

Composition de Physique – C – (U)

(Durée : 6 heures)

Détermination de la constante gravitationnelle G

Préambule : Comparaison entre interaction électromagnétique et gravitationnelle

Q1. On distingue les interactions gravitationnelle et électromagnétique puis dans le domaine nucléaire les interactions forte et faible. (*L'interaction faible a été unifiée avec l'interaction électromagnétique en interaction électrofaible*)

Q2.
$$\mathbf{f}_{elec} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \mathbf{u}_r$$

Q3.
$$\mathbf{f}_{grav} = -G \frac{m_e m_p}{r^2} \mathbf{u}_r$$

Q4.
$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} = 7.29 \cdot 10^{-3} = \frac{1}{137}$$

Q5.
$$\alpha_g = \frac{G m_e m_p}{\hbar c} = 3.22 \cdot 10^{-42}$$
 valeur bien inférieure à α comme attendu.

Q6.
$$\mathbf{f}_{totale} = -\frac{\hbar c}{r^2} (\alpha + \alpha_g) \mathbf{u}_r$$
 la modification gravitationnelle est très faible

Q7.
$$\Delta E = E_0 \frac{3\alpha^2}{4} = h\nu \quad \text{donc} \quad \frac{\Delta\nu}{\nu} = 2 \frac{\Delta\alpha}{\alpha} = \frac{2\alpha_g}{\alpha} \cong 10^{-39}$$
 à priori non mesurable par les techniques connues de spectroscopies.

Q8. Théorème de Gauss :
$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho d\tau$$

Q9. Théorème de Gauss gravitationnel :
$$\oint \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = -4\pi G \iiint_V \rho d\tau$$

I Détermination de G à l'aide d'un pendule de torsion

Q10. Par le théorème des moments :
$$\theta = \frac{2lGmM}{kd^2}$$
, les approximations sont dans l'énoncé : masses à répartitions sphériques pour pouvoir être supposées ponctuelles, distance d bien calculée par rapport à la position de m à l'équilibre,

Q11. Numériquement on trouve $\theta = 1.17 \cdot 10^{-3}$ rad, mesurable par la méthode de Poggendorff ou variante.

Q12. $I = 2 ml^2$ en supposant toujours les masses m ponctuelles.

Q13. La distance d est la plus difficile à mesurer avec précision : position des centres des masses m et M et orthogonalité de la droite joignant les centres à la direction de la tige. Mais l'énoncé suggère que c'est la constante de torsion k qui sera déterminée indirectement par des

oscillations du pendule de torsion de période T_t : $k = \frac{4\pi^2 I}{T_t^2}$. Alors en remplaçant dans le

théorème des moments de Q10 : $G = \frac{4\pi^2 l d^2 \theta}{M T_t^2}$

Q14. Pour la période du pendule pesant $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ et g est obtenu par le théorème de Gauss

(en supposant la distribution de densité de la Terre à symétrie sphérique) : $g = \frac{GM_T}{R_T^2}$, puis en

combinant le tout $M_T = \frac{R_T^2 M}{d^2 \theta} \frac{T_t^2}{T^2}$.

Q15. $V(r) = -GM \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} + \frac{1}{|\mathbf{r} + \mathbf{R}|} \right)$ en prenant la référence des potentiels nulle à l'infini.

Q16. Cette expression est symétrique par rapport à la ligne des masses M et par rapport au plan médiateur du segment MM .

Q17. En utilisant l'angle γ : $V(r) = -GM \left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + r^2 + 2rR \cos \gamma}} + \frac{1}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR \cos \gamma}} \right)$ ce

qui permet d'utiliser le DL fourni dans l'énoncé avec $\eta = r/R$ et $x = \cos \gamma$:

$$V(r) = -\frac{GM}{R^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{R^n} P_n(\cos \gamma) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{R^n} P_n(-\cos \gamma) \right) = -\frac{2GM}{R^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n}}{R^{2n}} P_{2n}(\cos \gamma) \quad \text{soit}$$

l'expression proposée avec $a_{2n}(\gamma) = 2GMP_{2n}(\gamma)$ et $a_{2n+1} = 0$.

Q18. On utilise le développement en s'arrêtant aux polynômes P_0 et P_2 pour ne garder que les

termes en r^2 , alors par identification : $V(r) = -\frac{2GM}{R} \left(1 - \frac{r^2}{2R^2} \right)$ et $Q = \frac{2M}{R^3}$.

Q19. $E_p = \int V(r, \gamma) dm$. La répartition de masse du pendule est symétrique par rapport à O donc les deux parties ont un même potentiel et il apparaît le terme q qui contient la répartition de masse du pendule ($q = 2ml^2$ si le pendule est simplement constitué de deux masses ponctuelles avec une tige de masse négligeable).

Q20. $\Gamma_z = -\frac{\partial E_p}{\partial \gamma} = -3GqQ \sin \phi \cos \phi$

Q21. En potentiel électrostatique il y a possibilité de moment dipolaire si les barycentres des charges + et - sont disjoints, cette possibilité n'existe pas pour les potentiels gravitationnels car les masses négatives n'existent pas.

Q22. $\mathbf{F}_e = -m \mathbf{a}_e$ et $\mathbf{F}_c = +2m (\mathbf{v}' \wedge \boldsymbol{\omega})$

Q23. $\mathbf{a}_e = -r\omega^2 \mathbf{u}_r + r(d\omega/dt) \mathbf{u}_\theta$ et $\mathbf{v}' = r(d\theta/dt) \mathbf{u}_\theta$ puisque $r = \text{cte}$ donc les forces s'écrivent $\mathbf{F}_e = +m\omega^2 r \mathbf{u}_r - mr d\omega/dt \mathbf{u}_\theta$ (avec une composante ortho radiale négative si ω est croissante) et $\mathbf{F}_c = +2mr d\theta/dt \mathbf{u}_r$. (le tout calculé en $r = l$)

Q24. Seule la partie ortho radiale de $\mathbf{F}_e$ a un moment non nul et les deux points symétriques du pendule subissent une force de sens opposé dont le moment résultant est : $\Gamma_{ez} = -2mr^2 d\omega/dt$.

Q25. Théorème du moment cinétique dans le référentiel tournant : $\Gamma_z + \Gamma_{ez} - k\theta = I d^2\theta/dt^2$

Q26. Avec θ nul : $-3GqQ\sin\varphi\cos\varphi = 2mr^2 d(\delta\omega)/dt$ et $\varphi(t) = \omega_0 t + \int \delta\omega(t) dt$.

Q27. Dans l'équation précédente $\delta\omega$ est petit devant ω_0 donc au premier ordre je remplace dans

le premier membre $\varphi(t)$ par $\omega_0 t$ et l'équation devient : $-\frac{3}{2}GqQ\sin 2\omega_0 t = I \frac{d\delta\omega}{dt}$ dont la

solution est $\delta\omega(t) = +\frac{3GqQ}{4I\omega_0}\cos(2\omega_0 t)$ avec une constante d'intégration nulle pour respecter la valeur moyenne nulle de $\delta\omega(t)$.

$$G = \frac{4I\omega_0\delta\omega_0}{3qQ} = \frac{2R^3\omega_0\delta\omega_0}{3M}$$

Q28. De l'expression de $\delta\omega_0$ on tire

Q29. $I = \iint_{\text{plaque}} \sigma(X,Z)X^2 dXdZ$

Q30. $dE_p(P) = \sigma(X,Z)dXdZ (V_0(r) - (3G/2)Q(X^2 + Z^2)\cos^2(\gamma(P)))$. Et $(X^2 + Y^2)\cos^2(\gamma(P)) = X^2\cos^2\varphi$.

Q31. Dans l'intégrale de $E_p(r)$ rapprochée de l'expression de Q19 on identifie $q = I$.

Q32. On retrouve bien une oscillation sinusoïdale à la fréquence $2\omega_0$ et $\delta\omega_0 = 3QG/4\omega_0 = 3GM/2\omega_0 R^3 = 8.65 \cdot 10^{-6} \text{rad.s}^{-1}$.

Q33. Avec $Q = 2M/R^3$, alors $\frac{\delta G}{G} = \frac{dM}{M} + 3\frac{dR}{R} = 3.7 \cdot 10^{-7} + 1.8 \cdot 10^{-5}$ c'est la précision de R qui est limitante et $\delta G = 1.2 \cdot 10^{-15} \text{kg.m}^{-3}.\text{s}^{-2}$ portant sur la quatrième décimale de la valeur numérique de G . L'amplitude de la dérivée de $\delta\omega = \omega_0\delta\omega_0 = 346 (\text{mrad.s}^{-1})^2$ est proche de l'amplitude ≈ 400 que l'on peut lire sur le graphe.

II Détermination de G à l'aide d'un gravimètre mécanique

Q34. Par une RFD appliquée à m tenant compte du poids : $G = \frac{d_i}{M}(\mathbf{a}_i - \mathbf{g}) \cdot \mathbf{d}_i$. Avec deux mesures différentes on élimine par soustraction le terme de pesanteur moins précis.

Q35. L'identité de la masse inertielle et de la masse gravitationnelle explique la simplification par m et est à la base de la relativité générale.

Q36. Le champ de pesanteur dépendant de z si on veut l'éliminer exactement entre les deux expérience il faut faire la mesure des $\mathbf{a}_i$ à la même altitude.

Q37. $a_1 - a_2 = GM\left(\frac{1}{d_1^2} + \frac{1}{d_2^2}\right)$ sur l'axe z . Si $d_1 = d_2 = d$, $|a_1 - a_2| = \frac{2GM}{d^2} = 10^{-7} g$ d'où on tire $M \approx 7.5 \cdot 10^3 \text{kg}$ soit avec une densité de type métal ($\rho = 8 \text{kg.m}^{-3}$) un volume de 1m^3 environ donc une extension spatiale pour la masse M de l'ordre du mètre, du même ordre de grandeur que les distances d'interaction d envisagées, l'approximation de masse M ponctuelle n'est pas tenable.

Q38. Théorème de Gauss sur un cylindre d'axe orthogonal à la plaque : $g = 2\pi G\sigma$, dirigé vers le plan infini.

Q39. Par le théorème de superposition, la différence de gravité est due à la baisse de niveau considéré comme une distribution surfacique de $\sigma = \rho_{\text{eau}}h$. Numériquement : $\rho_{\text{eau}} = 10^3 \text{kg.m}^{-3}$ donne $\Delta g = 8.38 \cdot 10^{-6} \approx 10^{-5}g$.

Q40. Pour tenir compte de la présence de l'atmosphère il faut remplacer dans le calcul précédent ρ_{eau} par $\rho_{eau} - \rho_{air}$ or $\rho_{air} = 1.21 \text{ kg.m}^{-3} \cong 10^{-3} \rho_{eau}$. La correction relative est nettement supérieure à la précision relative attendue, il faut donc en tenir compte.

Q41. G est en $\text{m}^3.\text{kg}^{-1}.\text{s}^{-2}$. Pour les unités de longueur et de temps les grandeurs utilisées sont des radiations de transitions atomiques et la vitesse de la lumière, pour l'unité de masse il y a toujours le kilogramme étalon du Pavillon de Breteuil !!

Q42. La gravité est tirée de la période du pendule $T = 2\pi (m/k)^{1/2}$ autour de la position d'équilibre et de la détermination de k par une pesée et la mesure d'un allongement $k = m/\Delta l$ à l'équilibre.

Q43. L'accélération du miroir est obtenue en comptant un défilement de franges d'interférences par unité de temps.

Q44. La précision sur l'électronique de comptage de franges et de fréquence me semble bien meilleure pour obtenir une valeur métrologique de G .

III Détermination de G à l'aide d'un gravimètre supraconducteur

Q45. RFD sur un électron soumis au champ $\mathbf{E}$ uniquement en négligeant la force magnétique : $m_e \partial \mathbf{v} / \partial t = -e\mathbf{E}$, puis multiplication par $-ne$ avec transformation de $-nev$ en $\mathbf{j}$.

Q46. En laissant de côté les constantes, la seconde équation de London implique : $\varphi \propto \iint_{\text{bobine}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \propto \iint_{\text{bobine}} \text{rot } \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$ et $d\varphi/dt \propto \iint \text{rot}(\partial \mathbf{j} / \partial t) \cdot d\mathbf{S} \propto \int_{\text{contour fermé bobine}} (\partial \mathbf{j} / \partial t) \cdot d\mathbf{l} \propto \int_{\text{contour fermé}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ dans l'AEQS.

Q47. A partir du rotationnel de l'équation de Maxwell Ampère en régime quasi stationnaire c.a.d. sans courant de déplacement, dans laquelle on insère la seconde équation de London et l'équation $\text{div } \mathbf{B} = 0$ il reste : $\Delta \mathbf{B} = \mathbf{B} / \lambda_L^2$.

Q48. Par invariance $\mathbf{B}(z)$ uniquement, on obtient alors les trois équations différentielles : $\partial^2 B_{x,y,z} / \partial z^2 = B_{x,y,z} / \lambda_L^2$ qui ont comme solution une somme d'exponentielles e^{-z/λ_L} et e^{+z/λ_L} , puis la

$$B_y = B_0 \frac{\cosh(z / \lambda_L)}{\cosh(l / \lambda_L)}$$

continuité du champ $\mathbf{B}$ aux limites $z = \pm l$ implique $B_x = B_z = 0$ et

Q49. $\lambda_L = 3.97 \cdot 10^{-8} \text{ m}$. Dès que la profondeur excède quelques λ_L , le champ B_y devient négligeable, le champ $\mathbf{B}$ est nul à l'intérieur d'un matériau supraconducteur.

Q50. Le champ $\mathbf{B}$ étant nul dans la sphère supraconductrice son flux $\varphi_s = 0$.

Q51. L'expression proposée a la dimension d'une inductance et le signe positif d'une inductance propre ...

Q52. En écrivant les relations de l'inductance : $\varphi_s = 0 = L_s I_s + M I_b$ et $\varphi_b = \varphi = L_b I_b + M I_s$. Par

$$I_b = \frac{L_s}{L^2} \phi \quad \text{et} \quad I_s = -\frac{M}{L^2} \phi$$

élimination on obtient : . Les deux courants sont de signes opposés car M est positif vu les sens choisis pour I_b et I_s ce qui serait une application de la loi de Lenz ?

Q53. $E_M = \frac{1}{2} L_s I_s^2 + \frac{1}{2} L_b I_b^2 + M I_s I_b = 1/2 (L_s/L^2) \phi^2$.

$$E_M = \frac{1}{2} \frac{\phi^2}{L_b} \left(1 + \frac{M^2}{L_b L_s} \right)$$

Q54.

$$B_z = \frac{\mu_0 I_b}{2R} \sin^3 \alpha = \frac{\mu_0 I_b}{2R} \frac{R^3}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

Q55. Calcul du champ d'une spire :

Q56. En faisant l'hypothèse que le champ $\mathbf{B}$ est uniforme sur la surface de la petite spire le flux

$$M = \frac{\mu_0}{2} \frac{\pi r^2 R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

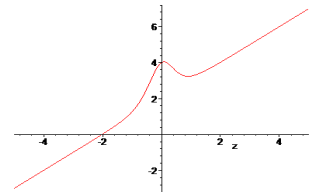
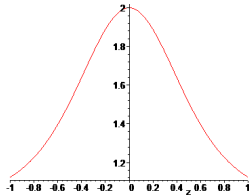
induit est : $\phi = \pi r^2 B_z = M I_b$ donc

Q57. En tenant compte des deux termes d'énergie potentielle :

$$E_p = mgz + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\left(\frac{\mu_0 \pi r^2 R^2}{2} \right)^2}{L_b L_s (R^2 + z^2)^3} \right) \frac{\phi^2}{L_b}$$

. Si ϕ est très petit seule l'énergie de pesanteur

est prise en compte et la position d'équilibre est à $-\infty$! Si ϕ est très grand alors la courbe a l'allure ci dessous qui montre une position d'équilibre instable en $z = 0$. Pour des valeurs intermédiaires la composition des deux formes limites donne une possibilité de maximum suivi d'un minimum comme sur l'exemple ci-contre.



Q58. En notant A le coefficient devant le terme en $(R^2 + z^2)$ de E_p , la position d'équilibre z_e est

$$\frac{z_e}{(R^2 + z_e^2)^4} = \frac{mgL_b}{3A\phi^2}$$

obtenue en annulant la dérivée de $E_p(z)$: . La différentielle logarithmique

$$\frac{dz_e}{z_e} = \frac{dg}{g} \frac{1}{1 - \frac{8z_e^2}{(R^2 + z_e^2)}} = -105,96 \frac{dg}{g}$$

de cette expression par rapport à z_e et g :

Q59. La sensibilité du gravimètre est d'autant plus importante que $8z_e^2$ est proche de $R^2 + z_e^2$ soit z_e proche de $R/\sqrt{7}$. C'est ce qui permet de choisir le flux optimal dans la relation d'équilibre.

Q60. Le « lasso » est facile à réaliser avec les points A, B et D repérés sur la sphère, l'ensemble est bien un système de charge totale nulle.

Q61. On peut y voir un montage de type pont de mesure en électrocinétique à équilibrer et V_s sera nulle si $C_+ = C_-$ alors V_D sera égale à $V_e/2$.

Q62. Si aucun courant ne traverse le point D , un simple diviseur de tension fournit V_D et

$$V_s = V_e \left(\frac{C_-}{C_- + C_+} - \frac{1}{2} \right)$$

finalement :

Q63. Capacité d'un condensateur plan : $C_{\pm} = \epsilon_0 S / (d \pm \delta z)$.

$$V_s = V_e \left(\frac{\delta z}{2d} \right)$$

Q64. Après simplification :

Q65. Pour n'avoir aucun courant dans la branche V_s il faut que le 'amplificateur ait une impédance d'entrée très grande devant celle des condensateurs du pont.

Q66. Par application numérique on obtient : $\delta z_e = 4.9 \cdot 10^{-12}$ m et avec les résultats de la question (Q58) $\delta g/g = 5.6 \cdot 10^{-8}$.

Q67. La sensibilité est très grande comme on vient de le voir mais la mesure de z_e qui accéderait à g demande une connaissance précise de ϕ , L_b et L_s notamment, mal connues.

IV Détermination de G à l'aide d'un gravimètre atomique

Approche corpusculaire

Q68. Conservation de la quantité de mouvement du système atome – photon durant le choc :

$$\mathbf{p}_i - \hbar \mathbf{K} \mathbf{z} = \mathbf{p}_d + \hbar \mathbf{K} \mathbf{z}.$$

Q69. Conservation de l'énergie totale du système sans variation de masse, donc en physique non relativiste :

$$\frac{1}{2} p_i^2/m + \hbar \Omega = \frac{1}{2} p_d^2/m + \hbar \Omega \quad \text{soit} \quad p_i^2 = p_d^2.$$

Q70. En projetant $\mathbf{p}_i$ ($p_i \cos \theta_i, p_i \sin \theta_i$) et $\mathbf{p}_d$ ($p_d \cos \theta_d, p_d \sin \theta_d$) avec $\theta_d < 0$ sur le schéma:

$$p_i \cos \theta_i = p_d \cos \theta_d \quad \text{et} \quad p_i \sin \theta_i - 2 \hbar K = p_d \sin \theta_d.$$

Alors $p_i^2 = (p_i^2 \cos^2 \theta_i + (p_i \sin \theta_i - 2 \hbar K)^2)$ soit : $\sin \theta_i = \frac{\hbar K}{p_i}; \sin \theta_d = -\frac{\hbar K}{p_i}$ donc $\theta_d = -\theta_i$.

Q71. Avec $\theta_i = \pi/2$: $p_i = \hbar K \mathbf{z}$ et $p_d = -\hbar K \mathbf{z}$.

Approche ondulatoire

Q72. En remplaçant : $-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \phi(\mathbf{r}) = \hbar \omega \phi(\mathbf{r})$.

Q73. En introduisant $\phi(\mathbf{r}) = \psi_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$ l'équation de propagation devient une équation de

dispersion : $k^2 = 2m\omega/\hbar$. La vitesse de phase est $v_\phi = \omega/k = \sqrt{\frac{\hbar \omega}{2m}}$ elle dépend de la fréquence, le vide est donc dispersif pour les ondes de matière contrairement aux ondes lumineuses.

Q74. $v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\hbar k}{m}$. Si on identifie v_g à la vitesse de propagation de l'énergie donc de la particule $p = mv_g = \hbar k$ analogue à la relation pour les photons.

Q75. $\mathbf{E}(z,t) = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = 2E_0 \cos(Kz) e^{-i\omega t} \mathbf{x}$. Donc une intensité $I(z) = I_0 \cos^2(Kz)$ et un potentiel

$$V(z) = -\frac{\alpha_r I_0}{2\epsilon_0 c} \left(\cos^2(Kz) - \frac{1}{2} \right) \quad \text{où la constante a été choisie pour annuler la valeur moyenne de}$$

$V(z)$ ou encore $V(z) = -\frac{\alpha_r I_0 \cos(2Kz)}{4\epsilon_0 c}$. Cette fonction est périodique de période $d = \pi/K = \lambda/2$, c'est-à-dire une onde lumineuse stationnaire.

Q76. Il y aura résonance des ondes diffractées par chaque motif si elles sont toutes en phase : c'est-à-dire $(\mathbf{k}_d - \mathbf{k}_i) \cdot d\mathbf{u}_z = m 2\pi$ où m , entier relatif, est l'ordre du spectre diffracté.

Q77. Dans l'équation précédente il vient : $\mathbf{k}_d = \mathbf{k}_i + m2\pi/d \mathbf{z} = (K + m2K) \mathbf{z}$, c'est l'ordre $m = -1$ qui correspond à une diffraction vers le bas.

Q78. L'onde $\psi(z,t)$ cherchée comporte deux termes de sens de propagation opposés l'onde directe et l'onde diffractée en sens inverse de la question précédente (ou réfléchi ?). Pour la fréquence ω on garde la valeur trouvée dans le vide c'est-à-dire $\omega = \hbar K^2/2m$ en admettant que les coefficients $c(t)$ varient lentement.

Q79. On reporte l'expression de $V(z)$ dans l'équation de Schrödinger avec le cosinus écrit sous forme d'exponentielle complexe. Le laplacien ne porte que sur la variable z et est égal à la multiplication par $-K^2$. Le calcul fera apparaître des exponentielles en e^{3iKz} qu'on néglige, enfin

l'équation étant valable quel que soit z , les facteurs des exponentielles e^{iKz} et e^{-iKz} doivent être nuls. Pour simplifier l'écriture K^2 est exprimé en fonction de ω par la relation de dispersion et

$$\frac{dc_0(t)}{dt} = i\beta c_1$$

on obtient : . L'équation sur $c_1(t)$ est symétrique.

Q80. Au départ il n'y a pas d'onde réfléchie donc $c_1(0) = 0$ et on peut prendre pour l'onde incidente (Q73) $c_0(0) = \psi_0$.

Q81. En découplant le système des deux équations différentielles de $c_0(t)$ et $c_1(t)$ on obtient

$$\frac{d^2c}{dt^2} + \beta^2 c = 0$$

deux équations : ; La solution de $c_0(t) = \psi_0 \cos(\beta t)$ et $c_1(t) = i\psi_0 \sin(\beta t)$. Les allures des modules au carré sont des sinusoides en quadrature, ce qui représente des oscillations de l'onde de matière entre deux états

Q82. Pour avoir $\cos^2 = \sin^2$ on choisit $\beta\tau = \pi/4$ soit $\tau = \pi/4\beta$

Q83. On part avec de nouvelles conditions initiales : $c_0(\tau) = \psi_0/\sqrt{2}$ et $c_1(\tau) = i\psi_0/\sqrt{2}$ puis $V(t > \tau) = 0$ donc β s'annule et les coefficients c sont des constantes :

$$\psi(z, t) = \frac{\psi_0}{\sqrt{2}} \left(e^{-i(\omega t - Kz)} + i e^{-i(\omega t + Kz)} \right)$$

Q84. La phase en $(\omega t - Kz)$ représente l'onde transmise et la phase en $(\omega t + Kz)$ l'onde réfléchie avec un déphasage de $+\pi/2$.

Q85. En recherchant dans Q73 la forme de l'onde incidente :

$$r_r = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{i\psi_0 e^{-i(\omega t + Kz_0)}}{\psi_0 e^{-i(\omega t - Kz_0)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-2iKz_0 + i\pi/2} \quad \text{et} \quad t_r = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\psi_0 e^{-i(\omega t - Kz_0)}}{\psi_0 e^{-i(\omega t - Kz_0)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Q86. Pour $t = 2\tau$, $\beta\tau = \pi/2$ et $c_0(2\tau) = 0$ alors que $c_1(2\tau) = i\psi_0$. C'est l'analogie d'un miroir en optique avec un déphasage de $\pi/2$ à la réflexion. Avec l'onde incidente on obtient :

$$r_r = \frac{i\psi_0 e^{-i(\omega t + Kz_0)}}{\psi_0 e^{-i(\omega t - Kz_0)}} = e^{-2iKz_0 + i\pi/2} \quad \text{et} \quad t_r = \frac{0 \times \psi_0 e^{-i(\omega t - Kz_0)}}{\psi_0 e^{-i(\omega t - Kz_0)}} = 0$$

Interféromètre atomique

$$\psi_a = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\psi_0}{\sqrt{2}} e^{i\phi_1} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\psi_0}{\sqrt{2}} e^{i\phi_2} \quad \text{et} \quad N_a$$

Q87. En suivant la fonction d'onde sur les deux parcours :

$= \psi\psi^*$ comme $N_0 = \psi_0\psi_0^*$ il vient : $N_a = N_0/2 (1 + \cos \Delta\phi_a)$ et par conservation du nombre de particules $N_b = N_0/2 (1 - \cos \Delta\phi_a)$.

Q88. Sur A_1B_1 : $K = +Kz$; Sur A_2B_2 : $K = -Kz$; Sur B_1C : $K = -Kz$; Sur B_2C : $K = +Kz$.

Q89. ϕ_{a2} réflexions/transmissions = $(-2Kz_A + \pi/2) + (+2Kz_{B2} + \pi/2) + 0$

Q90. ϕ_{a1} réflexions/transmissions = $0 + (-2Kz_{B1} + \pi/2) + (+2Kz_C + \pi/2)$ et $\Delta\phi_{a \text{ refl/trans}} = \phi_{a2 \text{ réf/tr}} - \phi_{a1 \text{ réf/tr}} = -2K(z_A + z_C) + 2K(z_{B2} + z_{B1})$

Q91. $\phi_{AB1} = K(z_{B1} - z_A)$; $\phi_{B1C} = -K(z_C - z_{B1})$ d'où $\phi_{1 \text{ prop}} = K(2z_{B1} - z_A - z_C)$ et par analogie $\phi_{2 \text{ prop}} = -K(2z_{B2} - z_A - z_C)$ alors $\Delta\phi_{a \text{ prop}} = -K(2z_{B2} - z_A - z_C) - K(2z_{B1} - z_A - z_C) = -K(2z_{B1} + 2z_{B2} + 2z_A + 2z_C)$

Q92. La vitesse des particules sera associée à $vg = \hbar K/m$. Avec l'origine $z_A = 0$, $z_{B1} = v_g T$, $z_{B2} = -v_g T$, et $z_C = 0$ et $\Delta\phi_{a \text{ prop}} = 0$

Q93. $\Delta\phi_a = \Delta\phi_{a \text{ refl/trans}} + \Delta\phi_{a \text{ prop}} = -2K(z_A + z_C) + 2K(z_{B2} + z_{B1}) = 0$.

Q94. Les trajectoires sont toutes un peu courbées vers le bas, à allure parabolique.

Q95. Maintenant après le point A : $v = \pm v_g - gt$ d'où $z_{B1} = v_g T - \frac{1}{2} gT^2$, $z_{B2} = -v_g T - \frac{1}{2} gT^2$ et par exemple $v(\text{juste avant } B_1) = v_1 = v_g - gT$, qui est réfléchi en $v'_1 = -v_g + gT$ d'où $z_C = z_{B1} + v'_1 T - \frac{1}{2} gT^2 = 0$, le calcul donnerait la même chose avec le chemin passant par B_2 .

Q96. En substituant dans $\Delta\phi_{a \text{ refl/trans}}$ de Q90, on obtient $\Delta\phi_a = -K(-gT^2 - gT^2) = 2KgT^2$.

Q97. La variation du déphasage est $\delta(\Delta\phi_a) = 2KT^2\delta g = 2.88 \cdot 10^{-1}$ rad et le résultat attendu de la mesure de $2\delta(\Delta\phi_a) = 0.58$ rad, voisin de l'amplitude de 0.6 rad lisible sur l'enregistrement.
