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{(1 + \sin x)^{1 + \cos x}}{1 + \cos x} dx$ bằng:

A. $I = -2 \ln 3 - 1$

B. $I = 2 \ln 3 - 1$

C. $I = -2 \ln 2 - 1$

D. $I = 2 \ln 2 - 1$

Câu 24: [2D3-4.9-4] Tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x \ln(\tan x) dx$ bằng:

A. $I = -\frac{1}{4} \ln 3 + \ln \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{3}}$

B. $I = -\frac{1}{4} \ln 3 + \ln \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

C. $I = -\frac{1}{4} \ln 3 + \ln \frac{2\sqrt{2} + 3}{3}$

D. $I = -\frac{1}{4} \ln 3 + \ln \frac{\sqrt{2} + 1}{3}$

Câu 25: [2D3-4.9-4] Tích phân $I = \int_0^{\ln \frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin^2(e^x) dx$ bằng:

A. $I = \frac{\pi^2 + 4 \sin 2 - 2 \cos 2 - 6}{16}$

B. $I = \frac{\pi^2 + 4 \sin 2 + 2 \cos 2 - 2}{16}$

C. $I = \frac{\pi^2 + 4 \sin 2 + 2 \cos 2 - 6}{16}$

D. $I = \frac{\pi^2 + 4 \sin 2 - 2 \cos 2 - 2}{16}$

Câu 26: [2D3-4.9-4] Tích phân $I = \int_0^{\pi} x e^x \cos x dx$ bằng:

A. $I = \frac{\pi e^{\pi}}{2}$

B. $I = -\frac{\pi e^{\pi}}{4}$

C. $I = -\frac{\pi e^{\pi}}{2}$

D. $I = -\pi e^{\pi}$

Câu 27: [2D3-4.9-4] Tích phân $I = \int_0^1 \frac{x e^x}{(1+x)^2} dx$ bằng:

A. $I = 4$

B. $I = \frac{e}{2} - 1$

C. $I = \frac{e}{2} - 2$

D. $I = 3$

Câu 28: [2D3-4.9-4] Tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \ln(2 - \sin x) dx$ bằng:

A. $I = -4 \ln 2 - \frac{5}{2}$

B. $I = 4 \ln 2 - \frac{5}{2}$

C. $I = 4 \ln 2 - \frac{19}{2}$

D. $I = 4 \ln 2 - \frac{13}{2}$

Câu 29: [2D3-4.9-4] Kết quả tích phân $I = \int_0^1 x \ln(2+x^2) dx$ được viết dưới dạng $I = a \ln 3 + b \ln 2 + c$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Tính $a + b + c$.

A. $a + b + c = 0$

B. $a + b + c = 1$

C. $a + b + c = 3$

D. $a + b + c = 2$

Câu 30: [2D3-4.9-4] Tích phân $I = \int_0^{\pi^2} \sqrt{x} \sin \sqrt{x} dx$ bằng:

A. $I = \pi^2 + 8$

B. $I = 8 - 2\pi^2$

C. $I = 4 - 2\pi^2$

D. $I = 2\pi^2 - 8$

***Bảng đáp án:**

1A	2C	3B	4D	5B	6C	7D	8A	9B	10A
11D	12B	13D	14A	15B	16C	17D	18A	19C	20D
21B	22C	23D	24A	25B	26C	27B	28B	29A	30D

***Hướng dẫn giải chi tiết CÁC CÂU KHÓ.**

Câu 3. $I = \int_0^3 \sqrt{x+1} e^{\sqrt{x+1}} dx$. Đặt $t = \sqrt{x+1} \Rightarrow dx = 2t dt$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = 3 \Rightarrow t = 2$

$$I = \int_0^2 2te' dt$$

Đây là bài toán tính tích phân quen thuộc.

$$I = \int_0^{\pi} e^x \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} e^x dx + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} e^x \cos 2x dx$$

Câu 5. Đây là bài toán tính tích phân đã nêu pp giải ở trên.

Câu 6. Giải tương tự như **câu 5**.

$$I = \int_0^1 x^3 e^{-x^2} dx = \int_0^1 x^2 e^{-x^2} x dx \quad t = -x^2 \Rightarrow x dx = \frac{-dt}{2}$$

Câu 7. Đặt . Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = 1 \Rightarrow t = -1$.

$$I = -\frac{1}{2} \int_{-1}^0 t e^t dt$$

Kh i đó: . Đây là bài toán tính tích phân quen thuộc.

$$I = \int_0^1 e^x \ln(e^x + 1) dx$$

Câu 8. Đặt $t = e^x + 1$.

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \ln(\sin x) dx$$

Câu 9. Đặt $t = \sin x$.

$$I = \int_e^{e^2} \frac{\ln(\ln x)}{x} dx$$

Câu 10. Đặt $t = \ln x$.

$$I = \int_0^1 x \ln(1 + x^2) dx$$

Câu 12. Đặt $t = 1 + x^2$.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x} \sin 2x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2e^{\cos x} \sin x \cos x dx$$

Câu 14. Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$. Đổi cận:

$$x = 0 \Rightarrow t = 1; x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0 \quad I = \int_0^1 2te^t dt$$

Khi đó: . Đây là bài toán tính tích phân quen thuộc.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \sin^2 x dx \quad \begin{cases} u = x \\ dv = \cos x \sin^2 x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{\sin^3 x}{3} \end{cases}$$

Câu 16. Đặt

$$I = \frac{x \sin^3 x}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x) \sin x dx = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{3} (\cos x - \frac{1}{3} \cos^3 x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

Khi đó:

$$I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x - \sin x}{1 + \cos x} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1 + \cos x} dx - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} dx + \ln |1 + \cos x| \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = J - \ln \frac{3}{2}$$

Câu 17.

$$J = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx \quad \begin{cases} u = x \\ dv = \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \tan \frac{x}{2} \end{cases}$$

Tính

. Đặt

$$J = x \tan \frac{x}{2} \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \tan \frac{x}{2} dx = x \tan \frac{x}{2} \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} + 2 \ln \left| \cos \frac{x}{2} \right| \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \ln \frac{2}{3}$$

Câu 18. $I = \int_0^1 x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$. Đặt $\begin{cases} u = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$

$$I = \frac{x^2}{2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{1}{2} \ln(1+\sqrt{2}) - \frac{1}{2} J \quad J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

Đặt $x = \tan t, t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \Rightarrow dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$. Khi đó

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2 t dt}{\sqrt{1+\tan^2 t} \cos^2 t} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 t dt}{\cos^3 t} \quad \begin{cases} u = \sin t \\ dv = \frac{\sin t}{\cos^3 t} dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \cos t dt \\ v = \frac{1}{2 \cos^2 t} \end{cases}$$

$$J = \frac{\sin t}{2 \cos^2 t} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t}{1 - \sin^2 t} dt = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{4} \ln \frac{1 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1 + \sin 2x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{(\sin x + \cos x)^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{2 \cos^2(x - \frac{\pi}{4})} dx$$

Câu 19.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \frac{1}{\cos^2(x - \frac{\pi}{4})} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \tan(x - \frac{\pi}{4}) \end{cases}$

$$I = x \tan(x - \frac{\pi}{4}) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x - \frac{\pi}{4}) dx = \ln \left| \cos(x - \frac{\pi}{4}) \right| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

Câu 20. $I = \int_0^{\ln 3} \frac{x e^x}{\sqrt{e^x + 1}} dx$. Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 1}} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = 2\sqrt{e^x + 1} \end{cases}$

$$I = 2x\sqrt{e^x + 1} \Big|_0^{\ln 3} - 2 \int_0^{\ln 3} \sqrt{e^x + 1} dx = 4 \ln 3 - 2J \quad J = \int_0^{\ln 3} \sqrt{e^x + 1} dx$$

$t = \sqrt{e^x + 1} \Rightarrow t^2 = e^x + 1$

$$dx = \frac{2t dt}{t^2 - 1} \quad \text{Đổi cận: } x = 0 \Rightarrow t = \sqrt{2}; x = \ln 3 \Rightarrow t = 2 \quad J = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{2t^2}{t^2 - 1} dt = \int_{\sqrt{2}}^2 (2 + \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}) dt$$

$$= \left(2t + \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \right) \Big|_{\sqrt{2}}^2 = 4 - 2\sqrt{2} + \ln \frac{3+2\sqrt{2}}{3}$$

Câu 21. $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \sin x}{\cos^3 x} dx$. Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \frac{\sin x}{\cos^3 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2 \cos^2 x} \end{cases}$ $I = \frac{x}{2 \cos^2 x} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

Câu 22. $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$. Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \tan x \end{cases}$ $I = x \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} + \ln |\cos x| \Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$

Câu 23. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{(1 + \sin x)^{1 + \cos x}}{1 + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos x) \ln(1 + \sin x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + \cos x) dx$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \ln(1 + \sin x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + \sin x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + \cos x) dx = K + L - M$$

Tính $L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + \sin x) dx$. Đặt $x = \frac{\pi}{2} - t \Rightarrow dx = -dt$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}; x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + \sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + \cos t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + \cos x) dx = M$$

Do đó $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \ln(1 + \sin x) dx$

Đặt $t = 1 + \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1; x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 2$ $I = \int_1^2 \ln t dt = 2 \ln 2 - 1$

Câu 24. $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x \ln(\tan x) dx$. Đặt $\begin{cases} u = \ln(\tan x) \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{\sin x \cos x} \\ v = -\cos x \end{cases}$ $I = -\cos x \ln(\tan x) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin x}$

$$I = -\frac{1}{4} \ln 3 + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx = -\frac{1}{4} \ln 3 - \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{1 - \cos x} + \frac{1}{1 + \cos x} \right) d(\cos x) = -\frac{1}{4} \ln 3 - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} \right| \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$

Câu 25. $I = \int_0^{\ln \frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin^2(e^x) dx$. Đặt $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1; x = \ln \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$

$$I = \int_1^{\frac{\pi}{2}} t \sin^2 t dt = \frac{1}{2} \int_1^{\frac{\pi}{2}} t (1 - \cos 2t) dt = \frac{1}{2} \int_1^{\frac{\pi}{2}} t dt - \frac{1}{2} \int_1^{\frac{\pi}{2}} t \cos 2t dt = \frac{\pi^2 + 4 \sin 2 + 2 \cos 2 - 2}{16}$$

Câu 26. $I = \int_0^{\pi} x e^x \cos x dx$. Đặt $\begin{cases} u = x e^x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (x + 1) e^x dx \\ v = \sin x \end{cases}$ $I = x e^x \sin x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (x + 1) e^x \sin x dx$

$$I = -\int_0^{\pi} (x+1)e^x \sin x dx = -\int_0^{\pi} e^x \sin x dx - \int_0^{\pi} x e^x \sin x dx = \frac{-e^{\pi}-1}{2} - J \quad J = \int_0^{\pi} x e^x \sin x dx$$

. Tính

Đặt
$$\begin{cases} u = x e^x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (x+1)e^x dx \\ v = -\cos x \end{cases} \quad J = -x e^x \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} (x+1)e^x \cos x dx$$

$$J = \pi e^{\pi} + \int_0^{\pi} e^x \cos x dx + \int_0^{\pi} x e^x \cos x dx = \pi e^{\pi} - \frac{e^{\pi}+1}{2} + I$$

. Suy ra $I = -\frac{\pi e^{\pi}}{2}$

Câu 27. $I = \int_0^1 \frac{x e^x}{(1+x)^2} dx$. Đặt $t = x+1 \Rightarrow dt = dx$. Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=1; x=1 \Rightarrow t=2$.

$$I = \int_1^2 \frac{(t-1)e^{t-1}}{t^2} dt = \int_1^2 \frac{e^{t-1}}{t} dt - \int_1^2 \frac{e^{t-1}}{t^2} dt = K - L \quad L = \int_1^2 \frac{e^{t-1}}{t^2} dt$$

. Tính

Đặt
$$\begin{cases} u = e^{t-1} \\ dv = \frac{dt}{t^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^{t-1} dt \\ v = -\frac{1}{t} \end{cases} \quad L = -\frac{1}{t} e^{t-1} \Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{e^{t-1}}{t} dt = -\frac{1}{2} e + 1 + K$$
 . Do đó $I = \frac{e}{2} - 1$.

Câu 28. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \ln(2 - \sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x \cos x \ln(2 - \sin x) dx$. Đặt $t = 2 - \sin x \Rightarrow dt = -\cos x dx$

Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=2; x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow t=1$ $I = 2 \int_1^2 (2-t) \ln t dt = 4 \ln 2 - \frac{5}{2}$.

Câu 29. $I = \int_0^1 x \ln(2+x^2) dx$. Đặt $t = 2+x^2$.

Câu 30. $I = \int_0^{\pi^2} \sqrt{x} \sin \sqrt{x} dx$. Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow dx = 2t dt$. Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=0; x=\pi^2 \Rightarrow t=\pi$.

$$I = \int_0^{\pi} 2t^2 \sin t dt$$

. Đây là bài toán tính tích phân từng phần.